Sh. M. Gelashvili

Об одной краевой задаче для систем функционально-дифференциальных уравнений

Archivum Mathematicum, Vol. 20 (1984), No. 4, 157--168

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/107200

ARCH. MATH. 4, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XX: 157–168, 1984

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ш. М. ГЕЛАШВИЛИ, ТБИЛИСИ

(Поступило в редакцию 6. 11. 1981)

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, $I_0 = [a, b]$, $t_i \in I_0 (i = 1, \ldots, n)$, $\varphi_i (i = 1, \ldots, n)$ – функционалы, заданные в пространстве n-мерных непрерывных вектор-функций, а $f_i (i = 1, \ldots, n)$ – операторы, действующие из упомянутого пространства во множество определенных на I_0 измеримых функций. Ниже исследуется задача об отыскании абсолютно непрерывной вектор-функции $(x_i)_{i=1}^n : I_0 \to R^n$, почти всюду на I_0 удовлетворяющей системе функционально-дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = f_i(x_1, \ldots, x_n)(t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{0.1}$$

и краевым условиям

$$x_i(t_i) = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{0.2}$$

В последние годы интерес к краевым задачам для функционально-дифференциальных уравнений существенно возрос. Ряд общих результатов в этом направлении получен в [1,2].

В настоящей статье (0.1), (0.2) трактуется как возмущенная задача Коши-Николетти и ищутся условия её разрешимости, учитывающие специфику краевых условий. Доказанные здесь теоремы существования и единственности обобщают некоторые результаты работ [3–9], где рассматривается случай, когда $f_i (i = 1, \ldots, n)$ являются операторами Немыцкого.

В статье приняты следующие обозначения.

R^m – m – мерное вещественное евклидово пространство, $x = (x_i)_{i=1}^n$ – произвольная точка в нем,

$$\| x \|_{R^m} = \sum_{i=1}^{m} | x_i |.$$

$$R_+^m = \{(x_i)_{i=1}^m \in R^m ; x_i \geqq 0 (i = 1, \ldots, m)\}.$$

$(s_{ik})_{i,k=1}^m$ – $m \times m$ матрица с элементами $s_{ik} (i, k = 1, \ldots, m)$.

$C(I;\, R^m)$ и $L^p(I;\, R^m)$ соответственно пространства непрерывных и интегрируемых по Лебегу со степенью $p > 1$ m — мерных действительных вектор-функций с нормами

$$\| x \|_{C(I;\, R^m)} = \max \{\| x(t) \|_{R^m} : t \in I\}$$

и

$$\| x \|_{L^p(I;\, R^m)} = [\int_I \| x(t) \|^p_{R^m} \, dt]^{1/p}.$$

$C(I;\, R^m_+) = \{x \in C(I;\, R^m) : x(t) \in R^m_+ \quad \text{при } t \in I\}$,

$L(I;\, R^m_+) = \{x \in L(I;\, R^m) : x(t) \in R^m_+ \quad \text{при } t \in I\}$.

$L^p_{loc}(I;\, R^m)$ — пространство функций $x : I \to R^m$, интегрируемых по Лебегу со степенью p на каждом компакте, содержащемся в I.

Последовательность $x^k \in L^p_{loc}(I;\, R^m)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ называется сходящейся к $x \in L^p_{loc}(I;\, R^m)$, если для любого компакта $I' \subset I$

$$\|x^k - x\|_{L^p(I';\, R^m)} \to 0 \quad \text{при } k \to +\infty$$

Если I компакт, то $L_{loc}(I;\, R^m) = L(I;\, R^m)$.

$\mathrm{K}[C(I^*;\, R^m);\, L_{loc}(I;\, R)]$ — класс операторов, удовлетворяющих условиям Каратеодори; т. е. $g \in K[C(I^*;\, R^m);\, L_{loc}(I;\, R)]$, если $g : C(I^*;\, R^m) \to L_{loc}(I;\, R)$ является непрерывным оператором и для любого $\eta \in R_+$ найдется функция $h_\eta \in L_{loc}(I;\, R_+)$ такая, что

$$|g(x_1, \ldots, x_m)(t)| \leqq h_\eta(t) \text{ при } t \in I$$

какова бы ни была вектор-функция $x = (x_i)_{i=1}^m \in C(I^*;\, R^m)$ норма которой не превосходит η. Если $\tau : I_0 \to R$, то под S_τ понимается оператор

$$S_\tau(x)(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x(\tau(t)) & \text{при } \tau(t) \in I_0, \\ 0 & \text{при } \tau(t) \notin I_0. \end{cases}$$

В § 1 задача (0.1), (0.2) исследуется в регулярном случае, когда

$$f_i \in \mathrm{K}[C(I_0;\, R^n);\, L(I_0;\, R)] \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{0.3}$$

а в § 2 — в сингулярном случае, когда

$$f_i \in \mathrm{K}[C(I_0;\, R^n);\, L_{loc}(I_i;\, R)] \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{0.4}$$

где $I_i = I_0 \setminus \{t_i\}$.

§ 1. Регулярный случай

Всюду в этом параграфе предполагается, что соблюдаются условия (0.3) и $\varphi_i : C(I_0;\, R^n) \to R$ $(i = 1, \ldots, n)$ являются непрерывными функционалами.

Определение 1.1. $g : C(I_0;\, R^n_+) \to L(I_0;\, R)$ называется положительно однородным оператором, если для любого неотрицательного числа ϱ и любого

$(x_i)_{i=1}^n \in C(I_0; R_+^n)$ имеем

$$g(\varrho x_1, \ldots, \varrho x_n) = \varrho g(x_1, \ldots, x_n).$$

Определение 1.2. $g : C(I_0; R_+^n) \to L(I_0; R)$ называется неубывающим оператором, если при любых $(x_i)_{i=1}^n$ и $(y_i)_{i=1}^n \in C(I_0\ R_+^n)$, удовлетворяющих неравенствам

$$x_i(t) \leqq y_i(t) \quad \text{при} \quad t \in I_0 \ (i = 1, \ldots, n),$$

имеем

$$g(x_1, \ldots, x_n)(t) \leqq g(y_1, \ldots, y_n)(t) \quad \text{при} \quad t \in I_0.$$

Наряду с (0.1), (0.2) нам придется рассмотреть систему функционально-дифференциональных неравенств

$$(1.1) \qquad |x_i'(t)| \leqq f_{0i}(|x_1|, \ldots, |x_n|)(t) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

с краевыми условиями

$$(1.2) \qquad |x_i(t_i)| \leqq \varphi_{0i}(|x_1|, \ldots, |x_n|) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Решение задачи (1.1), (1.2) также ищется во множестве абсолютно непрерывных вектор-функций $(x_i)_{i=1}^n : I_0 \to R^n$.

Теорема 1.1. *Пусть существует положительное число* η, *функция* $h \in L(I_0; R_+)$ *и положительно однородные, непрерывные, неубывающие операторы и функционалы* $f_{0i} : C(I_0; R_+^n) \to L(I_0; R_+)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $\varphi_{0i}: C(I_0; R_+^n) \to R_+$ $(i = 1, \ldots, n)$ *такие, что задача* (1.1), (1.2) *имеет только нулевое решение и для любого* $(x_i)_{i=1}^n \in C(I_0; R^n)$ *соблюдаются неравенства*

$$(1.3) \qquad f_i(x_1, \ldots, x_n)(t) \operatorname{sign}[(t - t_i)\, x_i(t)] \leqq h(t) + f_{0i}(|x_1|, \ldots, |x_n|)(t) \quad \text{при } t \in I_0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и

$$(1.4) \qquad |\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)| \leqq \eta + \varphi_{0i}(|x_1|, \ldots, |x_n|) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда задача (0.1), (0.2) разрешима.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая

Лемма 1.1. *Пусть* $f_{0i}: C(I_0; R_+^n) \to L(I_0; R_+)$ и $\varphi_{0i}: C(I_0; R_+^n) \to R_+$ $(i = 1, \ldots, n)$ — *непрерывные, неубывающие, положительно однородные операторы и функционалы,* $t_i \in I_0$ $(i = 1, \ldots, n)$ *и задача* (1.1), (1.2) *имеет только нулевое решение. Тогда существует такое положительное число* ϱ, *что каковы ни были* $h \in L(I_0; R_+)$, $\eta > 0$ *и абсолютно непрерывная вектор-функция* $(x_i)_{i=1}^n : I_0 \to R^n$, *из неравенств*

$$(1.5) \qquad x_i'(t) \operatorname{sign}[(t - t_i)x_i(t)] \leqq h(t) + f_{0i}(|x_1|, \ldots, |x_n|)(t) \quad \text{при} \quad t \in I_0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и

$$(1.6) \qquad |x_i(t_i)| \leqq \eta + \varphi_{0i}(|x_1|, \ldots, |x_n|) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

вытекает оценка

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| \leqq \varrho[\eta + \int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t] \qquad \text{при } t \in I_0. \tag{1.7}$$

Доказательство. Докажем прежде всего существование такого положительного числа ϱ, что для любых $\eta > 0$ и $h \in L(I_0; R_+)$ произвольное решение $(y_i)_{i=1}^n$ задачи

$$|y_i'(t)| \leqq h(t) + f_{0i}(|y_1|, \ldots, |y_n|)(t) \quad \textit{при} \quad t \in I_0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1.5^1}$$

$$|y_i(t_i)| \leqq \eta + \varphi_{0i}(|y_1|, \ldots, |y_n|) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.6^1}$$

допускает оценку

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i(t)| \leqq \varrho[\eta + \int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t] \qquad \text{при } t \in I_0. \tag{1.7^1}$$

Предположим противное, что такое ϱ не существует. Тогда для любового натурального m найдутся $\eta_m > 0$, $h_m \in L(I_0, R_+)$ и абсолютно непрерывная вектор-функция $(y_{im})_{i=1}^n : I_0 \to R^n$ такие, что

$$|y_{im}'(t)| \leqq h_m(t) + f_{0i}(|y_{1m}|, \ldots, |y_{nm}|)(t) \quad \text{при} \quad t \in I_0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1.8}$$

$$|y_{im}(t_i)| \leqq \eta_m + \varphi_{0i}(|y_{1m}|, \ldots, |y_{nm}|) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1.9}$$

$$\varrho_m = \max\{\sum_{i=1}^{n} |y_{1m}(t)| : t \in I_0\} > m\,[\eta_m + \int_a^b h_m(t)\,\mathrm{d}t]. \tag{1.10}$$

Пусть

$$z_{im}(t) = \frac{1}{\varrho_m} y_{im}(t) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда

$$\max\{\sum_{i=1}^{n} |z_{im}(t)| : t \in I_0\} = 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{1.11}$$

С другой стороны, так как операторы и функционалы f_{0i} и φ_{0i} $(i = 1, \ldots, n)$ положительно однородны, из (1.8) и (1.9) получим

$$|z_{im}'(t)| \leqq \tilde{h}_m(t) + g_i(t) \quad \text{при} \quad t \in I_0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1.12}$$

$$|z_{im}'(t)| \leqq \tilde{h}_m(t) + f_{0i}(|z_{1m}|, \ldots, |z_{nm}|)(t) \quad \text{при} \quad t \in I_0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1.13}$$

$$|z_{im}(t_i)| \leqq \frac{1}{m} + \varphi_{0i}(|z_{1m}|, \ldots, |z_{nm}|) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1.14}$$

где

$$\tilde{h}_m(t) = \frac{h_m(t)}{\varrho_m}, \qquad g_i(t) = f_{0i}(1, \ldots, 1)(t);$$

причем, как это следует из (1.10),

$$\int_a^b \tilde{h}_m(t)\,\mathrm{d}t \leqq \frac{1}{m} \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{1.15}$$

Согласно (1.11) последовательности $(z_{im})_{m=1}^{\infty}$ $(i = 1, \ldots, n)$ равномерно ограничены. С другой стороны, ввиду (1.12) и (1.15)

$$|z_{im}(t) - z_{im}(s)| \leqq \frac{1}{m} + \left|\int_s^t g_i(\tau)\,d\tau\right| \qquad \text{при } s \in I_0,\ t \in I_0 \ \ (i = 1, \ldots, n).$$

Отсюда вытекает, что $(Z_{im})_{m=1}^{\infty}$ $(i = 1, \ldots, n)$ равностепенно непрерывны. Согласно лемме Арцела–Асколи, не нарушая общности можем считать, что $(z_{im})_{m=1}^{\infty}$ $(i = 1, \ldots, n)$ равномерно сходятся на I_0. Полагая

$$\lim_{m\to\infty} z_{im}(t) = x_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и учитывая непрерывность φ_{0i} $(i = 1, \ldots, n)$, из (1.11) и (1.14) получим, что

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| : t \in I_0\right\} = 1 \tag{1.16}$$

и соблюдаются неравенства (1.2).

В силу (1.13) и (1.15)

$$|z_{im}(t) - z_{im}(s)| \leqq \frac{1}{m} + \left|\int_s^t f_{0i}(|z_{1m}|, \ldots, |z_{nm}|)(\tau)\,d\tau\right|$$
$$\text{при } s \text{ и } t \in I_0 \ \ (i = 1, \ldots, n).$$

Перейдя в этих неравенствах к пределу, когда $m \to \infty$, ввиду непрерывности операторов f_{0i} $(i = 1, \ldots, n)$ получим, что

$$|x_i(t) - x_i(s)| \leqq \left|\int_s^t f_{0i}(|x_1|, \ldots, |x_n|)(\tau)\,d\tau\right|$$
$$\text{при } s \text{ и } t \in I_0 \ \ (i = 1, \ldots, n).$$

Отсюда очевидно что $(x_i)_{i=1}^{n}$ абсолютно непрерывна и почти всюду на I_0 удовлетворяет системе дифференциальных неравенств (1.1). Следовательно, $(x_i)_{i=1}^{n}$ является решением задачи (1.1), (1.2). Однако, это невозможно, так как упомянутая задача имеет только нулевое решение, а $(x_i)_{i=1}^{n}$ удовлетворяет условию (1.16).

Полученное противоречие доказывает существование положительного числа ϱ, обладающего упомянутым выше свойством.

Предположим теперь, что $\eta > 0$ и $h \in L(I_0; R_+)$ произвольные число и функция, а $(x_i)_{i=1}^{n}$ решение задачи (1.5), (1.6). Введем обозначения

$$\xi_i(t) = \begin{cases} |x_i(t)|' & \text{при } |x_i(t)|'(t - t_i) \geqq 0 \\ 0 & \text{при } |x_i(t)|'(t - t_i) < 0 \end{cases}$$

и

$$y_i(t) = |x_i(t_i)| + \int_{t_i}^{t} \xi_i(\tau)\,d\tau \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда

(1.17) $$|y_i(t)| \geqq x_i(t) \quad \text{при } t \in I_0 \ (i = 1, \ldots, n)$$

и

$$|y_i(t_i)| = |x_i(t_i)| \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Учитывая, кроме того, что операторы f_{0i} и функционалы φ_{0i} $(i = 1, \ldots, n)$ не убывают, убедимся, что $(y_i)_{i=1}^n$ является решением задачи (1.5$^{\text{I}}$), (1.6$^{\text{I}}$). Поэтому согласно вышедоказанному справедливы оценки (1.7$^{\text{I}}$). Но из (1.7$^{\text{I}}$) ввиду (1.17) вытекают оценки (1.7). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.1.

Пусть ϱ — постоянная, фигурирующая в лемме 1.1.

(1.18) $$\varrho_0 = \varrho(\eta + \int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t),$$

(1.19) $$\chi(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } |s| \leqq \varrho_0 \\ 2 - \dfrac{|s|}{\varrho_0} & \text{при } \varrho_0 \leqq |s| \leqq 2\varrho_0, \\ 0 & \text{при } |s| \geqq 2\varrho_0 \end{cases}$$

а $f = (\tilde{f}_i)_{i=1}^n$, $H = (H_i)_{i=1}^n$ и $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_i)_{i=1}^n$ соответственно операторы и функционалы, заданные равенствами

(1.20) $$\tilde{f}_i(x_1, \ldots, x_n)(t) = \chi(\|x\|_{C(I_0;R^n)}) f_i(x_1, \ldots, x_n)(t) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

(1.21) $$\tilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_n) = \chi(\|x\|_{C(I_0;R^n)})\ \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

(1.22) $$H_i(x_1, \ldots, x_n) = \tilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_n) + \int_{t_i}^t \tilde{f}_i(x_1, \ldots, x_n)(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Согласно (1.20) и (1.21) найдутся положительное число η_1 и функция $g \in \in L(I_0; R_+)$ такие, что в $C(I_0; R^n)$ соблюдаются неравенства

(1.23) $$|\tilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_n)| \leqq \eta_1$$

и

(1.24) $$\sum_{i=1}^n |\tilde{f}_i(x_1, \ldots, x_n)(t)| \leqq g(t).$$

Положим

$$\eta_2 = \eta_1 + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Исходя из непрерывности $\tilde{f}$ и $\tilde{\varphi}$, а также из условий (1.23), (1.24) легко показать, что H является вполне непрерывным оператором, преобразующим $C(I_0; R^n)$ в шар этого пространства с центром в нуле и радиусом η_2. Поэтому согласно теореме Шаудера оператор H имеет неподвижную точку, т. е. существует $(x_i)_{i=1}^n \in C(I_0; R^n)$ такое, что

$$x_i(t) \equiv H_i(x_1, \ldots, x_n)(t) \quad \text{при} \quad t \in I_0 \ (i = 1, \ldots, n).$$

Следовательно, ввиду (1.22) имеем

$$x_i'(t) = \tilde{f}_i(x_1, \ldots, x_n)(t) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1.25}$$

$$x_i(t_i) = \tilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.26}$$

Отсюда в силу условий (1.3), (1.4), (1.20) и (1.21) вытекает, что $(x_i)_{i=1}^n$ удовлетворяет неравенствам (1.5), (1.6). Поэтому согласно лемме 1.1 справедлива оценка (1.7). Следовательно,

$$\| x \|_{C(I_0;\, R^n)} \leqq \varrho_0 . \tag{1.27}$$

Из (1.19) – (1.21) и (1.27) ясно, что $(x_i)_{i=1}^n$ является решением задачи (0.1), (0.2). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть для любого $(x_i)_{i=1}^n \in C(I_0;\, R^n)$ соблюдаются неравенства

$$f_i(x_1, \ldots, x_n)(t)\, \mathrm{sign}[(t - t_i)x_i(t)] \leqq h_0(t) + \sum_{k=1}^n h_{ik}(t) \| x_k \|_{C(I_0;\, R)}$$
$$\text{при} \quad t \in I_0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и

$$| \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) | \leqq \mathscr{C}_0 + \sum_{k=1}^n \mathscr{C}_{ik} \| x_k \|_{C(I_0,\, R)} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где $\mathscr{C}_0 \geqq 0$, $\mathscr{C}_{ik} \geqq 0$, $h_{ik} \in L(I_0;\, R_+)$ $(i, k = 1, \ldots, n)$, $h_0 \in L(I_0; R_+)$ и все собственные числа матрицы

$$\Lambda = (\mathscr{C}_{ik} + \int_a^b h_{ik}(t)\, \mathrm{d}t)_{i,k=1}^n$$

по модулю меньше единицы. Тогда задача (0.1), (0.2) разрешима.

Доказательство. Согласно теореме 1.1 достаточно показать, что задача

$$| x_i'(t) | \leqq \sum_{k=1}^n h_{ik}(t) \| x_k \|_{C(I_0,\, R^n)} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$| x_i(t_i) | \leqq \sum_{k=1}^n \mathscr{C}_{ik} \| x_k \|_{C(I_0,\, R^n)} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

имеет только нулевое решение. Пусть $(x_i)_{i=1}^n$ — произвольное решение этой задачи. Тогда

$$| x_i(t) | \leqq \sum_{k=1}^n \mathscr{C}_{ik} \| x_k \|_{C(I_0;\, R^n)} + \sum_{k=1}^n \left| \int_{t_i}^t h_{ik}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right| \| x_k \|_{C(I_0;\, R^n)} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Положим $\varrho = (\| x_k \|_{C(I_0;\, R)})_{k=1}^n$. Тогда из последних неравенств получим

$$0 < \varrho \leqq \Lambda \varrho \tag{1.28}$$

Поскольку собственные числа матрицы Λ по модулю меньше единицы, отсюда вытекает, что $\varrho = 0$. Следствие доказано.

Следствие 2. Пусть для любого $(x_i)_{i=1}^n \in C(I_0; R^n)$ соблюдаются неравенства

$$f_i(x_1, \ldots, x_n)(t)\,\mathrm{sign}[(t-t_i)x_i(t)] \leqq h_0(t) + \sum_{k=1}^{n} h_{ik}\,|s_{\tau_k}(x_k)(t)| \quad \text{при} \quad t \in I_0 \ (i = 1, \ldots, n)$$

и

$$|\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)| \leqq \mathscr{C}_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathscr{C}_{ik}\,\|x_k\|_{L^2(I_0; R)} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_{ik}$, h_{ik} $(i, k = 1, \ldots, n)$ — неотрицательные числа, $h_0 \in L(I_0; R_+)$, и $\tau_k : I_0 \to R$ $(k = 1, \ldots, n)$ — абсолютно непрерывные монотонные функции. Пусть, кроме того,

$$\delta_k = \mathrm{vrai\,min}\,\{|\tau_\kappa'(t)| : t \in I_0\} > 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.29}$$

и собственные числа матрицы

$$\Lambda = \left((b-a)^{1/2}\mathscr{C}_{ik} + \frac{2(b-a)}{\sqrt{\delta_k}}\,h_{ik}\right)_{i,k=1}^{n}$$

по модулю меньше единицы. Тогда задача (0.1), (0.2) разрешима.

Доказательство. Пусть $(x_i)_{i=1}^n$ — произвольное решение задачи

$$|x'(t)| \leqq \sum_{k=1}^{n} h_{ik}\,|s_{\tau_k}(x_k)(t)| \qquad \text{при } t \in I_0 \ (i = 1, \ldots, n),$$

$$|x_i(t_i)| \leqq \sum_{k=1}^{n} \mathscr{C}_{ik}\,\|x_k\|_{L^2(I_0, R)} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда

$$\|x_i\|_{L^2(I_0; R)} \leqq (b-a)^{1/2} \sum_{k=1}^{n} \mathscr{C}_{ik}\,\|x_k\|_{L^2(I_0; R)} + \sum_{k=1}^{n} h_{ik}\Big[\int_a^b \Big|\int_{t_i}^{t} s_{\tau_k}(x)(\xi)\,d\xi\Big|^2 dt\Big]^{1/2}$$
$$(i = 1, \ldots, n).$$

Согласно неравенству Виртингера [10]

$$\int_a^b \Big|\int_{t_i}^{t} s_{\tau_k}(x_k)(\xi)\,d\xi\Big|^2 dt \leqq \left[\frac{2(b-a)}{\pi}\right]^2 \int_a^b |s_{\tau_k}(x_k)(\xi)|^2\,d\xi \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

С другой стороны в силу (1.29)

$$\int_a^b |s_{\tau_k}(x_k)(\xi)|^2\,d\xi \leqq \frac{1}{\delta_k}\,\|x_k\|^2_{L^2(I_0; R)}.$$

Из вышесказанного очевидно, что вектор $\varrho = (\|x_k\|_{L^2(I_0; R)})_{k=1}^n$ удовлетворяет неравенству (1.28) и следовательно, $\varrho = 0$. Следствие доказано.

В качестве примеров рассмотрим краевые задачи

$$(1.30)\qquad \frac{dx_i(t)}{dt} = g_i\Big(t, \int_a^b x_1(s)\, d_s\sigma_1(s,t), \ldots, \int_a^b x_m(s)\, d_s\sigma_m(s,t), x_{m+1}(t), \ldots, x_n(t)\Big)$$

$$(i = 1, \ldots, n),$$

$$(1.31)\qquad x_i(t_i) = \lambda_{0i} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} \int_a^b x_k(s)\, d\mu_{ik}(s) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и

$$(1.32)\qquad \frac{dx_i(t)}{dt} = g_i\big(t, s_{\tau_1}(x_1)(t), \ldots, s_{\tau_m}(x_m)(t), x_{m+1}(t), \ldots, x_n(t)\big) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$(1.33)\qquad x_i(t_i) = \lambda_{0i} + \sum_{k=1}^{n} \int_a^b v_{ik}(s)\, x_k(s)\, ds \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где $g_i : I_0 \times R^n \to R$ $(i = 1, \ldots, n)$ — функции из класса Каратеодори, $\tau_k : I_0 \to R$ $(k = 1, \ldots, m)$ — абсолютно непрерывные монотонные функции, удовлетворяющие условиям

$$\delta_k = \operatorname{vrai\,min}\{|\tau_k'(t)| : t \in I_0\} > 0 \quad (k = 1, \ldots, m),$$

λ_{0i} и λ_{ik} $(i, k = 1, \ldots, n)$ — постоянные, $v_{ik} \in L^2(I_0; R)$, $\mu_{ik} : I_0 \to R$ — $(i, k = 1, \ldots, n)$ функции с ограниченными изменениями, а каждая функция σ_i измерима по второму аргументу, имеет ограниченную вариацию по первому аргументу и

$$\sigma_i^* = \operatorname{vrai\,max}\Big\{\int_a^b |d_s\sigma_i(s,t)| : t \in I_0\Big\} < +\infty.$$

Легко показать, что из следствий 1 и 2 соответственно выткают следующие предложения.

Следствие 3. Пусть существуют $g_0 \in L(I_0; R_+)$ и $g_{ik} \in L(I_0; R_+)$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ такие, что на $I_0 \times R^n$ соблюдаются неравенства

$$(1.34)\qquad |g_i(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq g_0(t) + \sum_{k=1}^{n} g_{ik}(t)\,|x_k| \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$(1.35)\qquad |g_i(t, x_1, \ldots, x_n)|\, \operatorname{sign}\big[(t - t_i)\, x_i(t)\big] \leqq g_0(t) + \sum_{k=1}^{n} g_{ik}(t)\,|x_k|$$

$$(i = m + 1, \ldots, n)$$

и собственные числа матрицы

$$\Big(|\lambda_{ik}| \int_a^b |d\mu_{ik}(s)| + \sigma_i^* \int_a^b g_{ik}(t)\, dt\Big)_{i,k=1}^{n},$$

где $\sigma_{m+1}^* = \ldots = \sigma_n^* = 1$, по модулю меньше единицы. Тогда задача (1.30), (1.31) разрешима.

Следствие 4. Пусть существуют $g_0 \in L(I_0; R_+)$ и $g_{ik} : I_0 \to R_+$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ такие, что на $I_0 \times R^n$ соблюдаются неравенства (1. 34) и (1.35) и

$$g_{ik}^* = \operatorname{vrai}\max\{g_{ik}(t)\, S_{\tau_k}(1) : t \in I_0\} < +\infty \quad (i, k = 1, \ldots, n),$$

где $\tau_k(t) = t$ $(k = m + 1, \ldots, n)$. Пусть, кроме того, собственные числа матрицы

$$\left((b-a)^{1/2} \, \| \lambda_{ik} \|_{L^2(I;R)} + \frac{2(b-a)}{\sqrt{\delta_k}} g_{ik}^*\right)_{i,k=1}^n,$$

где $\delta_k = 1$ $(k = m + 1, \ldots, n)$, по модулю меньше единицы. Тогда задача (1.32), (1.33) разрешима.

Из теоремы 1.1 и леммы 1.1 непосредственно получается

Теорема 1.2. *Пусть существуют положительно однородные непрерывные неубывающие операторы и функционалы* $f_{0i} : C(I_0; R_+^n) \to L(I_0; R_+)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *и* $\varphi_{0i} : C(I_0; R_+^n) \to R_+$ $(i = 1, \ldots, n)$ *такие, что задача* (1.1), (1.2) *имеет только нулевое решение и для любых* $(x_i)_{i=1}^n$ и $(y_i)_{i=1}^n \in C(I_0; R^n)$ *соблюдаются неравенства*

$$[f_i(x_1, \ldots, x_n)(t) - f_i(y_1, \ldots, y_n)(t)] \operatorname{sign}[(t - t_i)(x_i(t) - y_i(t))] \leqq$$

$$\leqq f_{0i}(|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|)(t) \quad \text{при } t \in I_0 \ (i = 1, \ldots, n) \tag{1.36}$$

и

$$|\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) - \varphi_i(y_i, \ldots, y_n)| \leqq \varphi_{0i}(|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n) \ (i = 1, \ldots, n). \tag{1.37}$$

Тогда задача (0.1), (0.2) *имеет одно и только одно решение.*

§ 2. Сингулярный случай

Как и в § 1, в этом параграфе предполагается, что функционалы $\varphi_i : C(I_0; R^n) \to R$ $(i = 1, \ldots, n)$ являются непрерывными.

Теорема 2.1. *Пусть соблюдаются условия* (0.4), *где*

$$I_i = I_0 \setminus \{t_i\} \quad \text{или} \quad I_i = I_0, \quad \text{причем если} \quad I_i \neq I_0, \quad \text{то} \quad \varphi_i = 0. \tag{2.1}$$

Пусть, кроме того, существуют положительное число η, *функция* $h \in L(I_0; R_+)$ *и положительно однородные непрерывные неубывающие операторы* $f_{0i} : C(I_0; R_+^n) \to L(I_0; R_+)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *и функционалы* $\varphi_{0i} : C(I_0; R_+^n) \to R_+$ $(i = 1, \ldots, n)$ *такие, что задача* (1.1), (1.2) *имеет только нулевое решение и для любого* $(x_i)_{i=1}^n \in C(I_0; R^n)$ *соблюдаются неравенства* (1.3) *и* (1.4). *Тогда задача* (0.1), (0,2) *разрешима.*

Доказательство. Пусть

$$f_{km}(x_1, \dots, x_n)(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in \left[t_k - \dfrac{1}{m}, t_k + \dfrac{1}{m}\right], \\ f_k(x_1, \dots, x_n)(t) & \text{при } t \in I_0 \setminus \left[t_k - \dfrac{1}{m}, t_k + \dfrac{1}{m}\right]. \end{cases}$$

Рассмотрим систему

$$\text{(2.2)} \qquad \frac{dx_k(t)}{dt} = f_{km}(x_1, \dots, x_n)(t) \qquad (k = 1, \dots, n).$$

Для каждого $m \in \{1, 2, \dots\}$ операторы $f_{km}: C(I_0; R^n) \to L(I_0; R)$ $(k = 1, \dots, n)$ непрерывны и удовлетворяют условиям (1.3). Поэтому согласно теореме 1.1 задача (2.2), (0.2) имеет решение $(x_{im})_{i=1}^n$.

Легко видеть что $(x_{im})_{i=1}^n$ удовлетворяет неравенствам (1.5) и (1.6). Поэтому из леммы 1.1 вытекает, что

$$\text{(2.3)} \qquad \sum_{k=1}^{n} |x_{km}(t)| \leqq \varrho_0 \qquad \text{при} \quad t \in I_0,$$

где ϱ_0 — не зависящее от m положительное число. Таким образом, последовательность $(x_{im})_{i=1}^n$ равномерно ограничена.

Согласно (0.4) и (2.3)

$$\text{(2.4)} \qquad |x'_{km}(t)| \leqq h_k(t) \quad \text{при} \quad t \in I_0 \quad (m = 1, 2, \dots),$$

где $h_k \in L_{loc}(I_k; R_+)$ — не зависящие от m функции. Следовательно, если $I_k = I_0$, то последовательность $(x_{km})_{m=1}^\infty$ является и равностепенно непрерывной.

Предположим теперь, что $I_k = I_0 \setminus \{t_k\}$. Тогда ввиду (2.1)

$$x_{km}(t_k) = 0.$$

С другой стороны, согласно (1.3) и (2.3)

$$|x_{km}(t)|' \operatorname{sign}(t - t_k) \leqq \tilde{h}(t) \quad \text{при} \quad t \in I_0,$$

где

$$\tilde{h}(t) = h(t) + \sum_{k=1}^{n} f_{0k}(\varrho_0, \dots, \varrho_0)(t) \qquad \text{и } \tilde{h} \in L(I_0; R_+).$$

Поэтому

$$\text{(2.5)} \qquad |x_{km}(t)| \leqq \left| \int_{t_k}^{t} \tilde{h}(\tau)\, d\tau \right| \qquad \text{при } t \in I_0 \ (m = 1, 2, \dots).$$

Ввиду того, что $h_k \in L_{loc}(I_k; R_+)$ из (2.4) и (2.5) вытекает равностепенная непрерывность $(x_{km})_{m=1}^\infty$.

Таким образом, последовательности $(x_{km})_{m=1}^\infty$ $(k = 1, \dots, n)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Согласно лемме Арцела—Асколи, не нарушая общности, можем считать, что $(v_{im})_{m=1}^{\infty}$ равномерно сходятся I_0. Очевидно, что

$$(x_k)_{k=1}^{n} = \lim_{m\to\infty} (x_{km})_{k=1}^{n}$$

является решением задачи (0.1), (0.2). Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Пусть соблюдаются условия* (0.4), *где* $I_i = I_0 \setminus \{t_i\}$ *или* $I_i = I_0$, *причем если* $I_i \neq I_0$, *то* $\varphi_i = 0$. *Пусть, кроме того,* $f_{0i}(0, \ldots, 0) \in L(I_0; R)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *и существуют положительно однородные непрерывные неубывающие операторы* $f_{0i} : C(I_0; R_+^n) \to L(I_0; R_+)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *и функционалы* $\varphi_{0i} : C(I_0; R_+^n) \to R_+$ $(i = 1, \ldots, n)$ *такие, что задача* (1.1), (1.2) *имеет только нулевое решение и для любых* $(x_i)_{i=1}^n$ *и* $(y_i)_{i=1}^n \in C(I_0; R^n)$ *соблюдаются неравенства* (1.36) *и* (1.37). *Тогда задача* (0.1), (0.2) *имеет одно и только одно решение.*

ЛИТЕРАТУРА

[1.] Азбелев Н. В., Рахматуллина Л. Ф.: *Функционально-дифференциальные уравнения* Дифф. уравнения, (1978), 14, 771—797.

[2.] Азбелев Н. В., Максимов В. П.: *Априорные оценки решений задачи Коши и разрешимость краевых задач для уравнений с запаздывающим аргументом*, Дифф. уравнения, (1979), 15, 1731—1747.

[3.] Lasota A., Olech C.: *An optimal solution of Nicoletti's boundary value problem*, Ann. Polon. Math., (1966), 18, 131—139.

[4.] Кигурадзе И. Т.: *О сингулярной задаче Коши—Николетти*, ДАН СССР, (1969), 186, 769—772.

[5.] Какабадзе М. А.: *Об одной задаче с интегральными условиями для системы обыкновенных дифференциальных уравнений*, Mat. Časopis, (1974), 24, 225—238.

[6.] Kiguradze I. T.: *On a singular problem of Cauchy—Nicoletti*, Ann. di matem. pura ed appl., (1975), 104, 151—175.

[7.] Кигурадзе И. Т., Пужа Б.: *О некоторых краевых задачах для систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, Дифф. уравнения, (1976), 12, 2139—2148.

[8.] Пужа Б.: *Об одной сингулярной краевой задаче для систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, Arch. Math. (Brno), (1977), 13, 207—226.

[9.] Пужа Б.: *О разрешимости некоторых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, Scripta Fac. Sci. Nat. Purk. Brun., (1980), 10, 411—426.

[10.] Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.: *Неравенства*, Москва, ИЛ, (1948).

Ш. Гелашвили
СССР, 380043, *Тбилиси*,
Университетская, 2
Тбилисский гос. университет,
Механико-математический факультет,
Кафедра вычислительной математики