Norbert Brunner

Realisierung und Auswahlaxiom

Archivum Mathematicum, Vol. 20 (1984), No. 1, 39--42

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/107184

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XX: 39–42, 1984

REALISIERUNG UND AUSWAHLAXIOM

NORBERT BRUNNER

(Eingegangen am 20. März 1982)

Abstract. Aczel's realisation principle R, that on every infinite set there exists a Hausdorff topology with an infinite set of nonisolated points, is compared with weak variants of the axiom of choice.

Wir untersuchen in dieser Note das folgende Realisierungsaxiom von Aczel.

R: Auf jeder unendlichen Menge gibt es eine T_2-Topologie mit unendlich vielen nicht isolierten Punkten.

In der Algebra haben Hajnal und Kertész gezeigt, daß das folgende Analogon von R zum Auswahlaxiom äquivalent ist: Auf jeder unendlichen Menge gibt es eine Gruppe (vgl. [12] für weitere Informationen). Realisierungsprobleme für topologische Gruppen führten hingegen zu Resultaten, die von der Kontinuumshypothese abhängen. Somit stellten sich automatisch folgende Fragen über R: Folgt R aus dem Auswahlaxiom AC und ist R dazu äquivalent? Wie Aczel bemerkt hat, gibt es in ZF^0 auf jeder unendlichen Menge der Gestalt $X \times \omega$ eine T_2-Topologie ohne isolierte Punkte ($\omega = \{0, 1, \ldots\}$, ZF^0 ist das Zermelo – Fraenkel System ohne AC und Fundierungsaxiom, $ZF = ZF^0 +$ Fundierung); insbesonders gilt das für die wohlordenbaren Mengen. Weiters sieht man leicht, daß eine Menge R erfüllt, wenn sie eine Teilmenge mit R hat. Somit folgt R aus dem folgenden Axiom.

W: Jede unendliche Menge hat eine unendliche abzählbare Teilmenge.

Da W aus AC^ω folgt, aber nicht dazu äquivalent ist (vgl. [6, 9], AC^ω das AC für abzählbare Familien), beantwortet das die obigen Fragen. Von einigen Abschwächungen von R hat Aczel gezeigt, daß sie in ZF^0 gelten, und das führte ihn in [1] zum Problem, ob R von AC abhängt. Wir beantworten es mit folgendem Satz, der auch zum Teil die Position von R in der Hierarchie der Auswahlprinzipien bestimmt. $P(\mathbf{R})$ ist die Potenzmenge der reellen Zahlen. Eine Dedekind-Menge ist eine Teilmenge von $\mathbf{R}$, die ein Gegenbeispiel zu W ist; gibt es Dedekind-Mengen, so ist $\mathbf{R}$ nicht wohlordenbar.

Satz

(1) Ist $P(\mathbf{R})$ wohlordenbar und gilt R, so gilt in ZF^0 auch K:

K: Jede Folge von zwei-elementigen Mengen hat eine Teilfolge mit einer Auswahlfunktion.

(2) Aus der Aussage „$P(R)$ ist wohlordenbar" (kurz: PRW) folgt nicht K, $PRW + K$ impliziert nicht R, aus PRW, K und R folgt nicht W und $K + R$ impliziert nicht, daß es keine Dedekind-Mengen gibt. Diese Unabhängigkeitssätze gelten in ZF.

Beweis: Das Axiom K wird durch eine Arbeit von Kleinberg [10] über den Satz von Ramsey motiviert, der ebenfalls K impliziert. In der Notation von [3] ist $K = PAC_2^\omega$. Offen ist, ob $PRW + PAC_2^\omega$, das AC für Folgen von zwei-elementigen Mengen implizieren. Es reicht dazu aus, $PAC_{fin}^\omega (= AC_{fin}^\omega$ nach [3]) zu beweisen. Der Beweis von (1) liefert allerdings nur: Ist $(F_n)_{n\in\omega}$ eine unendliche Folge endlicher Mengen mit mindestens zwei Elementen, so gibt es eine unendliche Teilmenge mit einer Selektionsfunktion g ([14]: $g(x) \subseteq x$, $g(x) \neq \emptyset$ und $g(x) \neq x$). Da nur eine Teilmenge mit solch einer Folge gesucht wird, kann man „ω" durch irgendeine wohlordenbare Menge „wo" ersetzen. Wir erhalten insbesonders PAC_n^{wo} für alle $n \in \omega$ (Induktion nach n).

(1) Sei $(F_n)_{n\in\omega}$ eine Folge disjunkter endlicher Mengen; $X = \bigcup_{n\in\omega} F_n$. Sei indirekt $(F_n)_{n\in\omega}$ ein Gegenbeispiel zum oben erwähnten partiellen Selektionsprinzip; d. h.: Ist $f: \omega \to P(X)\setminus\{\emptyset\}$ eine Funktion mit $f(n) \subseteq F_n$, so ist $f(n) \neq F_n$ nur für endlich viele $n \in \omega$ möglich. Für $M \subseteq X$ ist $M' = (M \times \{0\}) \cup (\{n \in \omega: M \cap F_n \neq \emptyset\} \times \{1\})$. Nach R gibt es auf X eine T_2 Topologie $\underline{X}$ mit einer unendlichen Menge P von nicht-isolierten Punkten. Als Subbasis für eine Topologie $\underline{X}'$ auf $X' = X \times \{0\} \cup \omega \times \{1\}$ wählen wir $\{\{(n, 1)\}, 0'\setminus\{(n, 1)\} : n \in \omega, 0 \in \underline{X}\}$. Ist $p \in X'\setminus(P \times \{0\})$, so ist p isoliert, während jede Umgebung eines Punktes $p \in P \times \{0\}$ unendlich viele Punkte aus $\omega \times \{1\}$ enthält. $\underline{X}'$ ist eine Modifikation der Alexandroff-Verdoppelung (vgl. [5]). Wir zeigen, daß $\underline{X}'$ T_2 ist. Wie wohl Soundararajan [13] als erster publiziert hat, ist ein separabler T_2-Raum als Menge in $P(R)$ einbettbar. Daraus folgt mit PRW, daß $P \times \{0\} \subseteq (\omega \times \{1\})^-$ wohlordenbar ist. Als unendliche, wohlordenbare Teilmenge von $\bigcup_{n\in\omega} F_n$ induziert P jedoch eine Auswahlmenge für unendlich viele F_n, ein Widerspruch. Zum Nachweis von T_2 genügt es, für $x_0 \neq x_1$ in P disjunkte Umgebungen von $(x_i, 0)$ zu finden. Es gelte $x_i \in F_{n(i)}$ und $0_i \in \underline{X}$ seien disjunkte Umgebungen von x_i. Zur Abkürzung setzen wir $A_i = 0_i' \cap (\omega \times \{1\})$. Wenn $A = A_1 \cap A_2$ unendlich ist, definiert $f(n) = 0_0 \cap F_n$ für $(n, 1) \in A$ eine partielle Selektionsfunktion von $(F_n)_{n\in\omega}$, da $0_i \cap F_n \neq \emptyset$ für $i \in 2$ und $(n, 1) \in A$. Dies widerspricht unserer Annahme über $(F_n)_{n\in\omega}$ und daher ist A endlich. $0_i'\setminus A$ sind die gesuchten disjunkten offenen Umgebungen von x_i.

(2) Zum Beweis der Unabhängigkeitssätze verwenden wir Permutationsmodelle von ZF^0 und wenden darauf Transfer an, um Modelle von ZF zu erhalten.

M_1 sei das Fraenkel Modell. Dort ist $U = \bigcup_{n\in\omega} P_n$, die Menge der Urelemente, eine Vereinigung einer Folge $(P_n)_{n\in\omega}$ von disjunkten zwei-elementigen Mengen. Die Gruppe G der Permutationen besteht aus den Bijektionen $g: U \to U$, für die für alle $n \in \omega$ $g'P_n = P_n$ ist und I ist das Normalideal der endlichen Teilmengen von U. Wie man in [6] nachlesen kann, wird durch diese Informationen ein ZF^0-Modell charakterisiert (vgl. auch [9]), wo die Potenzmenge von wohlordenbaren Mengen wohlordenbar ist. Insbesonders gilt PRW. Da diese Aussage beschränkt ist, ist sie nach Jech – Sochor [8] auf ein ZF-Modell transferierbar. Ist M eine Teilmenge von U und $e \in I$ ein Träger von M (symbolisch: $M \in \Delta(e)$), wobei $e \subseteq \bigcup_{i \in n} P_i$, so ist für $i > n$, $P_i \subseteq M$ oder $P_i \cap M = \emptyset$, wie aus einem Permutations-Argument folgt. Mithin ist $(P_n)_{n \in \omega}$ ein Gegenbeispiel zu K und als beschränkte Aussage ist „nicht K" transferierbar. Somit folgt K nicht aus PRW.

M_2 ist das Fraenkel – Halpern Modell, wo U eine amorphe Menge von Urelementen ist. G ist die Gruppe aller Permutationen und $I = [U]^{<\omega}$. Wie Blass [2] gezeigt hat gilt in diesem Modell der Satz von Ramsey, aus dem PAC_{fin} folgt ([2], [10]) und daher K. Wie [7] gezeigt haben, gilt sogar das Auswahlaxiom für lineargeordnete Familien lineargeordneter Mengen in diesem Modell. Wir zeigen, daß K injektiv beschränkt ist und daher nach Pincus [11] transferierbar. K ist nämlich zur folgenden Aussage über Dedekind-endliche Mengen äquivalent: Ist X D-finit, so auch $[X]^2$, das System der zwei-elementigen Teilmengen. Ist nämlich $A \subseteq [X]^2$ abzählbar und unendlich, so induziert K eine abzählbare, unendliche Teilmenge von $\cup A \subseteq X$, und ist umgekehrt $(F_n)_{n \in \omega}$ ein Gegenbeispiel zu K, so ist $X = \bigcup_{n \in \omega} F_n$ D-finit, aber $[X]^2$ Dedekind-unendlich. PRW gilt in M_2 und wird ebenfalls transferiert. R ist jedoch ungültig. Wie in [4] bemerkt wurde, existieren auf einer unendlichen amorphen Menge U nur folgende T_2 Topologien: die diskrete Topologie und die Einpunkte-Kompaktifizierung der diskreten Topologie einer Teilmenge von U, die beide nicht R sind. Mit Transfer folgt: PRW und K impliziert nicht R.

M_3 ist das Mostowski Modell. Dort bilden die Urelemente U eine dicht, endpunktfrei und linear geordnete Menge, die Permutationen sind die monoton steigenden Abbildungen und $I = [U]^{<\omega}$. Wie in [4] gezeigt wurde, ist eine Menge in diesem Modell entweder wohlordenbar oder sie enthält eine Kopie eines Teilintervalls von U, weswegen sie R ist (Ordnungs-Topologie). Wie oben folgt: Im transferierten Modell gilt R, PRW, mit dem Teil (1) des Satzes daher K, es gilt aber nicht W, da U ein Gegenbeispiel liefert.

Als nächstes betrachten wir das Cohen – Halpern – Levy Modell M_4 von ZF, das aus einem ZF-Modell M hervorgeht als $M = M(a_0, \ldots, A)$, wobei a_i Cohen-generische reelle Zahlen sind und $A = \{a_i : i \in \omega\}$ eine D-finite, unendliche Teilmenge von R ist (vgl. [6]). In diesem Modell gilt bekanntlich BPI, das Primidealtheorem für Boole'sche Algebren, woraus K folgt (via AC^{ω}_{fin}). Zum Nachweis von R notieren wir, daß jede unendliche Menge entweder wohlordenbar ist oder eine unendliche Teilmenge von A enthält ([4]) und im letzteren Fall wegen des Kontinuitätslemmas [6] sogar ein Teilintervall von A, auf dem die Ordnungstopologie R

ist (A ist dicht geordnet). Somit ist auch (2) bewiesen. Wir notieren noch, daß es in M_4 auf jeder unendlichen Menge eine T_2-Topologie ohne isolierte Punkte gibt.

q. e. d.

Diese Untersuchungen legen folgende Definition nahe: X ist Aczel-endlich, wenn für jede T_2-Topologie auf X die Menge der isolierten Punkte cofinit ist. Amorphe Mengen sind Aczel-endlich und diese ihrerseits Dedekind-endlich. Interessante Probleme tauchen auf, wenn man Fragen analog zu [15] stellt.

Der Verfasser möchte dem Referee für viele nützliche Bemerkungen danken.

LITERATUR

[1] J. Aczel: *Realisation of Topologies*, Publ. Math. Debrecen 3 (1963), 11–15.
[2] A. Blass: *Ramsey's Theorem*, J. Symb. Logic 42 (1977), 387–390.
[3] N. Brunner: *Sequential Compactness*, Notre Dame J. F. Logic 24 (1983), 89–92.
[4] N. Brunner: *Dedekind-Endlichkeit*, Monatshefte Math. 94 (1982), 9–31.
[5] R. Engelking: *General Topology*, Warszawa 1977.
[6] U. Felgner: *Models of ZF*, Heidelberg 1971.
[7] P. E. Howard, J. E. Rubin: *AC and linear order*, Fundamenta Math. 97 (1977), 111–122.
[8] T. Jech, A. Sochor: *Applications of the Θ-model*, Bull. Acad. Polen. Math. 14 (1966), 351–355.
[9] T. Jech: *The axiom of choice*, New York 1973.
[10] E. M. Kleinberg: *Ramsey's theorem*, J. Symb. Logic 34 (1969), 205–206.
[11] D. F. Pincus: *Consistencies by FM-methods*, J. Symb. Logic 37 (1972), 721–743.
[12] H. Rubin, J. E. Rubin: *Equivalents of the axiom of choice* (new edition, to appear).
[13] T. Soundarajan: *Weakly T_2 spaces*, Proc. Kanpur Top. Conf. (1968, ed. Novak), 301–307.
[14] K. Wagner, W. Kinna: *Abschwächung des AC*, Fund. Math. 42 (1955), 75–82.
[15] J. K. Truss: *Dedekind-finite cardinals*, Fund. Math. 84 (1974), 187–208.

Dr. Norbert Brunner
Purdue University
Dept. of Math.
West Lafayete Indiana 47907, U.S.A.