Sylva Šantavá

Über Isochrone durch zwei lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung geregelte Schwingungen von Materiellen Punkten

Archivum Mathematicum, Vol. 18 (1982), No. 1, 49--56

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/107122`

ARCH. MATH. 1. SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XVIII: 49—56, 1982

ÜBER ISOCHRONE DURCH ZWEI LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG GEREGELTE SCHWINGUNGEN VON MATERIELLEN PUNKTEN

SYLVA ŠANTAVÁ, Brno
(Received October 6, 1980)

1. EINLEITUNG

In der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen im reellen Gebiet gehören die linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung zu den am häufigsten studierten Objekten. Das Interesse für dieses Gebiet hängt zweifellos damit zusammen, dass Erfolge in Lösungen von physikalischen und technischen Problemen oft tiefliegende Kenntnisse von Eigenschaften jener Differentialgleichungen beanspruchen. So wird z. B. in der Literatur angeführt, dass allein die Hill'sche Gleichung Hunderte von Anwendungen in der Mechanik, Astronomie und in verschiedenen Gebieten der technischen Wissenschaften zulässt. Ferner ist das Interesse an den linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung in der inneren Schönheit ihrer Theorie zu suchen. Es ist dies eine an Begriffen, Methoden und Resultaten reiche Theorie, die grösstenteils anschauliche Deutungen zulässt und mit anderen mathematischen Gebieten, insbesondere der Differentialgeometrie, Algebra und der Funktionalanalysis eng zusammenhängt. Ausserdem stellt sie die Grundlagen zur Erforschung von globalen Eigenschaften der linearen Differentialgleichungen höheren Ordnungen dar.

Meine Mitteilung betrifft ein in dem von Prof. O. Borůvka in Brno geführten Seminar über Differentialgleichungen gesteelltes Problem.

2. EINFÜHRENDES ZU DER FRAGESTELLUNG

Wir wollen uns mit geradlinigen durch zwei lineare oszillatorische Differentialgleichungen 2. Ordnung vom Jacobischen Typus

(1) $$y'' = Q_1(t)\,y, \qquad y'' = Q_2(t)\,y,$$

geregelten Schwingungen von materiellen Punkten befassen. Wir setzen die Stetigkeit der Funktionen Q_1, Q_2 in dem Intervall $j = (-\infty, \infty)$ voraus.

Im einfachsten Fall geht es um eine geradlinige durch zwei lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten negativen Koeffizienten $-k_1$, $-k_2 (k_1, k_2 > 0)$

$$(2) \qquad y'' = -k_1 y, \qquad y'' = -k_2 y$$

geregelte Bewegung. Die Gleichungen (2) wollen wir mit $(-k_i)$ $(i = 1, 2)$ bezeichnen.

Die durch die Gleichung $(-k_i)$ geregelte Bewegung eines materiellen Punktes P_i ist eine einfache harmonische Bewegung. In diesem Fall schwingt der Punkt P_i um eine Stelle 0 herum und zwar nach der Formel

$$(3) \qquad y_i(t) = a_i \sin \sqrt{k_i}(t - x);$$

x ist ein (fest gewählter) Augenblick, in dem P_i durch 0 hindurchgeht, a_i die Amplitude der Schwingung und $y_i(t)$ der (positiv oder negativ zunehmende) Abstand des Punktes P_i von 0 zur Zeit t, also die Elongation von P_i zur Zeit t.

Die zwischen a_i und der Geschwindigkeit von P_i zur Zeit x bestehende Beziehung ist

$$(4) \qquad y'(x) = a_i \sqrt{k_i},$$

Es seien A_i, $-A_i$ die extremen Lagen von P_i, so dass die Elongation den Wert a_i bezw. $-a_i$ hat. Die erwähnten Lagen erreicht P_i zu den Zeiten $t_\lambda = x + \lambda \dfrac{\pi}{2\sqrt{k_i}}$, wobei λ $(= \pm 1, \pm 3, \ldots)$ eine ungerade Zahl ist. Die Bezeichnung wollen wir so wählen, dass A_i wird zur Zeit t_1 und $-A_i$ zur Zeit t_{-1} bezw. t_3 erreicht.

Die zur Zeit x beginnende Schwingung von P_i ist der Weg $\overline{0A_i} + \overline{A_i 0}$ und dauert von x bis $x + \dfrac{\pi}{\sqrt{k_i}}$; die folgende zur Zeit $x + \dfrac{\pi}{\sqrt{k_i}}$ beginnende Schwingung ist der Weg $\overline{0 - A_i} + \overline{-A_i 0}$ und dauert bis $x + \dfrac{2\pi}{\sqrt{k_i}}$. Die volle zur Zeit x beginnende Schwingung von P_i setzt sich aus den zwei erwähnten Schwingungen zusammen und dauert von x bis $x + \dfrac{2\pi}{\sqrt{k_i}}$, also im ganzen $\dfrac{2\pi}{\sqrt{k_i}}$ Zeiteinheiten.

Die Bewegung von P_i ist mit $\dfrac{2\pi}{\sqrt{k_i}}$ periodisch; folglich ist die Lage von P_i zu Zeiten, die sich um ganzzahlige Vielfache der Periode unterscheiden, stets dieselbe.

Die oben angeführten Sachen sind klassisch und allgemein bekannt. Ein neues Element im Umkreis dieser Betrachtung stellt die Frage dar, was geschiet, wenn die geradlinige Schwingung eines materiellen Punktes *P durch beide Gleichungen* (2) geregelt wird; und zwar so, dass während einer Schwingung die eine und während der folgenden Schwingung die andere Differentialgleichung (2) die Regelung der Bewegung übernimmt. Eine solche Bewegung wollen wir ***kombiniert*** nennen und mit (1,2) oder (2,1) bezeichnen, jenachdem ob die zur Zeit x beginnende Schwingung durch die Gleichung $(-k_1)$ und folglich die zur Zeit $x + \frac{2\pi}{\sqrt{k_i}}$ beginnende Schwingung durch die Gleichung $(-k_2)$ geregelt wird, oder umgekehrt.

Wir wollen also annehmen, dass der Punkt P um seine Anfangslage 0 in der kombinierten Bewegung (1,2) herumschwingt.

Dann wird die Bewegung von P in dem Zeitintervall $\left[x, x + \frac{\pi}{\sqrt{k_i}}\right]$ durch die Gleichung $(-k_1)$ geregelt. Die Bewegung von P erfolgt nach der Formel (3), in der wir $i = 1$ setzen.

Zur Zeit $x + \frac{\pi}{\sqrt{k_1}}$, in der die erste Schwingung endet, haben wir

$$y_1\left(x + \frac{\pi}{\sqrt{k_1}}\right) = 0; \qquad y_1'\left(x + \frac{\pi}{\sqrt{k_1}}\right) = -a_1\sqrt{k_1}. \tag{5}$$

In diesem Augenblick fängt die durch die Gleichung $(-k_2)$ geregelte zweite Schwingung an. Die Anfangswerte der Elongation und der Geschwindigkeit von P sind (5). Die Bewegung in der zweiten Schwingung erfolgt nach der Formel (3), in der man $i = 2$ und $x + \frac{\pi}{\sqrt{k_1}}$ anstatt von x schreibt:

$$y_2'(t) = -a_1\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\sin\sqrt{k_2}\left(t - x - \frac{\pi}{\sqrt{k_1}}\right); \qquad a_2\sqrt{k_2} = -a_1\sqrt{k_1},$$

und dauert von $x + \frac{\pi}{\sqrt{k_1}}$ bis $x + \frac{\pi}{\sqrt{k_1}} + \frac{\pi}{\sqrt{k_2}}$.

Man sieht, dass die Dauer der Schwingung des Punktes P in der kombinierten Bewegung $\pi\left(\frac{1}{\sqrt{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_2}}\right)$ Zeiteinheiten beträgt und zwar unabhängig von der Wahl von x.

Tauscht man die Rollen von $(-k_1)$, $(-k_2)$ um, so sieht man, dass die Dauer der vollen Schwingung des Punktes P in der kombinierten Bewegung (2, 1) ebenfalls $\pi\left(\frac{1}{\sqrt{k_2}} + \frac{1}{\sqrt{k_1}}\right)$ beträgt, und von der Wahl x nicht abhängt.

Das Resultat lautet: Volle Schwingungen des Punktes P in der kombinierten Bewegung (1, 2) und (2, 1) haben bei jeder Wahl des Beginns der Bewegung dieselbe Dauer. Anders ausgedrückt: Die kombinierten Bewegungen (1, 2) und (2, 1) sind isochron.

Nun sind wir in der Lage unser Problem, dessen Lösung wir hier geben wollen, zu formulieren. Es geht um eine Erweiterung der obigen Betrachtung auf den Fall, in dem die kombinierten durch zwei allgemeine lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung (1) geregelten Bewegungen eines materiellen Punktes untersucht werden.

3. FORMULATION DES PROBLEMS

Die Gleichung (1) wollen wir mit (Q_i) $(i = 1, 2)$ bezeichnen. Zunächst sei daran erinnert, dass das Integral y_i von (Q_i) mit den Anfangswerten

$$y_i(x) = 0, \qquad y_i'(x) = c_i$$

durch die Formel

$$y_i(t) = \frac{c_i}{\sqrt{\alpha'(x)}} \frac{\sin[\alpha(t) - \alpha(x)]}{\sqrt{\alpha'(t)}} \qquad (t \in j), \tag{6}$$

gegeben ist. Dabei bedeutet $\alpha(t)$ eine geliebige z. B. wachsende Phase von (Q_i).

Nach unserer Voraussetzung ist die Differentialgleichung (Q_i) oszillatorisch. Folglich ist α nach beiden Seiten unbeschrängt und der Graph von y_i ähnelt einer misslungenen Sinusoide.

Dieser Graph unterscheidet sich von einer Sinusoide insbesondere dadurch, dass es zwischen zwei benachbarten Schnittpunkten mit der t-Achse lokale Extreme geben kann und dass sein Verlauf im Allgemeinen nicht periodisch ist.

Ferner sei der Begriff von Zentraldispersionen (1. Art) der Differentialgleichung (Q_i) von O. Borůvka angeführt.

Die ν-te Zentraldispersion der Differentialgleichung (Q_i) $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ist so definiert: Es sei $t \in j$ und z_i ein an der Stelle t verschwindendes Integral von (Q_i). Sodann ist $\varphi_i^{(\nu)}(t)$ die $|\nu|$-te links oder rechts von t liegende Nullstelle von z_i jenachdem ob $\nu < 0$ oder $\nu > 0$ ist; für $\nu = 0$ setzen wir $\varphi_i^{(0)}(t) = t$. Insbesondere wird die Funktion $\varphi_i^{(1)}$ die Fundamentaldispersion von (Q_i) genannt und kürzer mit φ_i bezeichnet. Die Funktion $\varphi_i^{(\nu)}(\nu \neq 0)$ entsteht durch $|\nu|$-fache Iteration von φ_i oder $\varphi_i^{(-1)}$ jenachdem ob $\nu > 0$ oder $\nu < 0$ ist;

$$\varphi_i^{(\nu)}(t) = \underbrace{\varphi_i\varphi_i \ldots \varphi_i(t)}_{\nu} \qquad \text{für } \nu > 0,$$

$$\varphi_i^{(\nu)}(t) = \underbrace{\varphi_i^{(-1)}\varphi_i^{(-1)} \ldots \varphi_i^{(-1)}(t)}_{|\nu|} \qquad \text{für } \nu < 0.$$

Man sieht, dass die aus allen Zentraldispersionen von (Q_i) bestehende Menge eine zyklische Gruppe mit dem Generator φ_i darstellt; diese Gruppe heisst das Zentrum von (Q_i). Die Zentraldispersionen bilden natürlich eine unendliche wachsende Folge von Funktionen:

$$\ldots \varphi_i^{(-1)}(t) < \varphi_i^{(0)}(t) < \varphi_i^{(1)}(t) < \varphi_i^{(2)}(t) \ldots \qquad (t \in j).$$

Nun wollen wir die von den Differentialgleichungen (Q_1), (Q_2) geregelte kombinierte Bewegung (1, 2) oder (2, 1) eines materiellen Punktes P verfolgen. Wir nehmen an, dass sich der Punkt P zur Zeit x in seiner Anfangslage befindet.

In dem fall (1, 2) dauert die erste Schwingung von P vom Augenblick x bis $\varphi_1(x_1)$, die zweite von $\varphi_1(x)$ bis $\varphi_2\varphi_1(x)$; folglich dauert die erste volle Schwingung von x bis $\varphi_2\varphi_1(x)$. Die zweite volle Schwingung des Punktes P dauert von $\varphi_2\varphi_1(x)$ bis $\varphi_2\varphi_1\varphi_2\varphi_1(x)$, usw.

Im Fall (2, 1) dauert die erste Schwingung von P vom Augenblick x bis $\varphi_2(x)$, die zweite von $\varphi_2(x)$ bis $\varphi_1\varphi_2(x)$; folglich dauert die erste volle Schwingung von x bis $\varphi_1\varphi_2(x)$. Die zweite volle Schwingung des Punktes P von $\varphi_1\varphi_2(x)$ bis $\varphi_1\varphi_2\varphi_1\varphi_2(x)$, usw.

Man sieht, dass die zur Zeit x beginnenden durch die Differentialgleichungen (Q_1), (Q_2) geregelten kombinierten Bewegungen (1, 2) und (2, 1) sind genau dann isochron, wenn

$$\varphi_2\varphi_1(x) = \varphi_1\varphi_2(x) \tag{5}$$

ist.

Das Resultat unserer Betrachtungen ist folgendes:

Geradlinige durch die Differentialgleichungen (Q_1), (Q_2) geregelte kombinierte Bewegungen eines materiellen Punktes sind bei jeder Wahl des Beginns beider Bewegungen dann und nur dann isochron, wenn die Fundamentaldispersionen der Differentialgleichungen (Q_1), (Q_2) miteinander vertauschbar sind.

Es sei bemerkt, dass diese Bedingung mit der Vertaschbarkeit der Zentren der Differentialgleichungen (Q_1), (Q_2) äquivalent ist.

Unser Problem lautet:

Es sind alle Paare von Differentialgleichungen (Q_1), (Q_2), deren Fundamentaldispersionen miteinander vertauschbar sind, zu bestimmen und ihre Eigenschaften sind zu beschreiben.

4. DIE LÖSUNG

Zur Lösung unseres Problems benötigen wir einige Kenntnisse aus der Dispersionstheorie der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Es handelt sich um oszillatorische Differentialgleichungen (Q) im Intervall $j = (-\infty, \infty)$.

Unter einer Phasenfunktion versteht man eine im Intervall j definierte Funktion α mit den folgenden Eigenschaften: α is von beiden Seiten unbeschränkt, gehört der Klasse C^3 an und ihre erste Ableitung ist stets von Null verschieden. Z. B. sind die Phasen und Zentraldispersionen jeder Differentialgleichung (Q) Phasenfunktionen. Es gilt: Jede Phasenfunktion ist eine Phase einer Differentialgleichung (Q). Ferner ist jede wachsende Phasenfunktion mit der Eigenschaft $\varphi(t) > t$ $(t \in j)$ die Fundamentaldispersion einer Differentialgleichung (Q).

Für jede Phase α und die Fundamentaldispersion φ jeder Differentialgleichung (Q) besteht die sogenannte Abelsche Relation:

$$\alpha\varphi(t) = \alpha(t) + \pi \operatorname{sgn} \alpha'$$

Aus ihr folgt für jede Phase α von (Q) $(\alpha' > 0)$ und bei der Bezeichnung $c(t) = t + \pi$:

(8) $$\alpha\varphi(t) = c\alpha(t), \qquad \varphi(t) = \alpha^{-1}c\alpha(t) \qquad (t \in j);$$

α^{-1} bezeichnet natürlich die zu α inverse Funktion.

Eine Phasenfunktion h heisst elementar, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt:

$$h(t + \pi) = h(t) + \pi \operatorname{sgn} h' \qquad (t \in j).$$

Man sieht, dass jede wachsende elementare Funktion h $(h' > 0)$ mit der Funktion c vertauschbar ist:

(9) $$hc(t) = ch(t) \qquad (t \in j).$$

Die Lösung unseres Problems gibt nun der folgende Satz: *Es seien* (Q_1), (Q_2) *beliebige Differentialgleichungen und* α_1, α_2 *ihre wachsende Phasen. Die Fundamentaldispersionen von* (Q_1), (Q_2) *sind genau dann miteinander vertauschbat, wenn die Fundamentaldispersion der Differentialgleichung* (Q) *mit der Phase* $A = \alpha_1\alpha_2^{-1}$ *elementer ist.*

Beweis. Es sei φ_i die Fundamentaldispersion von (Q_i) $(i = 1, 2)$ und Φ die der Differentialgleichung (Q).

Nach (8) haben wir für $t \in j$ (im Folgenden wird zur Vereinfachung der Schreibweise das Zeichen (t) oft unterlassen)

(10) $$\varphi_1 = \alpha_1^{-1}c\alpha_1, \qquad \varphi_2 = \alpha_2^{-1}c\alpha_2$$

und ferner

(11) $$\Phi = A^{-1}cA = \alpha_2\alpha_1^{-1}c\alpha_1\alpha_2^{-1}.$$

a) Es sei $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$.

Nach (10) und (11) haben wir

$$\underbrace{\alpha_1^{-1}c\alpha_1\alpha_2^{-1}}_{\alpha_2^{-1}\Phi}c\alpha_2 = \alpha_2^{-1}c\underbrace{\alpha_2\alpha_1^{-1}c\alpha_1}_{\alpha_2\Phi}$$

oder

$$\alpha_2^{-1}\Phi c\alpha_2 = \alpha_2^{-1}c\Phi\alpha_2$$

und daraus folgt

(12) $$\Phi c(t) = c\Phi(t).$$

Man sieht, dass die Fundamentaldispersion Φ von (Q) elementar ist.

b) Es sei $\Phi c = c\Phi$.

Nach (11) und (12) haben wir

$$\underbrace{\alpha_2\alpha_1^{-1}}_{\varphi_1}\underbrace{c\alpha_1\alpha_2^{-1}}_{\varphi_2\alpha_2^{-1}}c = c\underbrace{\alpha_2\alpha_1^{-1}}_{\alpha_2\varphi_2}\underbrace{c\alpha_1\alpha_2^{-1}}_{\varphi_1}$$

oder

$$\alpha_2\varphi_1\varphi_2\alpha_2^{-1} = \alpha_2\varphi_2\varphi_1\alpha_2^{-1}$$

und folglich auch

$$\varphi_1\varphi_2(t) = \varphi_2\varphi_1(t).$$

Man sieht, dass die Fundamentaldispersionen von (Q_1), (Q_2) miteinender vertauschbar sind.

5. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Der obige Satz ist der Ausgangspunkt zu Betrachtungen über Eigenschaften von Paaren oszillatorischen Differentialgleichungen deren Fundamentaldispersionen miteinander vertauschbar sind. Wir wollen uns hier in dieser Hinsicht auf einige Bemerkungen beschränken.

Zwischen den Phasen α_1, α_2, A besteht die Beziehung $\alpha_1(t) = A\alpha_2(t)$ und aus ihr folgt

(13) $$Q_1(t) = Q_2(t) + [1 + Q(\alpha_2(t))]\, \alpha'^2(t) \qquad (t \in j).$$

Da die Fundamentaldispersion Φ von (Q) elementar ist, so ist (Q) in der Klasse der Differentialgleichungen mit elementaren Fundamentaldispersionen enthalten (Klasse $\mathscr{A}$). E. Barvínek hat alle Differentialgleichungen (Q) mit vorgegebener Fundamentaldispersion Φ konstruirt ([2]). Die Eigenschaften der Differentialgleichungen der Klasse $\mathscr{A}$ wurden von O. Borůvka beschrieben ([3]).

Der obige Satz enthält insbesondere die Lösung des folgenden Problems: Es sei eine Differentialgleichung (Q_2) gegeben. Man hat alle Differentialgleichungen (Q_1) zu bestimmen, deren Fundamentaldispersionen mit der Fundamentaldispersion von (Q_2) vertauschbar sind.

Die Lösung: Jede Differentialgleichung (Q_1) ist durch die Formel (13) bestimmt; α_2 bedeutet eine beliebig gewählte Phase von (Q_2) und Q den Koeffizientan einer Differentialgleichung aus $\mathscr{A}$.

Natürlich bestimmt die Formel (13) auch alle Paare von Differentialgleichungen (Q_1), (Q_2) die bei Regelung der kombinierten Bewegungen von materiellen Punkten stets isochrone Schwingungen bewirken.

LITERATUR

[1] O. **Borůvka**: *Lineare Differentialtransformationen* 2. Ordnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1967.

[2] E. **Barvínek**: *O rozložení nulových bodů řešení lineární diferenciální rovnice* $y'' = Q(t)\,y$ *a jejich derivací.* Acta Fac. Mat. Univ. Comeniam, V. 8—10 Math. (1961), 465—474.

[3] O. **Borůvka**: *Sur la périodicité de la distance des zéros des intégrales de l'équation differentielle* $y'' = q(t)\,y$. Tensor, N. S. (1972), 121—128.

S. Šantavá
662 37 Brno, Barvičova 85
Tschechoslowakei