ARCH. MATH. 2, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XVII: 65—72, 1981

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Г. АНГЕЛОВ, Д. Д. БАЙНОВ

(Поступило в редакцию 5-го мая 1979)

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$(1)\qquad \dot{y}(t) = F(t, y(t), y(\Delta_1(t)), \dot{y}(\Delta_2(t))), \qquad t > 0$$

$$(2)\qquad y(t) = \psi(t), \ \dot{y}(t) = \dot{\psi}(t), \qquad t \leqq 0$$

где неизвестная функция $y(t)$ принимает значения в некотором банаховом пространстве B с нормой $\| \cdot \|$.

В настоящей работе методом аккретивных операторов [1] – [6] доказана теорема о существовании и единственности ограниченного решения задачи (1), (2).

Отметим, что в [7] другим методом рассмотрена аналогичная задача для уравнения в правой части которого отсутствует $\dot{y}(\Delta_2(t))$.

Предполагая, что $\psi(0) = \dot{\psi}(0) = 0$ (см. [8], стр. 254) положим $x(t) = \dot{y}(t)$ при $t > 0$ и $\varphi(t) = \dot{\psi}(t)$ при $t \leqq 0$. Получаем

$$(3)\qquad x(t) = F\Big(t, \int_0^t x(s)\,ds, \int_0^{\Delta_1(t)} x(s)\,ds, x(\Delta_2(t))\Big), \qquad t > 0$$

$$(4)\qquad x(t) = \varphi(t), \qquad t \leqq 0.$$

Докажем некоторые помощные утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем, следуя схему доказательства предложенную в [2].

Обозначим через Dom N область определения оператора N и через Range N область значений оператора N. Через I будем обозначать идентитет.

Пусть B банаховое пространство и B^* его сопряженное пространство. Пусть $I: B \to 2^{B^*}$ дуальное отображение, т. е., $I(x) = \{j \in B^* : \langle x, j\rangle = \|x\|_B^2 = \|j\|_{B^*}^2, x \in B\}$ (см. подробное изложение в [4], [5]).

Определение 1. Оператор N: Dom $N \to B$ (Dom $N \subset B$) называется аккретивным, если при любых $x, y \in$ Dom N и некоторого $j \in I(x - y)$ выполнено соотношение $\langle Nx - Ny, j\rangle \geqq 0$.

Из леммы I.I работы [6] следует, что оператор N аккретивен тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\| (I + \lambda N)x - (I + \lambda N)y \|_B \geqq \| x - y \|_B$$

для любых $x, y \in$ Dom N и $\lambda > 0$. Если еще Range $(I + \lambda N) = B$ то оператор N называется m-аккретивным.

Пусть B банаховое пространство с нормой $\| \, . \, \|_B$.

Лемма 1. *Пусть на B определен нелинейный непрерывный оператор $N : B \to B$, который удовлетворяет неравенству*

(5) $$\| ((1 + \lambda\gamma - \lambda\alpha) I + \lambda N) x - ((1 + \lambda\gamma - \lambda\alpha) I + \lambda N) y \|_B \geqq \| x - y \|_B$$

для некоторых чисел $\gamma > 0$, $\alpha > 0$, любого $\lambda > 0$ и $x, y \in B$.

Тогда для любого $x \in B$ существует единственный элемент $z \in B$, удовлетворяющий условию $(N + \gamma I) z = x$.

Доказательство. Оператор N непрерывен. Оператор $N + (\gamma - \alpha) I$ тоже непрерывен. Неравенство (5) показывает, что он аккретивен. Известно, что если нелинейный, непрерывный и аккретивный оператор определен на всем пространстве, то он m-аккретивен [I] (см. тоже [4], стр. 161, теорема 3.2). Это означает, что оператор $I + \lambda(N + \gamma I - \alpha I)$ отображает B на B при любом $\lambda > 0$. Пусть $\lambda = \frac{1}{\alpha}$. Оператор $I + \frac{1}{\alpha}(N + \gamma I - \alpha I) = \frac{1}{\alpha}(N + \gamma I)$ отображает B на B и его обратный оператор удовлетворяет неравенству

(6) $$\| (N + \gamma I)^{-1} x - (N + \gamma I)^{-1} y \|_B \leqq \frac{1}{\alpha} \| x - y \|_B.$$

Тогда для любого $x \in B$ существует единственный элемент $z \in B$, для которого $(N + \gamma I) z = x$.

Этим лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Выполнены условия леммы 1.*

2. *При $x, z, x', z' \in B$ выполнены равенства $(N + \gamma I) z = x$ и $(N + \gamma I) z' = x'$.*

Тогда имеет место оценка

$$\| z - z' \|_B \leqq \frac{1}{\alpha} \| x - x' \|_B.$$

Доказательство. Используя неравенство (6) непосредственно получаем

$$\| z - z' \|_B = \| (N + \gamma I)^{-1} x - (N + \gamma I)^{-1} x' \|_B \leqq \frac{1}{\alpha} \| x - x' \|_B.$$

Этим лемма 2 доказана.

Введем некоторые обозначения.

Через R^1 будем обозначать множество действительных чисел, через R^1_+ – множество неотрицательных действительных чисел, через R^1 – множество неположительных действительных чисел.

Пусть $\alpha(t)$ неотрипательная, действительная функция, определенная на R^1.

Определение 2. Говорять, что функция $f(t) : R^1 \to B$ имеет асимптотическую грань $\alpha(t)$, если существуют постоянные $A_f \geqq 0$ и $C_f > 0$, такие, что при всех $|t| > A_f$ справедливо неравенство $\| f(t) \| \leqq C_f \alpha(t)$, и будем писать $\| f(t) \| = O(\alpha(t))$.

Лемма 3. *Пусть функция* $a(t) : R^1 \to R^1_+$ *непрерывная и положительна. Функция* $\frac{1}{a(t)}$ *ограничена и суммируема на* R^1, *т. е.,* $Q = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{a(t)} < \infty$.

Тогда множество $C_a(R^1 ; B)$, *состоящееся из всех непрерывных и ограниченных функций* $f(t) : R^1 \to B$, *имеющие асимптотическую грань* $\frac{1}{a(t)}$, *является банаховым пространством с нормой* $\| f \|_a = \sup \{ a(t) \| f(t) \| : t \in R^1 \}$.

Доказательство. Множество $C_a(R^1 ; B)$ является линейным пространством. Действительно, если функции $f(t), g(t) \in C_a(R^1 ; B)$, то функции $h(t) = f(t) + g(t)$ и $l(t) = \lambda f(t)$, $\lambda \in R^1$ тоже принадлежат $C_a(R^1 ; B)$.
В самом деле

$$\| h(t) \| \leqq \| f(t) \| + \| g(t) \| \leqq \frac{C_f + C_g}{a(t)} \quad \text{при } |t| > A_h = \max \{A_f, A_g\},$$

$$\text{т. е., } \| h(t) \| = O\left(\frac{1}{a(t)}\right), \quad \text{и} \quad \| l(t) \| \leqq \frac{|\lambda| C_f}{a(t)} \quad \text{при } |t| > A_f,$$

$$\text{т.е., } \| l(t) \| = O\left(\frac{1}{a(t)}\right).$$

Пусть $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная последовательность элементов $C_a(R^1 ; B)$, т. е., для любого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число n_0, что если $n, m > n_0$, то выполнено равенство

$$(7) \qquad \| f_n - f_m \|_a > \varepsilon.$$

Тогда если выберем $d > 0$, имеем

$$\| f_n(t) - f_m(t) \| \leqq \frac{1}{a(t)} \sup \{ a(t) \| f_n(t) - f_m(t) \| : t \in [-d, d] \} \leqq$$
$$\leqq \bar{a} \| f_n - f_m \|_a > \varepsilon \bar{a}$$

где $\bar{a} = \sup \left\{ \frac{1}{a(t)} ; t \in R^1 \right\}$

Следовательно последовательность $f_n(t)$ стремится равномерно на интервале $[-d, d]$ к функции $f(t)$. Но число $d > 0$ произвольное. Следовательно функция $f(t)$ непрерывна на R^1.

Устремляя n к бесконечности в неравенстве (7) получаем $\| f - f_m \|_a \leqq \varepsilon$.

Дальше из неравенства для нормы

$$| \| f \|_a - \| f_m \|_a | \leqq \| f - f_m \|_a \leqq \varepsilon$$

получаем

$$\| f \|_a \leqq \| f_m \|_a + \varepsilon < \infty,$$

т. е., $f \in C_a(R^1; B)$.

Следовательно $C_a(R^1; B)$ является банаховым пространством.

Лемма 3 доказана.

Если $B = R^1$ вместо $C_a(R^1; R^1)$ будем писать $C_a(R^1)$ $(C_a(R^1_+)$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функции* $\Delta_k(t) : R^1_+ \to R^1$ $(k = 1, 2)$ *непрерывны.*

2. *Функции* $\alpha_n(t) : R^1_+ \to R^1_+$ $(n = 0, 1, 2, 3)$ *непрерывны, ограничены и принадлежат* $C_a(R^1_+)$.

Функции $\beta_s(t) : R^1_+ \to R^1_+$ $(s = 1, 2, 3)$ *непрерывны и удовлетворяют условию*

(8) $$a(t)\,[Q\beta_1(t) + Q\beta_2(t) + \bar{a}\beta_3(t)] \leqq 1, \qquad t \in R^1_+.$$

3. *Функция* $F(t, x, y, z) : R^1_+ \times B \times B \times B \to B$ *непрерывна и удовлетворяет условиям*

3.1. $F(0, 0, y, z) = 0$ *при любых* $y, z \in B$.

3.2. $\| F(t, x, y, z) \| \leqq \dfrac{1}{\gamma}[\alpha_0(t) + \alpha_1(t) \| x \| + \alpha_2(t) \| y \| + \alpha_3(t) \| z \|]$

3.3. $\| F(t, x, y, z) - F(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \| \leqq \dfrac{M}{\gamma}[\beta_1(t) \| x - \bar{x} \| + \beta_2(t) \| y - \bar{y} \| + \beta_3(t) \| z - \bar{z} \|]$,

где γ *и* M *положительные постоянные и* $\gamma > M$.

4. *Функция* $\bar{\varphi}(t) \in C_a(R^1; B)$, $\bar{\varphi}(t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ \gamma\varphi(t), & t \leqq 0 \text{ и } \varphi(0) = 0. \end{cases}$

Тогда существует единственная функция $x(t) \in C_a(R^1; B)$, *которая является решением задачи* (3), (4).

Доказательство. Пусть B банаховое пространство $C_a(R^1; B)$ с нормой $\| f \|_a = \sup\{a(t) \| f(t) \| : t \in R^1\}$.

Пусть оператор $N : B \to B$ действует по формуле

$$(Nf)(t) = \begin{cases} -\gamma F(t, \int\limits_0^t f(s)\,ds, \int\limits_0^{\Delta_1(t)} f(s)\,ds, f(\Delta_2(t))), & t > 0, \\ 0, & t \leqq 0, \end{cases}$$

где функция $f(t) \in B$.

Условие согласования $\varphi(0) = F(0, 0, 0, 0) = 0$ выполнено.

Если функция $f \in B$, то функция Nf — тоже принадлежит B.

Действительно, при $t > A > 0$ имеем

$$\| (Nf)(t) \| \leqq \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \| \int_0^t f(s)\,ds \| + \alpha_2(t) \| \int_0^{\Delta_1(t)} f(s)\,ds \| + \alpha_3(t) \| f(\Delta_2(t)) \| \leqq$$

$$\leqq \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\,Q\,\|f\|_a + \alpha_2(t)\,Q\,\|f\|_a + \alpha_3(t)\,\bar{a}\,\|f\|_a \leqq$$

$$\leqq \frac{C_{\alpha_0}}{a(t)} + \frac{C_{\alpha_1} Q \| f \|_a}{a(t)} + \frac{C_{\alpha_2} Q \| f \|_a}{a(t)} + \frac{C_{\alpha_3} \bar{a} \| f \|_a}{a(t)} \quad \text{т.е.,} \quad \| (Nf)(t) \| = Q\left(\frac{1}{a(t)}\right),$$

где $A = \max\{A_{\alpha_0}, A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, A_{\alpha_3}\}$.

При $t \leqq 0$ функция $(Nf)(t) = 0$. Кроме того она непрерывна как суперпозиция непрерывных функций. Следовательно функция $(Nf)(t)$ принадлежит B.

Покажем, что оператор N липшицево непрерывен.

Действительно, если функции $f(t)$, $g(t) \in B$, то согласно условий теоремы I при $t > 0$ получаем

$$\| (Nf)(t) - (Ng)(t) \| \leqq M[\beta_1(t) \| \int_0^t f(s)\,ds - \int_0^t g(s)\,ds \| +$$

$$+ \beta_2(t) \| \int_0^{\Delta_1(t)} f(s)\,ds - \int_0^{\Delta_1(t)} g(s)\,ds \| + \beta_3(t) \| f(\Delta_2(t)) - g(\Delta_2(t)) \|] \leqq$$

$$\leqq M[\beta_1(t)\,Q\,\| f - g \|_a + \beta_2(t)\,Q\,\| f - g \|_a + \beta_3(t)\,\bar{a}\,\| f - g \|_a] \leqq$$

$$\leqq \frac{M}{a(t)} \| f - g \|_a.$$

Следовательно

$$\| Nf - Ng \|_a \leqq M \| f - g \|_a.$$

Положим $\alpha = \gamma - M$. Тогда при $\lambda > 0$ и $f, g \in B$ имеем

$$\| ((1 + \lambda\gamma - \lambda\alpha) I + \lambda N) f - ((1 + \lambda\gamma - \lambda\alpha) I + \lambda N) g \|_a \geqq$$

$$\geqq (1 + \lambda M) \| f - g \|_a - \lambda M \| f - g \|_a = \| f - g \|_a.$$

Применим лемму 1. Согласно условиям теоремы 1 функция $\bar{\varphi}(t) \in B$.

Тогда согласно леммы 1 существует единственная функция $x(t) \in B$ такая, что $(N + \gamma I)\,x(t) = \bar{\varphi}(t)$, т. е., $(Nx)(t) + \gamma x(t) = 0$ при $t > 0$ и $x(t) = \varphi(t)$ при $t \leqq 0$.

Непосредственная проверка показывает, что $x(t)$ является решением задачи (3), (4). Действительно, при $t \leqq 0$, $x(t) = \varphi(t)$, а при $t > 0$,

$$x(t) = -\frac{1}{\gamma}(Nx)(t) = F(t, \int_0^t x(s)\,ds, \int_0^{\Delta_1(t)} x(s)\,ds, x(\Delta_2(t))).$$

Этим теорема 1 доказана.

Покажем, что функция

$$y(t) = \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s,$$

где $x(t)$ решение задачи (3), (4) принадлежащее $C_a(R^1; B)$, является ограниченным решением задачи (1), (2). Действительно, при $t > 0$

$$\| y(t) \| \leqq \int_0^t \| x(s) \| \,\mathrm{d}s = \int_0^t \| x(s) \| \, a(s) \frac{1}{a(s)} \,\mathrm{d}s \leqq \| x \|_a \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{a(s)} .$$

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Выполнены условия теоремы 1.*

2. *Функции* $x(\varphi_1)(t)$ *и* $x(\varphi_2)(t)$ *являются решениями задачи* (3), (4) *с начальными функциями* $\varphi_1(t)$ *и* $\varphi_2(t)$.

Тогда

$$\| x(\varphi_1)(t) - x(\varphi_2)(t) \| \leqq \frac{\gamma}{\gamma - M} \frac{1}{a(t)} \sup \{ a(\vartheta) \| \varphi_1(\vartheta) - \varphi_2(\vartheta) \| : \vartheta \leqq 0 \}.$$

Доказательство. Применяя результат леммы 2 получаем оценку

$$\| x(\varphi_1)(t) - x(\varphi_2)(t) \|_a \leqq \frac{1}{\gamma - M} \| \gamma\varphi_1(t) - \gamma\varphi_2(t) \|_a \leqq$$

$$\leqq \frac{\gamma}{\gamma - M} \sup \{ a(\vartheta) \| \varphi_1(\vartheta) - \varphi_2(\vartheta) \| ; \vartheta \leqq 0 \}.$$

Этим теорема 2 доказана.

Наконец рассмотрим пример при $B = R^1$.

Пример 1. Рассмотрим начальную задачу

$$(9)\quad \dot{y}(t) = \frac{t^2}{16(1 + t^4)} + \frac{t^2}{16(1 + t^4)} \ln \{ [1 + y^2(-\cos t)] [1 + \dot{y}^2(t^2)] \}, \qquad t > 0,$$

$$(10)\quad y(t) = 0, \qquad t \leqq 0.$$

После замены переменных $x(t) = \dot{y}(t)$ при $t > 0$ получаем

$$(11)\quad x(t) = \frac{t^2}{16(1 + t^4)} + \frac{t^2}{16(1 + t^4)} \ln \{ [1 + (\int_0^{-\cos t} x(s)\,\mathrm{d}s)^2] [1 + x^2(t^2)] \}, \quad t > 0,$$

$$(12)\quad x(t) = 0, \qquad t \leqq 0.$$

Покажем, что существует единственное решение задачи (11), (12), принадлежащее $C_a(R^1)$, где

$$a(t) = \begin{cases} 2, & |t| \leqq 1, \\ 2t^2, & |t| > 1, \end{cases} \qquad Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{a(s)} = 2.$$

Здесь

$$\Delta_1(t) = -\cos t, \qquad \Delta_2(t) = t^2, \qquad \bar{a} = \frac{1}{2}, \qquad \varphi(t) \equiv 0,$$

$$F(t, y, z) = \frac{t^2}{16(1 + t^4)} + \frac{t^2}{16(1 + t^4)} \ln [(1 + y^2)(1 + z^2)].$$

Легко видно, что

$$| F(t, y, z) | \leqq \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{8(1 + t^4)} + \frac{t^2}{8(1 + t^4)} | y | + \frac{t^2}{8(1 + t^4)} | z |\right],$$

$$| F(t, y, z) - F(t, \bar{y}, \bar{z}) | \leqq \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{8(1 + t^4)} | y - \bar{y} | + \frac{t^2}{8(1 + t^4)} | z - \bar{z} |\right],$$

т. е.,

$$M = 1, \qquad \gamma = 2, \qquad \alpha_0(t) = \alpha_2(t) = \alpha_3(t) = \frac{t^2}{8(1 + t^4)} = O(t^{-2}),$$

$$\beta_2(t) = \beta_3(t) = \frac{t^2}{8(1 + t^4)} = O(t^{-2}).$$

Следующее неравенство показывает, что выполнено условие (8) теоремы 1

$$a(t)\,[Q\beta_2(t) + \bar{a}\beta_3(t)] = \begin{cases} 2\left[\dfrac{2t^2}{8(1 + t^4)} + \dfrac{\frac{1}{2}t^2}{8(1 + t^4)}\right] < 1, & 0 \leqq t \leqq 1 \\ 2t^2\left[\dfrac{2t^2}{8(1 + t^4)} + \dfrac{\frac{1}{2}t^2}{8(1 + t^4)}\right] < 1, & t > 1. \end{cases}$$

Так как выполнены все условия теоремы 1, то существует единственное решение $x(t) \in C_a(R^1)$ задачи (11), (12) и следовательно единственное ограниченное решение $y(t)$ задачи (9), (10).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Martin R. H.: *A global existence theorem for autonomous differential equations in a Banach space*. Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970), 307—314.

[2] Webb G. F.: *Accretive operators and existence for nonlinear functional differential equations*. J. Diff. Equations 14 (1973), 57—69.

[3] Lovelady D. L., Martin R. H.: *A global existence theorem for nonautonomous differential equations in a Banach space*. Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972), 445—449.

[4] Barbu V.: *Semigrupuri de contractii nelineare în spatii Banach*. Ed. Acad. R S Romania, Bucuresti, 1974.

[5] Pavel N.: *Ecuatii diferentiale asociate unor operatori neliniari pe spatii Banach*. Ed. Acad. R S Romania, Bucuresti, 1977.

[6] Kato T.: *Nonlinear semigroups and evolution equations*. J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 508—520.

[7] Курпель Н. С.: *О существовании, единственности и непрерывной зависимости от параметра ограниченных решений функционально-дифференциальных уравнений. Качественные методы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*. Издание Института математики АН УССР, Киев, 1977, 45—49.

[8] Jankowski T., Kwapisz M.: *On the existence and uniqueness of solutions of systems of differential equations with deviated argument*. Ann. Pol. Math. XXVI (1972), 253—277.

В. Г. Ангелов

Д. Д. Байнов
1504 София — 4, Оборище 23
Болгария