T. St. Nikolova; Drumi Dimitrov Bajnov

Применение метода двусторонних приближений для отыскания периодических решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

Archivum Mathematicum, Vol. 16 (1980), No. 2, 105--113

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/107062

ARCH. MATH. 2, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XVI: 105—114, 1980

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДВУСТОРОННИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

(Поступило в редакцию 24го апреля 1978 г)

Т. С. НИКОЛОВА, Д. Д. БАЙНОВ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

(1) $$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), x(t), x(t-\tau), x(t-\tau)\big), \tau > 0,$$

где функция $f(t, x, y, \zeta, \eta)$ определена при $t \in (-\infty, +\infty)$; $x, y, \zeta, \eta \in [a, b]$ $(a, b \in R)$, непрерывна по всем аргументам, периодична по t с периодом T, неубывающая по x и ζ и невозрастающая по y и η, т. е.,

(2) $$f(t, x, y, \zeta, \eta) \leqq f(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{\zeta}, \bar{\eta})$$

при

$t \in (-\infty, +\infty)$; $x, y, \zeta, \eta \in [a, b]$; $\bar{x}, \bar{y}, \bar{\zeta}, \bar{\eta} \in [a, b]$; $x \leqq \bar{x}$, $y \geqq \bar{y}$, $\zeta \leqq \bar{\zeta}$, $\eta \geqq \bar{\eta}$.

Будем искать периодические решения с периодом T уравнения (1) методом двусторонних приближений, примененный Н. С. Курпелем в [1] к отысканию периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений без отклонения аргумента.

Пусть $C_{[t_0-\tau, t_0+T]}$ – пространство непрерывных на сегменте $[t_0 - \tau, t_0 + T]$ функций $x(t)$ с метрикой, порожденной нормой $\| x \| = \max\limits_{t_0-\tau \leqq t \leqq t_0+T} | x(t) |$. Обозначим через Ω множество всех функций $x \in C_{[t_0-\tau, t_0+T]}$, которые удовлетворяют условиям:

(3) $$x(t) = x(t + T) \quad \text{при } t \in [t_0 - \tau, t_0]$$

(4) $$x(t_0) = x(t_0 + T) = x_0 \quad (x_0 \in R)$$

(5) $$a \leqq x(t) \leqq b \quad \text{при } t \in [t_0 - \tau, t_0 + T].$$

Определим последовательности функций $\{u_n(t)\}$ и $\{v_n(t)\}$ по рекуррентным формулам

$$u_{n+1}(t) = \begin{cases} x_0 + \left(1 - \dfrac{t - t_0}{T}\right) \int\limits_{t_0}^{t} f(s, u_n(s), v_n(s), u_n(s-\tau), v_n(s-\tau))\,ds - \\ -\dfrac{t - t_0}{T} \int\limits_{t}^{t_0+T} f(s, v_n(s), u_n(s), v_n(s-\tau), u_n(s-\tau))\,ds \quad \text{при } t \in [t_0, t_0 + T] \\ u_{n+1}(t + T) \quad \text{при } t \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases}$$

(6)

$$v_{n+1}(t) = \begin{cases} x_0 + \left(1 - \dfrac{t - t_0}{T}\right) \int\limits_{t_0}^{t} f(s, v_n(s), u_n(s), v_n(s-\tau), u_n(s-\tau))\,ds - \\ -\dfrac{t - t_0}{T} \int\limits_{t}^{t_0+T} f(s, u_n(s), v_n(s), u_n(s-\tau), v_n(s-\tau))\,ds \quad \text{при } t \in [t_0, t_0 + T] \\ v_{n+1}(t + T) \quad \text{при } t \in [t_0 - \tau, t_0]. \end{cases}$$

В качестве исходных функций принимаем соответственно функции

$$u_0(t) = \begin{cases} x_0 - (t - t_0)\left(1 - \dfrac{t - t_0}{T}\right)(M - m) \quad \text{при } t \in [t_0, t_0 + T], \\ u_0(t + T) \quad \text{при } t \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases}$$

(7)

$$v_0(t) = \begin{cases} x_0 + (t - t_0)\left(1 - \dfrac{t - t_0}{T}\right)(M - m) \quad \text{при } t \in [t_0, t_0 + T], \\ v_0(t + T) \quad \text{при } t \in [t_0 - \tau, t_0]. \end{cases}$$

(m = const., M = const.)

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*:

1. *При* $t \in (-\infty, +\infty)$ *и* $x, y, \zeta, \eta \in [a, b]$

$$m \leqq f(t, x, y, \zeta, \eta) \leqq M;$$

2. $a + \dfrac{T}{4}(M - m) \leqq x_0 \leqq b - \dfrac{T}{4}(M - m)$.

Тогда

1. $u_n, v_n \in \Omega$ *для всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$
2. *Имеют место соотношения*

(8) $$u_0(t) \leqq u_1(t) \leqq \ldots \leqq u_n(t) \leqq \ldots \leqq v_n(t) \leqq \ldots \leqq v_1(t) \leqq v_0(t)$$

при $t \in [t_0 - \tau, t_0 + T]$.

Доказательство.

1. Из равенств (6) и (7) видно, что функции $u_n(t)$, $v_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ удовлетворяют условиям (3), (4) и непрерывны на сегменте $[t_0 - \tau, t_0 + T]$.

Пользуясь условий 1 и 2 теоремы 1, по формулам (6) и (7) получаем

$$u_{n+1}(t) \geqq x_0 + \left(1 - \frac{t-t_0}{T}\right)\int_{t_0}^{t} m\,ds - \frac{t-t_0}{T}\int_{t}^{t_0+T} M\,ds =$$

$$= x_0 - (t-t_0)\left(1 - \frac{t-t_0}{T}\right)(M-m) = u_0(t) \geqq$$

$$\geqq \inf\{u_0(t) : t \in [t_0, t_0+T]\} = x_0 - \frac{T}{4}(M-m) \geqq a,$$

т. е.,

(9) $\qquad u_n(t) \geqq a \qquad$ при $t \in [t_0 - \tau, t_0 + T]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

$$v_{n+1}(t) \leqq x_0 + \left(1 - \frac{t-t_0}{T}\right)\int_{t_0}^{t} M\,ds - \frac{t-t_0}{T}\int_{t}^{t_0+T} m\,ds =$$

$$= x_0 + (t-t_0)\left(1 - \frac{t-t_0}{T}\right)(M-m) = v_0(t) \leqq$$

$$\leqq \sup\{v_0(t) : t \in [t_0, t_0+T]\} = x_0 + \frac{T}{4}(M-m) \leqq b,$$

(10) $\qquad$ т. е., $v_n(t) \leqq b \qquad$ при $t \in [t_0 - \tau, t_0 + T]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Докажем, что

(11) $\qquad u_n(t) \leqq v_n(t) \qquad$ при $t \in [t_0 - \tau, t_0 + T]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Действительно, $u_0(t) \leqq v_0(t)$, а из свойства (2) при $t \in [t_0, t_0 + T]$ получаем

$$u_1(t) = x_0 + \left(1 - \frac{t-t_0}{T}\right)\int_{t_0}^{t} f(s, u_0(s), v_0(s), u_0(s-\tau), v_0(s-\tau))\,ds -$$

$$- \frac{t-t_0}{T}\int_{t}^{t_0+T} f(s, v_0(s), u_0(s), v_0(s-\tau), u_0(s-\tau))\,ds \leqq$$

$$\leqq x_0 + \left(1 - \frac{t-t_0}{T}\right)\int_{t_0}^{t} f(s, v_0(s), u_0(s), v_0(s-\tau), u_0(s-\tau))\,ds -$$

$$- \frac{t-t_0}{T}\int_{t}^{t_0+T} f(s, u_0(s), v_0(s), u_0(s-\tau), v_0(s-\tau))\,ds = v_1(t).$$

Следовательно, $u_1(t) \leqq v_1(t)$ при $t \in [t_0 - \tau, t_0 + T]$.

Допустим, что $u_n(t) \leqq v_n(t)$ при некотором n и $t \in [t_0 - \tau, t_0 + T]$. Тогда, как для $u_1(t)$, $v_1(t)$ получаем

$$u_{n+1}(t) \leqq v_{n+1}(t) \qquad \text{при } t \in [t_0 - \tau, t_0 + T].$$

Согласно принципу математической индукции, неравенство (11) выполнено для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Из неравенств (9), (10) и (11) следуют неравенства:

$$a \leqq u_n(t) \leqq b;\ a \leqq v_n(t) \leqq b \qquad \text{при } t \in [t_0 - \tau, t_0 + T],\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

т. е., функции $u_n(t)$ и $v_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) удовлетворяют и условию (5).

Следовательно $u_n, v_n \in \Omega$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

2. Согласно первой части доказательства, имеем $u_1(t) \geqq u_0(t)$ и $v_1(t) \leqq v_0(t)$ при $t \in [t_0 - \tau, t_0 + T]$. Для $u_2(t)$ и $v_2(t)$ при $t \in [t_0, t_0 + T]$ получаем

$$\begin{aligned}
u_2(t) = x_0 &+ \left(1 - \frac{t - t_0}{T}\right) \int_{t_0}^{t} f(s, u_1(s), v_1(s), u_1(s - \tau), v_1(s - \tau))\,\mathrm{d}s - \\
&- \frac{t - t_0}{T} \int_{t}^{t_0+T} f(s, v_1(s), u_1(s), v_1(s - \tau), u_1(s - \tau))\,\mathrm{d}s \geqq \\
&\geqq x_0 + \left(1 - \frac{t - t_0}{T}\right) \int_{t_0}^{t} f(s, u_0(s), v_0(s), u_0(s - \tau), v_0(s - \tau))\,\mathrm{d}s - \\
&- \frac{t - t_0}{T} \int_{t}^{t_0+T} f(s, v_0(s), u_0(s), v_0(s - \tau), u_0(s - \tau))\,\mathrm{d}s = u_1(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2(t) = x_0 &+ \left(1 - \frac{t - t_0}{T}\right) \int_{t_0}^{t} f(s, v_1(s), u_1(s), v_1(s - \tau), u_1(s - \tau))\,\mathrm{d}s - \\
&- \frac{t - t_0}{T} \int_{t}^{t_0+T} f(s, u_1(s), v_1(s), u_1(s - \tau), v_1(s - \tau))\,\mathrm{d}s \leqq \\
&\leqq x_0 + \left(1 - \frac{t - t_0}{T}\right) \int_{t_0}^{t} f(s, v_0(s), u_0(s), v_0(s - \tau), u_0(s - \tau))\,\mathrm{d}s - \\
&- \frac{t - t_0}{T} \int_{t}^{t_0+T} f(s, u_0(s), v_0(s), u_0(s - \tau), v_0(s - \tau))\,\mathrm{d}s = v_1(t).
\end{aligned}$$

Если допустим, что $u_n(t) \geqq u_{n-1}(t)$ и $v_n(t) \leqq v_{n-1}(t)$ при $t \in [t_0 - \tau, t_0 + T]$ и некотором n, то получим $u_{n+1}(t) \geqq u_n(t)$ и $v_{n+1}(t) \leqq v_n(t)$.

Следовательно, согласно принципу математической индукции, выполнены неравенства

$$u_{n+1}(t) \geqq u_n(t),\ v_{n+1}(t) \leqq v_n(t) \tag{12}$$

при $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $t_0 - \tau \leqq t \leqq t_0 + T$. Из неравенств (9), (10), (11) и (12) следуют соотношения (8).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы I, то:*

1. *Уравнение*

$$x(t) = x_0 + \left(1 - \frac{t - t_0}{T}\right) \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), x(s), x(s - \tau), x(s - \tau))\,\mathrm{d}s - \tag{13}$$

$$-\frac{t-t_0}{T}\int\limits_t^{t_0+T} f(s, x(s), x(s), x(s-\tau), x(s-\tau))\,ds,$$

имеет по крайней мере одно решение $x^* \in \Omega$.

2. *Каждое решение $x^* \in \Omega$ уравнения* (13) *удовлетворяет неравенствам*

$$u_n(t) \leqq x^*(t) \leqq v_n(t),\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Доказательство. Пусть Π — оператор, определенный в Ω формулой

$$\Pi x(t) = \begin{cases} x_0 + \left(1 - \dfrac{t-t_0}{T}\right)\displaystyle\int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s), x(s), x(s-\tau), x(s-\tau))\,ds - \\ -\dfrac{t-t_0}{T}\displaystyle\int\limits_t^{t_0+T} f(s, x(s), x(s), x(s-\tau), x(s-\tau))\,ds \quad \text{при } t \in [t_0, t_0+T], \\ \Pi x(t+T) \quad \text{при } t \in [t_0-\tau, t_0]. \end{cases}$$

1. Оператор Π отображает множество Ω на свою часть. Действительно, если $x \in \Omega$, то функция $\Pi x(t)$ непрерывна на сегменте $[t_0 - \tau, t_0 + T]$ и удовлетворяет условиям (3), (4). Из условий 1 и 2 теоремы 1 получаем:

$$\begin{aligned} \Pi x(t) &\leqq x_0 + \left(1 - \frac{t-t_0}{T}\right)\int\limits_{t_0}^{t} M\,ds - \frac{t-t_0}{T}\int\limits_t^{t_0+T} m\,ds = v_0(t) \leqq b, \\ \Pi x(t) &\geqq x_0 + \left(1 - \frac{t-t_0}{T}\right)\int\limits_{t_0}^{t} m\,ds - \frac{t-t_0}{T}\int\limits_t^{t_0+T} M\,ds = u_0(t) \geqq a, \end{aligned} \tag{15}$$

т. е., функция Πx удовлетворяет и условию (5).

Следовательно $\Pi\Omega \subset \Omega$.

Легко видно, что Ω — ограниченное, замкнутое и выпуклое множество банахова пространства $C_{[t_0-\tau, t_0+T]}$.

Из за непрерывности функции f следует, что оператор Π непрерывен на множестве Ω. Соотношения (15) показывают, что функции множества $\Pi\Omega$ равномерно ограничены. Кроме того функции множества $\Pi\Omega$ являются и равностепенно непрерывными. Действительно, пусть $t_1, t_2 \in [t_0 - \tau, t_0 + T]$ и $x \in \Omega$. Тогда при оценке модуля разности $\Pi x(t_1) - \Pi x(t_2)$ рассмотрим следующие случаи:

а) Пусть $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + T]$. Тогда по теореме Лагранжа получаем

$$|\Pi x(t_1) - \Pi x(t_2)| = |(\Pi x(t))'_{t=\xi}| \cdot |t_1 - t_2| =$$
$$= \left|\left(-\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} f(s, x(s), x(s), x(s-\tau), x(s-\tau))\,ds + f(t, x(t), x(t), x(t-\tau), x(t-\tau))\right)_{t=\xi}\right| \times$$
$$\times |t_1 - t_2| \leqq \left(\frac{1}{T}M_0 \cdot T + M_0\right)|t_1 - t_2| = 2M_0|t_1 - t_2|,$$

где ξ — некоторое число из интервала (t_1, t_2), а $M_0 = \max\{|M|, |m|\}$.

б) Пусть $t_1, t_2 \in [t_0 - \tau, t_0]$ и $(t_1 + T), (t_2 + T) \in [t_0, t_0 + T]$. Тогда

$$| \Pi x(t_1) - \Pi x(t_2) | = | \Pi x(t_1 + T) - \Pi x(t_2 + T) | \leqq$$
$$\leqq 2M_0 | t_1 - t_2 |.$$

в) Пусть $t_1 \in [t_0 - \tau, t_0]$, $t_2 \in [t_0, t_0 + T]$ и $t_1 + T \in [t_0, t_0 + T]$. Тогда

$$| \Pi x(t_1) - \Pi x(t_2) | \leqq | \Pi x(t_1) - \Pi x(t_0) | + | \Pi x(t_0) - \Pi x(t_2) | \leqq$$
$$\leqq 2M_0 | t_1 - t_0 | + 2M_0 | t_0 - t_2 | = 2M_0 | t_1 - t_2 |.$$

г) Пусть $t_1 \in [t_0 - \tau, t_0]$, $t_2 \in [t_0, t_0 + T]$, $t_1 + T < t_0$, $t_1 + 2T \geqq t_0$. Тогда

$$| \Pi x(t_1) - \Pi x(t_2) | = | \Pi x(t_1 + T) - \Pi x(t_0) | + | \Pi x(t_0) - \Pi x(t_2) | \leqq$$
$$\leqq 2M_0 | t_1 + T - t_0 | + 2M_0 | t_0 - t_2 | =$$
$$= 2M_0(t_2 - t_1 - T) < 2M_0 | t_1 - t_2 |.$$

Остальные случаи сводятся аналогичным образом к уже рассмотренным.

Следовательно, при каждом $\varepsilon > 0$ и для каждой функции Πx $(x \in \Omega)$ выполнено неравенство $| \Pi x(t_1) - \Pi x(t_2) | < \varepsilon$, если $t_1, t_2 \in [t_0 - \tau, t_0 + T]$ и $| t_1 - t_2 | < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2M_0}$.

Итак, оператор Π и множество Ω удовлетворяют условиям теоремы Шаудера о неподвижной точке. Следовательно, существует по крайней мере одно решение x^* операторного уравнения $\Pi x = x$, т. е., существует по крайней мере одно решение $x^* \in \Omega$ уравнения (13).

2. Пусть $u_n(t) \leqq x(t) \leqq v_n(t)$, $(x \in \Omega)$. Тогда из соотношений (2) следуют неравенства $u_n(t) \leqq \Pi x(t) \leqq v_n(t)$ при $t \in [t_0 - \tau, t_0 + T]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, если $x^* \in \Omega$ является решением операторного уравнения $\Pi x = x$, то $u_n(t) \leqq x^*(t) \leqq v_n(t)$, т. е., выполнены неравенства (14).

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть:*

1. *Выполнены условия теоремы* 1.

2. *Функция* $f(t, x, y, \zeta, \eta)$ *удовлетворяет условию Липшица*

(16) $$|f(t, x, y, \xi, \eta) - f(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta})| \leqq \alpha(| x - \bar{x} | + | y - \bar{y} | + \beta(| \xi - \bar{\xi} | + | \eta - \bar{\eta} |).$$

3. *Выполнено неравенство*

(17) $$T(\alpha + \beta) < 1$$

Тогда уравнение (13) *имеет единственное решение* $x^{**} \in \Omega$.

Доказательство. Последовательности $\{u_n(t)\}$ и $\{v_n(t)\}$ — монотонные и ограниченные последовательности функций. Следовательно они сходятся к некоторым функциям, соответственно $\bar{u}(t)$ и $\bar{v}(t)$. Из неравенств (8) следует, что $\bar{u}(t) \leqq \bar{v}(t)$ $t \in [t_0 - \tau, t_0 + T]$.

В доказательстве теоремы 2 было установлено, что при условиях теоремы 1 существует по крайней мере одно решение $x^* \in \Omega$ уравнения (13) и что каждое решение $x^* \in \Omega$ уравнения (13) удовлетворяет неравенствам $u_n(t) \leqq x^*(t) \leqq v_n(t)$. Следовательно

$$\bar{u}(t) \leqq x^*(t) \leqq \bar{v}(t). \tag{18}$$

Покажем, что $\bar{u} \in \Omega$, $\bar{v} \in \Omega$ и $\bar{u}(t) = \bar{v}(t)$. Действительно, используя соотношений (7), (6) и условия (16), имеем последовательно

$$v_0(t) - u_0(t) \leqq \max\left\{2(t - t_0)\left(1 - \frac{t - t_0}{T}\right)(M - m) : t \in [t_0, t_0 + T]\right\} = $$
$$= \frac{T}{2}(M - m)$$

$$v_1(t) - u_1(t) \leqq \left(1 - \frac{t - t_0}{T}\right)\int_{t_0}^{t}[2\alpha(v_0(s) - u_0(s)) + 2\beta(v_0(s - \tau) - u_0(s - \tau))]\,ds +$$
$$+ \frac{t - t_0}{T}\int_{t}^{t_0+T}[2\alpha(v_0(s) - u_0(s)) + 2\beta(v_0(s - \tau) - u_0(s - \tau))]\,ds \leqq$$
$$\leqq 2T(\alpha + \beta)(M - m)\left(1 - \frac{t - t_0}{T}\right)(t - t_0) \leqq \frac{T}{2} \cdot T(\alpha + \beta)(M - m).$$

Методом математической индукции получаем

$$v_n(t) - u_n(t) \leqq \frac{T}{2} \cdot T^n(\alpha + \beta)^n(M - m), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Из условия (17) следует $v_n(t) - u_n(t) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$.
Тогда, имея ввиду неравенства

$$\bar{u}(t) - u_n(t) \leqq v_n(t) - u_n(t)$$
$$v_n(t) - \bar{v}(t) \leqq v_n(t) - u_n(t),$$

получаем $u_n(t) \rightrightarrows \bar{u}(t)$ при $n \to \infty$ и $v_n(t) \rightrightarrows \bar{v}(t)$ при $n \to \infty$. Следовательно $\bar{u}(t), \bar{v}(t)$ — непрерывные на сегменте $[t_0 - \tau, t_0 + T]$ функции, которые очевидно удовлетворяют и условиям (3), (4), (5), т. е., $\bar{u}, \bar{v} \in \Omega$.

Из соотношений (18) и $v_n(t) - u_n(t) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ следует еще равенство $\bar{u}(t) = \bar{v}(t) = x^{**}(t)$, где x^{**} является единственным в множестве Ω решением уравнения (13).

Теорема 3 доказана.

Замечание. Существование и единственность решения уравнения (13) при условиях теоремы 3 следует директно из принципа Банаха о неподвижной точке.

Рассмотрим вопрос о существовании периодических решений уравнения (1). Введем обозначение

$$\Delta(x_0, x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau))\,\mathrm{d}t.$$

При условиях теоремы 3 через x^{**} будем обозначать единственное в множестве Ω решение уравнения (13).

Легко видно, что уравнение (1) тогда и только тогда имеет периодическое решение, являющееся периодическим продолжением решения x^{**} уравнения (13), когда функция $\Delta(x_0, x^{**})$ как функция от x_0 при $x_0 \in I = \left[a + \frac{T}{4}(M-m), b - \frac{T}{4}(M-m)\right]$ имеет нули.

Функция $\Delta(x_0, x^{**})$ неизвестна. Поэтому на сегменте I рассмотрим помощные функции

$$\underline{\Delta}_n(x_0) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, u_n(t), v_n(t), u_n(t-\tau), v_n(t-\tau))\,\mathrm{d}t,$$

$$\bar{\Delta}_n(x_0) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, v_n(t), u_n(t), v_n(t-\tau), u_n(t-\tau))\,\mathrm{d}t.$$

Используя условия (2) и неравенств (8) и (14), получаем

$$(19)\qquad \begin{gathered} \underline{\Delta}_0(x_0) \leqq \underline{\Delta}_1(x_0) \leqq \ldots \leqq \underline{\Delta}_n(x_0) \leqq \Delta(x_0, x^{**}) \leqq \bar{\Delta}_n(x_0) \leqq \\ \leqq \ldots \leqq \bar{\Delta}_1(x_0) \leqq \bar{\Delta}_0(x_0) \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда:*

1. *Если $\underline{x}_0$ и $\bar{x}_0$ — нули соответственно функций $\underline{\Delta}_n(x_0)$ и $\bar{\Delta}_n(x_0)$, то функция $\Delta(x_0, x^{**})$ имеет по крайней мере один нуль x_0 на отрезке с концами $\underline{x}_0$ и $\bar{x}_0$ и следовательно уравнение* (1) *имеет периодическое решение, проходящее через точку (t_0, x_0) и являющееся периодическим продолжением решения x^{**} уравнения* (13).

2. *Если для некоторого n выполнено $\underline{\Delta}_n(x_0) > 0$ или $\bar{\Delta}_n(x_0) < 0$ при каждом $x_0 \in I$, то функция $\Delta(x_0, x^{**})$ не имеет нулей и следовательно уравнение* (1) *не имеет периодических решений, являющиеся периодическими продолжениями решения x^{**} уравнения* (13).

Доказательство следует из соотношений (19).

Замечание 1. Если существует число N такое, что функции $\underline{\Delta}_n(x_0)$ или $\overline{\Delta}_n(x_0)$ при $n \geqq N$ имеют нули на сегменте I, то функция $\underline{\Delta}(x_0, x^{**})$ имеет нули на сегменте I.

Замечание 2. Нули функции $\Delta(x_0, x^{**})$ являются точками сгущения нулей функций $\underline{\Delta}_n(x_0)$ или $\overline{\Delta}_n(x_0)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

ЛИТЕРАТУРА

Курпель, Н. С.: *О двусторонних приближениях к периодическим решениям дифференциальных уравнений*. Труды У Международ. конф. по нелин. колеб., I, Киев, 1970, 348—352.

Т. С. Николова
Пловдийский университет им. П. Хилендарского
Болгария

Д. Д. Байнов
Оборище 23
София — 4