Archivum Mathematicum

Drahoslava Radochová; Václav Tryhuk

Die asymptotischen Formeln für die Lösungen der kanonischen Differentialgleichung 3. Ordnung

Archivum Mathematicum, Vol. 16 (1980), No. 1, 51--58

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/107055

Terms of use:

© Masaryk University, 1980

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT; UJEP BRUNENSIS
XVI: 51—58, 1980

DIE ASYMPTOTISCHE FORMELN FÜR DIE LÖSUNGEN DER KANONISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNG 3. ORDNUNG

DRAHOSLAVA RADOCHOVÁ, VÁCLAV TRYHUK, Brno

(Eingegangen am 9. Oktober 1978)

1. EINLEITUNG

In diesem Artikel werden die asymptotische Formeln für die Lösungen der Differentialgleichung 3. Ordnung

(1) $$u''' - \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} u'' + [1 + \alpha^2(x)] u' - \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} u = 0,$$

wo $\alpha \in C^1(J)$ und $\alpha(x) > 0$ für alle $x \in J$ ist, abgeleiten. Die Gleichung (1) ist eine globale kanonische Gleichung, die zu einer linearen Differentialgleichung 3. Ordnung gehört. F. Neumann hat in [2] gezeigt, dass jede lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0,$$

$a_i \in C^0(J)$, $i = 1, 2, \dots, n$, J ist ein offenes Intervall, beschränkt oder unbeschränkt, lässt sich im ganzen Definitionsintervalle auf eine gewisse kanonische Gleichung, die von $n - 2$ positiven Funktionen $\alpha_i \in C^{n-i}(J)$ abhängt, überführen. Wenn $n = 3$ ist, bekommt man die Gleichung (1) (sehe [1]).

2. ASYMPTOTISCHE FORMELN

Mit den asymptotischen Eigenschaften von Lösungen der Differentialgleichungen haben sich mehrere Autoren, zum Beispiel M. Ráb, M. Švec, M. Zlámal, beschäftigen. Zur Ableitung der asymptotischen Formeln für die Lösungen der Differentialgleichung (1) benützen wir die bekannten Formeln, die in [5] für die perturbiete Differentialgleichung 3. Ordnung

(2) $$z''' + P_1(x) z'' + [4A(x) + P_2(x)] z' + [2A'(x) + P_3(x)] z = 0$$

abgeleitet sind.

Für die weiteren Untersuchungen führt man einen Hilfsatz, der in [5] abgeleitet ist.

Hilfsatz: *Die Funktionen* φ, $\Phi \in C^2(J)$, $J = \langle a, \infty)$ *seien positiv und für alle* $x \in J$ *sei* $\Phi'(x) > 0$. *Es sei*

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x)\,\varphi'(x) = 0 \tag{3}$$

und es gelte

$$\int_a^\infty \frac{[\varphi^2(x)\,\Phi'(x)]''}{\varphi^2(x)\,\Phi'(x)}\,dx < \infty. \tag{4}$$

Es sei Y_1, Y_2 *ein Hauptsystem von Lösungen der Differentialgleichung*

$$Y'' + B(x)\,Y = 0, \tag{5}$$

$B \in C^0(J)$ *und die Funktionen* $Y_1[\Phi]$, $Y_2[\Phi]$ *seien im Intervalle* J *beschränkt. Wenn*

$$\int_a^\infty |\,\varphi(x)\,\varphi''(x) + A(x)\,\varphi^2(x) - B[\Phi(x)]\,\Phi'^2(x)\,\varphi^2(x)\,|\,dx < \infty, \tag{6}$$

$$\int_a^\infty \varphi^4(x)\,\{|\,P_3(x)\,| + |\,P_2(x)\,|\,\Phi'(x) + |\,P_1(x)\,|\,[\Phi'^2(x) + |\,A(x)\,|]\}\,dx < \infty \tag{7}$$

ist, dann die Differentialgleichung (2) *hat ein Hauptsystem von Lösungen*

$$(S)\qquad \begin{cases} z_1 = \varphi^2(x)\,\{Y_1^2[\Phi(x)] + o(1)\}, \\ z_2 = \varphi^2(x)\,\{Y_1[\Phi(x)]\,Y_2[\Phi(x)] + o(1)\}, \\ z_3 = \varphi^2(x)\,\{Y_2^2[\Phi(x)] + o(1)\}. \end{cases}$$

Folgerung: Es seien die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt und sei $B(x) \equiv 1$ für alle $x \in J$. Wenn man das Hauptsystem von Lössungen der Gleichung (2) in der Form

$$Z_1 = z_1^2 + z_2^2, \qquad Z_2 = 2z_2, \qquad Z_3 = z_3^2 - z_1^2$$

schreibt, bekommt man das Hauptsystem

$$(S_1)\qquad \begin{cases} Z_1 = \varphi^2(x)\,\{1 + o(1)\}, \\ Z_2 = \varphi^2(x)\,\{\sin 2\Phi(x) + o(1)\}, \\ Z_3 = \varphi^2(x)\,\{\cos 2\Phi(x) + o(1)\}. \end{cases}$$

Lemma 1. *Es sei die kanonische Gleichung* (1) *gegeben, wo die Funktion* $\alpha \in C^3(J)$ *und für alle* $x \in J = \langle a, \infty)$ *positiv ist. Die Gleichung* (1) *geht durch*

$$u = z\,.\,\alpha^{1/3}(x) \tag{8}$$

in die Gleichung

$$z''' + z'\left[1 + \alpha^2 + \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)' - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right] + \tag{9}$$
$$+ z\left[\alpha\alpha' + \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)'' - \frac{2}{27}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3 - \frac{2}{3}(1 + \alpha^2)\frac{\alpha'}{\alpha}\right] = 0$$

über.

Beweis: Wenn man die nötigen Ableitungen der Funktion (8) macht und in die Gleichung (1) setzt, bekommt man nach kleiner Umformung die Gleichung

$$z''' + z'\left[\alpha^{-1}\alpha'' - \frac{4}{3}\alpha^{-2}\alpha'^2 + 1 + \alpha^2\right] +$$
$$+ z\left[\frac{1}{3}\alpha^{-1}\alpha''' - \alpha^{-2}\alpha'\alpha'' + \frac{16}{27}\alpha^{-3}\alpha'^3 - \frac{2}{3}\alpha'\alpha^{-1} + \frac{1}{3}\alpha\alpha'\right] = 0.$$

Aus den Beziehungen für die Ableitungen $\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)', \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)''$ findet man die Ausdrücke für $\frac{\alpha''}{\alpha}$ und $\frac{\alpha'''}{\alpha}$ und setzt sie in die letzte Gleichung. Darauss bekommt man die Gleichung (9).

Satz 1. *Sei die Funktion $\alpha \in C^3(J)$ und für alle $x \in J = \langle a, \infty)$ gelte $\alpha(x) > 0$. Die Funktionen $\varphi, \Phi \in C^2(J)$ seien positiv und für alle $x \in J$ sei auch $\Phi'(x) > 0$. Weiter seien die Voraussetzungen* (3), (4) *des Hilfssatzes erfüllt. Die Funktionen B, Y_1, Y_2 sollen dieselbe Bedeutung haben und derselben Bedingungen genügen wie im Hilfssatze. Es gelte*

$$\int_a^\infty \left| \varphi(x)\,\varphi''(x) + \frac{1}{4}[1 + \alpha^2(x)]\,\varphi^2(x) - B[\Phi(x)]\,\Phi'^2(x)\,\varphi^2(x) \right| dx < \infty, \tag{10}$$

$$\int_a^\infty \varphi^2(x)\left\{\left|\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)'' - \frac{2}{27}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3 - \frac{2}{3}(1 + \alpha^2)\frac{\alpha'}{\alpha}\right| + \right. \tag{11}$$
$$\left. + \left|\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)' - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right| \Phi'(x)\right\} dx < \infty.$$

Dann die kanonische Gleichung (1) *hat ein Hauptsystem von Lösungen u_1, u_2, u_3, in der Form*

$$u_i = \alpha^{1/3}(x)\,.\,z_i, \qquad i = 1, 2, 3,$$

dass heisst

$$u_1 = \alpha^{1/3}(x)\,\varphi^2(x)\,\{Y_1^2[\Phi(x)] + o(1)\},$$
$$u_2 = \alpha^{1/3}(x)\,\varphi^2(x)\,\{Y_1[\Phi(x)]\,Y_2[\Phi(x)] + o(1)\},$$
$$u_3 = \alpha^{1/3}(x)\,\varphi^2(x)\,\{Y_2^2[\Phi(x)] + o(1)\}.$$

Beweis: Die Gleichung (9) ist eine Gleichung derselben Art wie die Gleichung (2). Wenn man

$$4A(x) = 1 + \alpha^2(x)$$

setzt, bekommt man

$$A(x) = \frac{1}{4}[1 + \alpha^2(x)], \qquad 2A'(x) = \alpha(x)\,\alpha'(x).$$

Durch die Vergleichung der Koeffizienten der Gleichungen (9) und (2) bekommt man

$$P_1(x) \equiv 0, \qquad P_2(x) = \left[\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right]' - \frac{1}{3}\left[\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right]^2,$$

$$P_3(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right]'' - \frac{2}{27}\left[\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right]^{-3} - \frac{2}{3}[1 + \alpha^2(x)]\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}.$$

Wenn man diese Funktionen A und P_i, $i = 1, 2, 3$ in die Bedingungen (6), (7) des Hilfssatzes hinzusetzt, bekommt man die Ungleichungen (10) und (11), sodass (6), (7) gilt.

Weil auch die Funktionen φ, Φ, B, Y_1, Y_2 haben nach den Voraussetzungen des Satzes 1 dieselben Eigenschaften wie im Hilfssatze, kann man den Hilfsatz auf die Gleichung (9) benützen und ihres Hauptsystem von Lösungen in der Form (S) schreiben. Die Behauptung des Satzes 1 bekommt man dann aus der Gleichung (8).

Satz 2. *Es sei* $A(x) = \frac{1}{4}[1 + \alpha^2(x)]$, *wo die Funktion* $\alpha \in C^3(J)$, *für alle* $x \in J = \langle a, \infty)$ *positiv ist und gilt* $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2(x)}} = c < \infty$. *Es sei die Funktion* $B(x) \equiv 1$ *für alle* $x \in J$ *und es gelte*

$$\int_a^\infty \frac{1}{\alpha(x)}\left|\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right]^2 - \left[\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right]'\right| \mathrm{d}x < \infty, \tag{12}$$

$$\int_a^\infty \left\{\left|\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)'' - \frac{2}{27}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3 - \frac{2}{3}(1 + \alpha^2)\frac{\alpha'}{\alpha}\right| + \left|\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)' - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right|\right\} \mathrm{d}x < \infty. \tag{13}$$

Dann die kanonische Gleichung (1) *hat das Hauptsystem von Lösungen in der Form* $u_i = \alpha^{1/3}(x)\,.\,Z_i$, $i = 1, 2, 3$, *dass heisst*

$$u_1 = \frac{2\alpha^{1/3}(x)}{\sqrt{1 + \alpha^2(x)}}[1 + o(1)],$$

$$u_2 = \frac{2\alpha^{1/3}(x)}{\sqrt{1 + \alpha^2(x)}}\left[\sin\int_a^x \sqrt{1 + \alpha^2(t)}\,\mathrm{d}t + o(1)\right],$$

$$u_3 = \frac{2\alpha^{1/3}(x)}{\sqrt{1 + \alpha^2(x)}}\left[\cos\int_a^x \sqrt{1 + \alpha^2(t)}\,\mathrm{d}t + o(1)\right].$$

Beweis: Die Funktionen A, P_i, $i = 1, 2, 3$ sind dieselben wie im Satze 1. Man zeigt, dass für die Wahl der Funktionen

$$\varphi(x) = A^{-1/4}(x) = \left[\frac{1 + \alpha^2(x)}{4}\right]^{-1/4}; \quad . \Phi'(x) = A^{1/2}(x) = \frac{1}{2}[1 + \alpha^2(x)]^{1/2}$$

sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt, wenn die Voraussetzungen des Satzes 2 gelten.

Offensichtlich sind die Funktionen φ, Φ zweimal stetig differenzierbar im Intervalle $J = \langle a, \infty)$ und für alle $x \in J$ sind die Funktionen φ, Φ und Φ' positiv. Ferner ist

$$[\varphi^2(x)\,\Phi'(x)]' = \left\{\left[\frac{1 + \alpha^2(x)}{4}\right]^{-1/2}\left[\frac{1 + \alpha^2(x)}{4}\right]^{1/2}\right\}' = 0,$$

sodass (4) gilt.

Da $\varphi(x)\,\varphi'(x) = \frac{1}{2}[\varphi^2(x)]'$ ist, bekommt man, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)\,\varphi'(x) = = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}[\varphi^2(x)]' = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[\frac{1 + \alpha^2(x)}{4}\right]^{-1/2}\right\}' = \lim\limits_{x\to\infty}\{[1 + \alpha^2(x)]^{-1/2}\}' = 0$, weil nach der Voranssetzung $\lim\limits_{x\to\infty}[1 + \alpha^2(x)]^{-1/2} = c < \infty$ ist und die Bedingung (3) ist erfüllt.

Weiter hat man vorausgesetzt, dass $B(x) \equiv 1$ für alle $x \in J$. Wenn man die Ausdrücke für die Funktionen φ, Φ, A, B in die Ungleichung (6) hinzusetzt, bekommt man

$$I = \int_a^\infty \frac{1}{(1 + \alpha^2)^{3/2}}\left|\frac{5}{2}\frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}\alpha'^2 - \alpha'^2 - \alpha\alpha''\right| \mathrm{d}x.$$

Wenn man weiter betrachtet, dass $(1 + \alpha^2)^{-3/2} < \alpha^{-3}$ und $\alpha^2(1 + \alpha^2)^{-1} < 1$ ist, bekommt man

$$I < \int_a^\infty \frac{1}{\alpha^3}\left|\frac{5}{2}\alpha'^2 - \alpha'^2 - \alpha\alpha''\right| \mathrm{d}x = \int_a^\infty \frac{1}{\alpha}\left|\frac{3}{2}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 - \frac{\alpha''}{\alpha}\right| \mathrm{d}x.$$

Weil $\frac{\alpha''}{\alpha} = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)' + \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2$ ist, bekommt man

$$I < \int_a^\infty \frac{1}{\alpha}\left|\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)'\right| \mathrm{d}x$$

und dieses Integral konvergiert nach der Voraussetzung (12). Es gilt also (6).

Ob man in (7) die Ausdrücke für die Funktionen φ, Φ', A, P_i, $i = 1, 2, 3$ hinzusetzt, bekommt man

$$\int_a^\infty \frac{1}{1 + \alpha^2}\left\{\left|\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)'' - \frac{2}{27}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3 - \frac{2}{3}(1 + \alpha^2)\frac{\alpha'}{\alpha}\right| + \right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left|\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)' - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right|\Bigg\}\,dx <$$

$$< \int_a^\infty \left\{\left|\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)'' - \frac{2}{27}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3 - \frac{2}{3}(1+\alpha^2)\frac{\alpha'}{\alpha}\right| + \left|\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)' - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right|\right\}dx,$$

weil $(1 + \alpha^2)^{-1/2} < 1$ und $(1 + \alpha^2)^{-1} < 1$ ist. Das letzte Integral ist nach (13) konvergent und es gilt (7).

Also, alle Voraussetzungen des Hilfssatzes sind erfüllt. Ausserdem ist $B(x) \equiv 1$ und deswegen das Hauptsystem von Lösungen der Gleichung (9) hat die Gestalt (S_1). Wenn man beachtet, dass $\Phi'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \alpha^2(x)}$ und daher $\Phi(x) = \frac{1}{2}\int_a^x \sqrt{1 + \alpha^2(t)}\,dt$ ist, bekommt man aus (S_1) das Hauptsystem von Lösungen der Gleichung (9). Aus der Beziehung (8) gewinnt man die Behauptung des Satzes 2.

3. EINIGE SONDERFÄLLE

Beachten wir noch den Fall, wenn die Funktion α in der kanonischen Gleichung (1) ein Sondergestalt hat.

Wenn man voraussetzt, dass für alle $x \in J = \langle a, \infty)$ ist $\alpha(x) = \exp\{f(x)\}$, $f \in C^3(J)$, dann die Funktion α ist positiv und dreimal stetig differenzierbar im Intervalle J. Weiter ist

$$\alpha'(x) = f'(x)\exp\{f(x)\}, \qquad \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} = f'(x)$$

und die kanonische Gleichung (1) hat die Gestalt

$$(1') \qquad u''' - f'(x)\,u'' + [1 + \exp\{f(x)\}]\,u' - f'(x)\,u = 0.$$

Weil

$$\left[\frac{\alpha'(x)}{a(x)}\right]' = f''(x), \qquad \left[\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right]'' = f'''(x)$$

ist, geht die Gleichung (1') durch $u = z\exp\left\{\frac{1}{3}f(x)\right\}$ in die Gleichung

$$(9') \qquad z''' + z'\left[1 + \exp\{2f(x)\} + f''(x) - \frac{1}{3}f'^2(x)\right] +$$

$$+ z\left[f'(x)\exp\{2f(x)\} + \frac{1}{3}f'''(x) - \frac{2}{27}f'^3(x) - \frac{2}{3}[1 + \exp\{2f(x)\}]\,f'(x)\right] = 0$$

über. Die Gleichung (9') ist eine Gleichung derselben Art wie die Gleichung (2) und wenn man die Voraussetzungen mit passender Weise zubereitet, kann man die Sätze 1 und 2 auf die Gleichung (1′) benützen. Wenn man die in Ungleichungen (10) und (11) hinzusetzt, bekommt man diese Bedingungen in der Gestalt

$$(10') \int_a^\infty \left| \varphi(x)\,\varphi''(x) + \frac{1}{4}[1 + \exp\{2\ (x)\}]\,\varphi^2(x) - B[\Phi(x)]\,\Phi'^2(x)\,\varphi^2(x) \right| dx < \infty,$$

$$(11') \quad \int_a^\infty \varphi^4(x) \left\{ \left| \frac{1}{3} f'''(x) - \frac{2}{27} f'^3(x) - \frac{2}{3}[1 + \exp\{2f(x)\}]\,f'(x) \right| + \right.$$
$$\left. + \left| f''(x) - \frac{1}{3} f'^2(x) \right| \right\} dx < \infty.$$

'Die Funktion $\alpha(x) = \exp\{f(x)\}, f \in C^3(J)$, erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 1 und wenn man voraussetzt die Gültigkeit der Ungleichungen (10′), (11′) gilt für die Gleichung (1′) der Satz 1.

Wenn besonders $B(x) \equiv 1$ ist für alle $x \in J$ und die Voraussetzungen des Satzes 2 sind erfüllt, dann die Gleichung (1′) hat ein Hauptsystem von Lösungen, den man mit den Funktionen Sinus und Cosinus ausdrücken kann.

Wenn für alle $x \in J$ die Funktion $\alpha(x) = \exp\{f(x)\}$ ist, dann die Bedingung $\lim_{x\to\infty} [1 + \alpha^2(x)]^{-1/2} = \lim_{x\to\infty} [1 + \exp\{2f(x)\}]^{-1/2} =$ konst. ist immer erfüllt. Aus der Ungleichung (12) bekommt man die Ungleichung

$$(12') \quad \int_a^\infty \exp\{-f(x)\} \left| \frac{1}{2} f'^2(x) - f''(x) \right| dx < \infty$$

und die Voraussetzung (13) wird die Gestalt

$$(13') \quad \int_a^\infty \left\{ \left| \frac{1}{3} f'''(x) - \frac{2}{27} f'^3(x) - \frac{2}{3}[1 + \exp\{2f(x)\}]\,f'(x) \right| + \right.$$
$$\left. + \left| f''(x) - \frac{1}{3} f'^2(x) \right| \right\} dx < \infty$$

haben. Wenn die Funktionen α, f den Bedingungen (12′), (13′) genügen, kann man den Satz 2 für die kanonische Gleichung (1′) benützen und das Hauptsystem von Lösungen gewinnen.

Bemerkung: Mehrere Funktionen, die beschränkt oder unbeschränkt sind, erfüllen die Bedingungen des Satzes 2. Zum Beispiel

$$\alpha(x) = \exp\{-x^{-k}\},\ x > 0, k \geqq 1;$$
$$\alpha(x) = \operatorname{arctg} x,\ x > 0;\ \alpha(x) = \ln x,\ x > 1;$$
$$\alpha(x) = \sqrt[k]{x},\ x > 0,\ k = 1, 2, 3, \ldots, n;$$
$$\alpha(x) = x^{-1/2},\ x > 0 \text{ und andere.}$$

Beachten wir, zum Beispiel, die Gleichung

$$u''' - \frac{1}{2x} u'' + (1 + x)\,u' - \frac{1}{2x} u = 0, \qquad x \in \langle a, \infty), a > 0.$$

Dann $\alpha^2(x) = x$, $\alpha(x) = x^{1/2}$, $\alpha'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ ist und weiter

$$\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} = \frac{1}{2x}; \quad \left[\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right]' = -\frac{1}{2x^2}; \quad \left[\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right]'' = \frac{1}{x^3}.$$

Die Voraussetzung (12) ist erfüllt, weil das Integral

$$\int_a^\infty \frac{1}{\alpha(x)}\left|\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right]^2 - \left[\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right]'\right| dx = \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2x^2}\right| dx$$

ist konvergent. Die Bedingung (13) hat für die gegebene Funktion die Gestalt

$$\int_a^\infty \left\{\left|\frac{1}{3}\frac{1}{x^3} - \frac{2}{27}\frac{1}{8x^3} - \frac{2}{3}(1+x)\frac{1}{2x}\right| + \left|-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{4x^2}\right|\right\} dx <$$

$$< \int_a^\infty \left|\frac{1}{3}\frac{1}{x^3} - \frac{2}{27}\frac{1}{8x^3}\right| dx + \int_a^\infty \left[\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{12x^2}\right] dx.$$

Beide letzte Integrale sind konvergent und die Bedingung (13) ist erfüllt. Alle Voraussetzungen des Satzes 2 gelten und die gegebene Gleichung hat das Hauptsystem von Lösungen

$$u_1 = \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{1+x}}\{1 + o(1)\},$$

$$u_2 = \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{1+x}}\{\sin \int_a^x \sqrt{1+t^2}\,dt + o(1)\},$$

$$u_3 = \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{1+x}}\{\cos \int_a^x \sqrt{1+t^2}\,dt + o(1)\}.$$

LITERATUR

[1] Neuman, F.: *Oscilation in linear Differential Equations*, Proceedings Czechoslovak Conference on Differential Equations, Brno 1972, S. 119—125

[2] Neuman, F.: *Geometrical approach to linear differential equations of the n-th order*, Rendiconti di Matematica (3) Vol. 5, Serie VI

[3] Ráb, M.: *Über lineare Perturbationen eines Systems von linearen Differentialgleichungen;* Čech. mat. žurnal, 8 (83), 1958, Praha, S. 222—229

[4] Ráb, M.: *Asymptotische Formeln für die L sungen der Differentialgleichung* $y'' + Q(x)y = 0$, Čech. mat. žurnal 14 (89), 1964, Praha, S. 203—221

[5] Radochová, D.: *Asymptotické vzorce pro řešení lineární homogenní diferenciální rovnice 3. řádu*, Sborník VAAZ Brno, řada B, 1963, S. 73—81

[6] Švec, M.: *Asymptotische Darstellung der Lösungen der Differentialgleichung* $y^{(n)} + Q(x)y = 0$, $n = 3, 4$; Čech. mat. žurnal, T 12 (87), 1962, Praha, S. 572—581.

D. Radochová
613 00 Brno, Provazníkova 32
Tschechoslowakei

V. Tryhuk
665 01 Rosice, Husova 1006
Tschechoslowakei