ARCH. MATH. 4, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XIV: 227—234, 1978

OBSERVATIONS SUR L'INTRODUCTION D'UNE MÉTRIQUE DANS LE PLAN AFFIN

Le manuscrit du travail trouvé dans les papiers laissés par

A. SADE

(Présenté le 18 Janvier 1977)

La condition d'indépendance de la mesure de l'angle de deux directions quelconques de E_2 de l'ordre de ses cotés revient au fait que l'indicatrice de Finsler soit obligatoirement une conique à centre. Si cette conique est une ellipse la géométrie de E_2 est éuclidienne et si elle est une hyperbole, la géométrie correspondante est minkowskienne.

Le but de cette Note est de démontrer ce que j'ai énnoncé auparavant en utilisant *une propriété caractéristique des coniques à centre,* qui sera établie dans la suite. Dans ce mode on aboutit à définir la mesure de l'angle de deux directions de E_2 (qui fut définie premièrement par Finsler) d'une manière que je considère être la plus naturelle du point de vue géométrique.

I

Théorème. *Soit dans un plan un point fixe O et une courbe (C), régulière, qui ne passe pas par O. Soit encore deux rayons quelconques (OM_1) et (OM_2) qui touchent la courbe (C) dans les points M_1, respectif M_2, et encore N_1, N_2, les projections des points M_2 et M_1 sur ces rayons, faites selon les directions tangentes à (C) dans les points M_1, respectif M_2* (v. la figure). *Les coniques non dégénérées, à centre O, sont les seules courbes qui ont la propriété* (1) *de parallélisme des droites (M_1M_2) et (N_1N_2).*

Démonstration. Soit XOY un repère orthogonal avec le centre dans le point fixe O, et $F(X, Y) = 0$ l'équation de (C), qu'on suppose être variété différentiable de classe C^3. En notant $M_1(x, y)$ et $M_2(\lambda, \mu)$, y' et α les coefficients angulaires des tangentes à (C) en M_1 et M_2 respectivement, on a les équations suivantes:

$$(OM_1) \quad Y = \frac{y}{x} X; \qquad (OM_2) \quad Y = \frac{\mu}{\lambda} X;$$

$$(M_2N_1) \quad Y - \mu = y'(X - \lambda);$$

$$(M_1N_2) \quad Y - y = \alpha(X - x).$$

En intersectant les droites (OM_1) et (M_2N_1) d'un part, (OM_2) et (M_1N_2) d'autre part, on trouve pour N_1 et N_2 les coordonnées suivantes:

$$(N_1)\quad X = x\frac{\mu - \lambda y'}{y - xy'}, \qquad Y = y\frac{\mu - \lambda y'}{y - xy'};$$
$$(N_2)\quad X = \lambda\frac{y - \alpha x}{\mu - \alpha\lambda}, \qquad Y = \mu\frac{y - \alpha x}{\mu - \alpha\lambda}.$$

En imposant aux droites (M_1M_2) et (N_1N_2) la condition de parallélisme

$$\frac{\overline{ON_1}}{\overline{OM_1}} = \frac{\overline{ON_2}}{\overline{OM_2}} \tag{1}$$

et ayant en vue que ces rapports gardent leur valeur par projection sur les axes de coordonnées, la relation (1) peut être mise sous la forme

$$\frac{\mu - \lambda y'}{y - xy'} = \frac{y - \alpha x}{\mu - \alpha\lambda}. \tag{2}$$

Par considérations de régularité, il résulte qu'il faut avoir

$$\beta = \mu - \alpha\lambda \neq 0 \tag{3}$$

pour toutes les valeurs possibles de λ, μ, α, ce qui signifie que la tangente à (C) dans le point $M_2(\lambda, \mu)$ ne passe pas par O. On verra dans la suite que $\beta = 0$ correspond à un cas singulier.

En faisant en (2) la substitution

$$z = y - \alpha x, \tag{4}$$

on obtient

$$(xz + \lambda\beta)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - z^2 + \beta^2 = 0. \tag{5}$$

Il faut encore imposer la condition que la relation (1) soit vraie pour tout point $M_2 \in C$, ce qui revient à éliminer les paramètres λ et μ de (5) à l'aide des équations obtenues de (5) par dérivation. Pour ce but on met l'équation (5) sous la forme

$$xzz' + \beta^2 - z^2 = -\lambda\beta z', \tag{6}$$

d'où, par dérivation répétée, on obtient les équations

$$x(z')^2 + xzz'' - zz' = -\lambda\beta z'' \tag{7}$$

et

$$3xz'z'' + xzz''' = -\lambda\beta z''', \qquad \left(z' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},\ z'' = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2},\ z''' = \frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}x^3}\right). \tag{8}$$

De (8) et (7) on obtient, par division terme à terme, l'équation différentielle

$$\frac{z'''}{z''} = \frac{3xz'z'' + xzz'''}{x(z')^2 + xzz'' - zz'} \tag{9}$$

dont la solution générale représente l'ensemble de toutes les courbes (C) qui ont la propriété (1).

Une première intégration de l'équation (9) conduit à l'équation

$$K_1 z'' - [x(z')^2 + xzz'' - zz'] = 0 \tag{10}$$

où K_1 est une constante d'intégration. Compte tenu que l'équation (7) a été obtenue de (6) par dérivation, en intégrant de nouveau, on obtient de (10) l'équation

$$(K_1 - xz)\, z' + (z^2 + K_2) = 0, \tag{11}$$

où K_2 est une nouvelle constante d'intégration. Maintenant il est facile à voir que l'équation (11) est linéaire en $x' = 1/z'$ et donc, elle peut être mise sous la forme

$$x' - \frac{z}{z^2 + K_2} x + \frac{K_1}{z^2 + K_2} = 0. \tag{12}$$

Par conséquent, sa solution générale peut être écrite dans la forme

$$K_1 z + K_2 x = K_3 \sqrt{z^2 + K_2}, \tag{13}$$

ou

$$(K_1^2 - K_3^2)\, z^2 + 2K_1 K_2 xz + K_2^2 x^2 - K_3^2 K_2 = 0. \tag{13'}$$

Cette équation représente une famille de coniques dépendant de quatre paramètres K_1, K_2, K_3 et α, parmi lesquels les trois premiers sont essentiels. Vu que

$$\delta = -K_3^2 K_2^2; \qquad \Delta = K_3^4 K_2^3, \tag{14}$$

il résulte immédiatement que pour $K_3 = 0$, on a $\delta = \Delta = 0$ et donc l'équation (13′) représente une droite double par origine. Cette possibilité est exclue parce que la courbe (C) ne doit pas passer par O. De même, est exclue la possibilité $K_2 = 0$ pour le même motif.

En revenant avec la substitution (4), l'équation (13′) peut être écrite sous la forme

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - a_{00} = 0, \tag{15}$$

où

$$a_{11} = (\alpha K_1 - K_2)^2 - \alpha^2 K_3^2; \qquad a_{12} = K_1 K_2 - \alpha(K_1^2 - K_3^2); \tag{16}$$
$$a_{22} = K_1^2 - K_3^2; \qquad a_{00} = K_3^2 K_2.$$

Observations. 1° La solution générale (15) de l'équation différentielle (9) représente une famille de coniques à centre (les cas $K_2 = 0$ ou $K_3 = 0$ sont exclus).

Elle est bien déterminée jusqu'à une centre-affinité unimodulaire donnée par la transformation (4) qu'on peut la mettre dans la forme

$$\left\{\begin{aligned} x &= x \\ z &= y - \alpha x; \end{aligned}\right. \tag{4'}$$

cette transformation ne change pas le genre et la nature des solutions.

2° Il n'est pas essentiel d'éliminer le paramètre α en même temps que λ et μ; on peut constater qu'en éliminant tous les trois paramètres directement de (2) et de ses dérivées succesives, on obtient une équation différentielle d'ordre 3, qui a la forme

$$y'''(xy' - y) - 3x(y'')^2 = 0, \tag{17}$$

qu'on peut nommer *l'équation différentielle des coniques à centre*. En l'intégrant on obtient la solution générale

$$(C_1 + C_2^2C_3^2)\,x^2 - 2C_2^2C_3xy + C_2^2y^2 = C_2, \tag{18}$$

qui représente une famille de coniques non dégénérées de centre O, les cas d'exception étant obtenus pour $C_1 = 0$, ou pour $C_2 = 0$, quand on obtient des paraboles dégénérées.

3° On peut montrer que l'équation (13') peut représenter toute conique qui a le centre en origine. En effet, étant donnés trois nombres b_{11}, $2b_{12}$ et $b_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}^2 \neq 0)$ qui sont les trois coefficients essentiels de l'équation d'une conique à centre O, le système résultant par identification

$$K_1^2 - K_3^2 = b_{11}K_3^2K_2; \qquad K_1K_2 = b_{12}K_3^2K_2; \qquad K_2^2 = b_{22}K_3^2K_2;$$
$$(K_2 \neq 0; \quad K_3 \neq 0)$$

est toujours compatible, à solution unique,

$$K_1 = \frac{b_{12}}{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}}; \qquad K_2 = \frac{b_{22}}{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}}; \qquad K_3 = \frac{1}{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}}.$$

4° Réciproquement, si on considère une conique quelconque, non dégénérée, le centre étant situé dans l'origine, on peut constater que pour toute paire de directions par O, (OM_1) et (OM_2), les droites (M_1M_2) et (N_1N_2) sont parallèles; par conséquent, c'est une propriété caractéristique des coniques non dégénérées, à centre.

II

Dans la suite on va montrer comment en vertu des questions établies auparavant on peut introduire la métrique angulaire et la métrique des longueurs dans le plan affin. Vu que le groupe des translations n'altère pas les conclusions qui seront faites, on considère que tout point du plan est soumis seulement aux transformations (non singulières) appartenant au groupe centre-affin G_2^0.

Une direction orientée du plan sera représentée par une demi-droite portée par origine. Un couple de directions orientées définira un angle. Sa mesure sera définie comme une fonction de ses directions, indépendante de l'ordre de ces directions et invariante aux transformations de G_2^0.

Considerons une indicatrice (C). A deux directions (d_1) et (d_2) correspondent deux points M_1 et M_2 (v. la figure). En projetant les points M_1 et M_2 sur les cotès opposées de l'angle, selon les directions tangentes à (C), on construit les points N_1, N_2.

Maintenant on défine la mesure de l'angle des directions (d_1) et (d_2), par le rapport

$$\text{(19)} \qquad \text{mes} \sphericalangle (d_1, d_2) = \frac{\overline{ON_1}}{\overline{OM_1}}.$$

Pour que cette mesure soit indépendante de l'ordre des directions, c'est-à-dire

$$\text{mes} \sphericalangle (d_1, d_2) = \text{mes} \sphericalangle (d_2, d_1),$$

il faut que la relation (1) ait lieu. Il résulte alors, en vertu des questions établies en I, que l'indicatrice (C) doit être une conique à centre, dont l'équation sera écrite sous la forme

$$\text{(20)} \qquad g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2 = 1, \qquad (g_{12}^2 - g_{11}g_{22} \neq 0).$$

Maintenant il nous reste à démontrer que cette mesure est invariante aux transformations du groupe G_2^0. Pour ce but, notons les coordonnées des points M_1 et M_2 par ξ^i et η^i respectivement $(i = 1, 2)$. On a

$$\text{(21)} \qquad g_{ij}\xi^i\xi^j = 1, \qquad g_{ij}\eta^i\eta^j = 1, \qquad (g_{12} = g_{21}), \qquad (i, j = 1, 2).$$

En calculant les coefficients angulaires m_1 et m_2 des tangentes à (C) en M_1 et M_2, on obtient

$$\text{(22)} \qquad m_1 = -\frac{g_{11}\xi^1 + g_{12}\xi^2}{g_{12}\xi^1 + g_{22}\xi^2}, \qquad m_2 = -\frac{g_{11}\eta^1 + g_{12}\eta^2}{g_{12}\eta^1 + g_{22}\eta^2}.$$

Compte tenu de la valeur de (19) donnée par (2) et de (21), il résulte:

$$\text{mes} \sphericalangle (d_1, d_2) = \text{mes} \sphericalangle (d_2, d_1) = \frac{\xi^2 - m_2\xi^1}{\eta^2 - m_2\eta^1} = \frac{\eta^2 - m_1\eta^1}{\xi^2 - m_1\xi^1},$$

ou

$$\text{(23)} \qquad \text{mes} \sphericalangle (d_1, d_2) = g_{11}\xi^1\eta^1 + g_{12}(\xi^1\eta^2 + \xi^2\eta^1) + g_{22}\xi^2\eta^2.$$

Cette expression est la forme bilinéaire $g_{ij}\xi^i\eta^j$ attachée à la forme quadratique de (20) et par conséquent, elle est invariante aux transformations de G_2^0. .

Il résulte alors que la mesure de l'angle dépend seulement du genre de l'indicatrice (elliptique ou hyperbolique), vu que les transformations centre-affines gardent la signature des formes quadratiques.

Maintenant, on peut définir le produit scalaire de deux vecteurs. Pour ce but, on défine d'abord la longueur d'un vecteur $\boldsymbol{u} = (u^i)$ par le rapport

$$\| \boldsymbol{u} \| = \frac{u^i}{\xi^i}, \tag{24}$$

où ξ^i indique la direction du vecteur $\boldsymbol{u}$ par rapport à l'indicatrice (20) et l'indice „i" nous montre qu'en (24) on a considéré le rapport des composantes de même indice.

Soit maintenant $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs de directions ξ^i et η^i, respectivement. En vertu de la définition donnée auparavant, on a

$$\xi^i = \frac{u^i}{\| \boldsymbol{u} \|}, \qquad \eta^i = \frac{v^i}{\| \boldsymbol{v} \|}.$$

En les substituant en (23) on obtient

$$\text{mes} \sphericalangle (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{g_{ij} u^i v^j}{\| \boldsymbol{u} \| . \| \boldsymbol{v} \|}, \tag{25}$$

ou

$$g_{ij} u^i v^j = \| \boldsymbol{u} \| . \| \boldsymbol{v} \| . \text{mes} \sphericalangle (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}). \tag{25'}$$

Alors, on peut appeler l'expression (25') „produit scalaire des vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$" et la mesure de l'angle des vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, donnée par (25), sera nommée „le cosinus de l'angle des vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$".

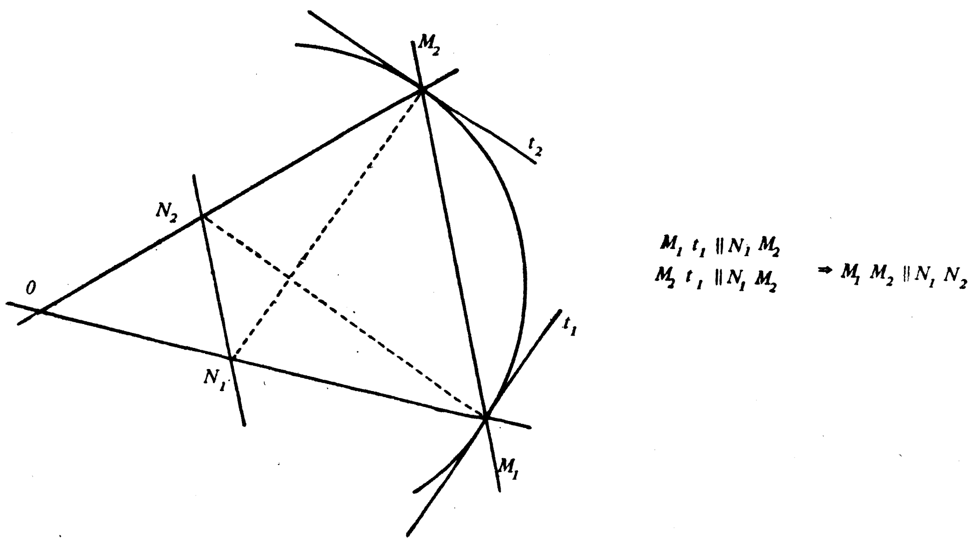

Fig. 1

Vu que mes $\sphericalangle\,(d_1, d_1) = 1$, ce qui résulte de (20), en faisant dans (25′) $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{v}$, on retrouve l'expression analytique de la longueur de $\boldsymbol{u}$:

$$\| \boldsymbol{u} \| = \sqrt{g_{ij} u^i u^j}.$$

L'exposé qu'on a fait peut constituer un schéma d'une possibilité d'introduction d'une métrique angulaire et de la métrique des longueurs dans le plan affin, sous forme de rapports simples mais en utilisant la notion de l'idicatrice. De plus, on a donné une justification accessible de l'idée que seulement la forme bilinéaire symétrique, attachée à une forme quadratique, est capable à fournir une mesure de l'angle qui soit indépendante de l'ordre des cotés et encore ayant un caractère affin. D'autre part, la propriété géométrique des coniques à centre, établie en **I**, constitue la plus simple justification du fait que seulement les formes quadratiques non dégénérées sont adéquates à l'introduction d'une métrique dans E_2.