Archivum Mathematicum

Stanislav Trávníček

Transformationen der Lösungen von Systemen mit gegebenem Element der Matrix $K(t)$

Archivum Mathematicum, Vol. 13 (1977), No. 4, 227--233

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106982

ARCH. MATH. 4, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XIII: 227—234, 1977

TRANSFORMATIONEN DER LÖSUNGEN VON SYSTEMEN MIT GEGEBENEM ELEMENT DER MATRIX K(t)

STANISLAV TRÁVNÍČEK, Olomouc

(Eingegangen am 7. Mai 1976)

In den Arbeiten [1] und [2] befaßte sich der Autor mit linearen Transformationen von Lösungen $y(t)$, $Y(T)$ zweier Systeme homogener linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} y_1' &= b(t)\, y_2 \\ y_2' &= c(t)\, y_1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \dot{Y}_1 &= B(T)\, Y_2 \\ \dot{Y}_2 &= C(T)\, Y_1, \end{aligned} \qquad \text{(A)}$$

mit $b,\ c \in C_0(j)$, $B,\ C \in C_0(J)$, in der Form

$$\text{(1)} \qquad (\mathbf{A}Y =)\, y(t) = K(t)\, Y[Z(t)].$$

Für die Matrix $K(t)$ und für die Anfangswerte-Matrix K_0 benutzen wir die Schreibweise

$$K(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix}, \qquad K_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix}.$$

Es wird angenommen, daß die Funktion $Z(t)$ ein Intervall $i \subset j$ auf ein Intervall $I \subset J$ und dabei einen gegebenen Punkt $t_0 \in i$ auf einen gegebenen Punkt $T_0 (= Z_0) \in \in I$ abbildet, $Z \in C_1(i)$, $Z'(t) \neq 0$ auf i; $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in C_1(i)$. Wir betrachten ein System

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} \alpha' &= \qquad\qquad -C[Z(t)]\, Z'(t)\, \beta + b(t)\, \gamma \\ \beta' &= -B[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha \qquad\qquad + b(t)\, \delta \\ \gamma' &= c(t)\, \alpha \qquad\qquad - C[Z(t)]\, Z'(t)\, \delta \\ \delta' &= \qquad\qquad c(t)\, \beta - B[Z(t)]'(t)\, \gamma. \end{aligned}$$

In [1] und [2] betrachtete man auch Spezialfälle der Transformation (1) insbesondere wenn irgendein Element der Matrix $K(t)$ identisch verschwindet (sog. Transformationen vom Typ A_α, A_β, A_γ bzw. A_δ).

Wir gehen von der gegebenen Funktion $\alpha \in C_3(i)$ aus. Bekanntlich, falls für alle $Y \in (A)$ ein $y \in (a)$ so besteht, daß (1) gilt, dann genügen die Elemente der Matrix $K(t)$

mit der Funktion $Z(t)$ dem System (2). Mit Hilfe dieses Systems sind wir nun in der Lage weitere Elemente der Matrix $K(t)$ auszudrücken und eine Beziehung für die Funktion $Z(t)$ abzuleiten.

Es werden zunächst folgende Voraussetzungen eingeführt:

(P): $Z \in C_3(i)$, $Z'(t) \neq 0$ *auf* i, $Z(i) = I \subset J$, $b \in C_2(j)$, $c \in C_1(j)$, $B \in C_1(J)$, $C \in C_2(J)$, $b(t) \neq 0$ *auf* i, $C(T) \neq 0$ *auf* I.

Der Einfachheit halber wird im weiteren das Argument t ausgelassen.

Aus der ersten Gleichung (2) folgt

$$\gamma = \frac{\alpha'}{b} + \frac{C(Z)}{b} Z'\beta, \tag{3}$$

aus der dritten Gleichung (2) folgt

$$\delta = -\frac{1}{C(Z)\,Z'}(\gamma' - c\alpha)$$

und Einsetzen von (3) liefert dann

$$\delta = \frac{1}{b}\left(\frac{b'}{b} - \frac{\dot{C}(Z)Z'}{C(Z)} - \frac{Z''}{Z'}\right)\beta - \frac{1}{b}\beta' - \frac{1}{bC(Z)\,Z'}\left(\alpha'' - \frac{b'}{b}\alpha' - bc\alpha\right). \tag{4}$$

Aus der zweiten Gleichung (2) folgt

$$\delta = \frac{1}{b}(\beta' + B(Z)\,Z'\alpha). \tag{5}$$

Der Vergleich von (4) mit (5) ergibt

$$\beta' - \frac{1}{2}\left(\frac{b'}{b} - \frac{\dot{C}(Z)\,Z'}{C(Z)} - \frac{Z''}{Z'}\right)\beta = \tag{6}$$
$$= -\frac{1}{2C(Z)\,Z'}\left(\alpha'' - \frac{b'}{b}\alpha' + (B(Z)\,C(Z)\,Z'^2 - bc)\,\alpha\right).$$

Durch die Methode der Variation der Konstanten erhält man

$$\beta = k\sqrt{\left|\frac{b}{C(Z)}\right|}\frac{1}{\sqrt{|Z'|}}, \tag{7}$$

mit

$$k' = -\sqrt{\left|\frac{C(Z)}{b}\right|}\sqrt{|Z'|}\frac{1}{2C(Z)\,Z'}\left(\alpha'' - \frac{b'}{b}\alpha' + (B(Z)\,C(Z)\,Z'^2 - bc)\,\alpha\right),$$

woraus nach Ausführung der Integration, Abänderung und Einsetzung in (7)

$$\beta = \sqrt{\left|\frac{b}{C(Z)}\right|}\frac{1}{\sqrt{|Z'|}}\left[m - \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2b}\sqrt{\left|\frac{b}{C(Z)}\right|}\frac{1}{\sqrt{|Z'|}} \operatorname{sgn} bCZ' \times \left(\alpha'' - \frac{b'}{b}\alpha' + (B(Z)\,C(Z)\,Z'^2 - bc)\,\alpha\right) \mathrm{d}t\right], \tag{8}$$

mit m als Integrationskonstante folgt. Die funktionen γ, δ erhält man dann unmittelbar aus der ersten, bzw. zweiten Gleichung (2) und aus (8):

$$\gamma = \frac{1}{b}(\alpha' + C(Z)\,Z'\beta), \qquad \beta \in (8), \tag{9}$$

$$\delta = \frac{1}{b}(\beta' + B(Z)\,Z'\alpha), \qquad \beta \in (8). \tag{10}$$

Durch Einsetzen von (8), (9), und (10) in die vierte Gleichung von (2) wird eine Bedingung gewonnen, die von der Funktion Z notwendig erfüllt wird (zur Abkürzung wird in der Schlußform der Bedingung für β nicht eingesetzt)

$$\begin{aligned} &2C(Z)\,Z'(-\{Z,t\} + Q_2(Z)\,Z'^2 - q_1)\,\beta - \alpha''' + \\ &+ \frac{3}{2}\left(\frac{b'}{b} + \frac{\dot{C}(Z)\,Z'}{C(Z)} + \frac{Z''}{Z'}\right)\alpha'' + \\ &+ \left(-2q_1 + 3(B(Z)\,C(Z)\,Z'^2 + bc) - \frac{3}{2}\frac{b'}{b}\left(\frac{\dot{C}(Z)\,Z'}{C(Z)} + \frac{Z''}{Z'}\right)\right)\alpha' + \\ &+ \left(\dot{B}(Z)\,C(Z)\,Z'^3 - B(Z)\,\dot{C}(Z)\,Z'^3 + bc' - b'c - \frac{3}{2}(B(Z)\,C(Z)\,Z'^2 - bc)\times\right. \\ &\left.\times\left(\frac{b'}{b} - \frac{\dot{C}(Z)\,Z'}{C(Z)} - \frac{Z''}{Z'}\right)\right)\alpha = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Wir schreiben

$$\{Z, t\} = \frac{1}{2}\frac{Z'''}{Z'} - \frac{3}{4}\frac{Z''^2}{Z'^2},$$

$$q_1(t) = -\frac{1}{2}\frac{b''(t)}{b(t)} + \frac{3}{4}\frac{b'^2(t)}{b^2(t)} + b(t)\,c(t),$$

$$Q_2(T) = -\frac{1}{2}\frac{\ddot{C}(T)}{C(T)} + \frac{3}{4}\frac{\dot{C}^2(T)}{C^2(T)} + B(T)\,C(T).$$

Es seien y_0, Y_0 die Anfangswerte der Lösungen y, Y im Punkt t_0 bzw. T_0; K_0 soll so gewählt werden, daß $y_0 = K_0 Y_0$ gelte. Dann ist aus (9) unter der Voraussetzung $\beta_0 \neq 0$, $\gamma_0 \neq \alpha'_0/b_0$ (b_0 steht hierbei für $b(t_0)$ u. ä.)

$$Z'_0 = \frac{b_0\gamma_0 - \alpha'_0}{C_0\beta_0} (\neq 0) \tag{12}$$

und aus (8)

$$m = \sqrt{\left|\frac{C_0}{b_0}\right|}\sqrt{|Z_0'|}\,\beta_0. \tag{13}$$

Aus (10) folgt $\beta_0' = b_0\delta_0 - B_0Z_0'\alpha_0$ und Einsetzen in (6) liefert

(14)

$$Z_0'' = -\frac{Z_0'}{\beta_0}\left(\alpha_0'' - \frac{b_0'}{b_0}\alpha_0' - (B_0C_0Z_0'^2 + b_0c_0)\alpha_0 + 2C_0Z_0'b_0\delta_0 - \frac{b_0'\beta_0}{b_0} + \frac{\dot{C}_0Z_0'\beta_0}{C_0}\right).$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 1. *Es sei $\alpha \in C_3(i)$ eine beliebig gegebene Funktion, es gelten die Voraussetzungen von* (*P*) *und es gebe eine Lösung $y \in (a)$ zu jeder Lösung $Y \in (A)$ so, daß* (1) *gilt* (*mit derselben Matrix $K(t)$ und Funktion $Z(t)$*)*. Es seien weiter U, u solche zwei entsprechende Lösungen und $\beta_0 \neq 0$, $\gamma_0 \neq \alpha_0'/b_0$, δ_0 seien beliebige Anfangswerte, für die $u_0 = K_0U_0$ ist. Dann ist die Funktion β durch* (8), *Funktion γ durch* (9), *Funktion δ durch* (10) *gegeben, die Funktion Z genügt der Gleichung* (11) *und es gelten* (12), (13), (14).

Satz 2. *Es sei $\alpha \in C_3(i)$ eine beliebig gegebene Funktion, es gelten die Voraussetzungen von* (*P*) *und $U(T)$ sei eine Lösung von System* (*A*)*, die auf j durch die Anfangsbedingung $U(T_0) = U_0$ definiert wird. Es sei weiter m eine beliebige Konstante, die Funktionen β, γ, δ seien mit Hilfe von* (8), (9), (10) *gegeben und die Funktion $Z(t)$ genüge auf i der Gleichung* (11) *und den Anfangsbedingungen $Z(t_0) = Z_0(= T_0)$, $Z'(t_0) = Z_0'$, $Z''(t_0) = Z_0''$,* wo *$Z_0' \neq 0$, Z_0'' gegebene Zahlen sind. Dann ist die durch die Gleichung*

$$u(t) = K(t)\,U[Z(t)] \tag{15}$$

gegebene Vektorfunktion $u(t)$ eine Lösung von System (*a*) *auf i, die durch die Anfangsbedingung $u(t_0) = K_0U_0$ mit $\alpha_0 = \alpha(t_0)$,*

$$\beta_0 = \sqrt{\left|\frac{b_0}{C_0}\right|}\frac{m}{\sqrt{|Z_0'|}}, \qquad \gamma_0 = \frac{1}{b_0}(\alpha_0' + C_0Z_0'\beta_0), \tag{16}$$

$$\delta_0 = \frac{1}{2b_0}\left(\frac{b_0'}{b_0} - \frac{\dot{C}_0Z_0'}{C_0} - \frac{Z_0''}{Z_0'}\right)\beta_0 - \frac{1}{b_0C_0Z_0'}\left(\alpha_0'' - \frac{b_0'}{b_0}\alpha_0' - (B_0C_0Z_0'^2 + b_0c_0)\alpha_0\right)$$

bestimmt ist.

B e w e i s: Durch Einsetzen überzeugen wir uns, daß die Funktion $\alpha(t)$ mit den Funktionen $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ aus (8), (9), (10) den ersten drei Gleichungen (2) genügen. Durch Anwendung der Bedingung (11) wird auch der vierten Gleichung Genüge getan. Nach [1] ist also die durch die Gleichung (15) gegebene Vektorfunktion $u(t)$ eine Lösung von System (a). Die Erfüllung der Beziehungen (16) für β_0 und γ_0 ist offenbar, bei δ_0 wenden wir (10), (6) für $t = t_0$ an.

Bemerkung 1. Aus (11) geht klar hervor, daß für $\alpha(t) \equiv 0$ die Funktion $Z(t)$ notwendig der Gleichung

$$(Q_2, q_1) \qquad -\{Z, t\} + Q_2(Z)\, Z'^2 = q_1(t)$$

genügt (siehe [1], [2]); die Funktionen $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ aus (8), (9), (10) stimmen natürlich überein mit (63) aus [2]. Aus (11) kann man ebenfalls sehen, daß die Umkehrung der Aussage nicht gilt; ist $Z(t)$ eine Lösung der DGl (Q_2, q_1), so ist die Funktion $\alpha(t)$ nicht notwendig Null, sondern eine Lösung der DGl

$$(17) \qquad \alpha''' - \frac{3}{2}\left(\frac{b'}{b} + \frac{\dot{C}(Z)\,Z'}{C(Z)} + \frac{Z''}{Z'}\right)\alpha'' -$$
$$-\left(-2q_1 + 3(B(Z)\,C(Z)\,Z'^2 + bc) - \frac{3}{2}\frac{b'}{b}\left(\frac{\dot{C}(Z)\,Z'}{C(Z)} + \frac{Z''}{Z'}\right)\right)\alpha' -$$
$$-\left(\dot{B}(Z)\,C(Z)\,Z'^3 - B(Z)\,\dot{C}(Z)\,Z'^3 + bc' - b'c - \frac{3}{2}(B(Z)\,C(Z)\,Z'^2 - bc)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{b'}{b} - \frac{\dot{C}(Z)\,Z'}{C(Z)} - \frac{Z''}{Z'}\right)\right)\alpha = 0.$$

Bemerkung 2. Die Gleichung (11) kann auch als Integro-Differentialgleichung angesehen werden, der für eine gegebene Funktion $Z(t)$ die Funktion $\alpha(t)$ genügen soll. Für $Z(t)$, die eine Lösung der Gleichung (Q_2, q_1) darstellt, geht diese Gleichung in die DGl (17) über und für $Z(t)$, die keine Lösung von (Q_2, q_1) ist, ist nach Ausführung der Differentiation von (11) nach t (unter erforderlicher Erweiterung der Voraussetzungen von (P)) und nach der Elimination von β eine DGl vierter Ordnung für die Funktion $\alpha(t)$ erreichbar. Sie lautet

$$(18) \qquad A_4\alpha^{(4)} + A_3\alpha''' + A_2\alpha'' + A_1\alpha' + A_0\alpha = 0.$$

Schreiben wir $\bar{Q}_2(t) = -\{Z, t\} + Q_2(Z)\, Z'^2$, $\bar{Q}_1(t) = -\{Z, t\} + Q_1(Z)\, Z'^2$, so

$$(19) \quad A_4 = \bar{Q}_2 - q_1,$$
$$A_3 = -(\bar{Q}_2' - q_1') - 2\left(\frac{b'}{b} + \frac{\dot{C}(Z)\,Z'}{C(Z)} + \frac{Z''}{Z'}\right)(\bar{Q}_2 - q_1),$$
$$A_2 = \frac{3}{2}\left(\frac{b'}{b} + \frac{\dot{C}(Z)\,Z'}{C(Z)} + \frac{Z''}{Z'}\right)(\bar{Q}_2' - q_1') + 4(\bar{Q}_2^2 - q_1^2) -$$
$$-\,3(\bar{Q}_2 - q_1)\left(2bc + 2B(Z)\,C(Z)\,Z'^2 - \frac{b'}{b}\frac{\dot{C}(Z)\,Z'}{C(Z)} - \frac{b'}{b}\frac{Z''}{Z'}\right),$$

$$A_1 = 2(\bar{Q}_2 q_1' - \bar{Q}_2' q_1) + \frac{3}{2}\left(2bc + 2B(Z)\,C(Z)\,Z'^2 - \frac{b'}{b}\frac{\dot{C}(Z)\,Z'}{C(Z)} - \frac{b'}{b}\frac{Z''}{Z'}\right)\times$$

$$\times(\bar{Q}_2' - q_1') - 4(\bar{Q}_2 - q_1)\left(\frac{b'}{b}\bar{Q}_2 + \frac{\dot{C}(Z)\,Z'}{C(Z)}q_1 + \frac{Z''}{Z'}q_1\right) +$$

$$+ 2(\bar{Q}_2 - q_1)\left(3bc\frac{\dot{C}(Z)\,Z'}{C(Z)} + 3bc\frac{Z''}{Z'} + 3\frac{b'}{b}B(Z)\,C(Z)\,Z'^2 -\right.$$

$$\left. - B(Z)\,\dot{C}(Z)\,Z'^3 - 3B(Z)\,\dot{C}(Z)\,Z'Z'' - b'c - 2bc' - 2\dot{B}(Z)\,C(Z)\,Z'^3\right),$$

$$A_0 = \frac{1}{2}(\bar{Q}_2' - q_1')\left(3\frac{b'}{b}B(Z)\,C(Z)\,Z'^2 + 3bc\frac{\dot{C}(Z)\,Z'}{C(Z)} +\right.$$

$$\left. + 3bc\frac{Z''}{Z'} - 2\dot{B}(Z)\,C(Z)\,Z'^3 - 3\dot{B}(Z)\,C(Z)\,Z'Z'' - 2bc' - B(Z)\,\dot{C}(Z)\,Z'^3 - b'c\right) +$$

$$+ 4(\bar{Q}_2^2 - q_1^2)(B(Z)\,C(Z)\,Z'^2 + bc) - 6(\bar{Q}_2 - q_1)(B(Z)\,C(Z)\,Z'^2\bar{Q}_2 - bcq_1) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\bar{Q}_2 - q_1)\left(\left(6B^2(Z)\,C^2(Z) + 2\dot{B}(Z)\,\dot{C}(Z) + B(Z)\frac{\dot{C}^2(Z)}{C(Z)} +\right.\right.$$

$$\left. + 3\frac{\dot{B}^2(Z)}{B(Z)}C(Z)\right)Z'^4 + 6b^2c^2 + 2b'c' + \frac{b'^2}{b}c + 3b\frac{c'^2}{c} -$$

$$- 12bcB(Z)\,C(Z)\,Z'^2 + 4B(Z)\,\dot{C}(Z)\,Z'^2Z'' + 8\dot{B}(Z)\,C(Z)\,Z'^2Z'' +$$

$$+ 6B(Z)\,C(Z)\,Z''^2 - 2(2bc' + b'c)\left(\frac{\dot{C}(Z)\,Z'}{C(Z)} + \frac{Z''}{Z'}\right) -$$

$$- 2\frac{b'}{b}(2\dot{B}(Z)\,C(Z)\,Z'^3 + B(Z)\,\dot{C}(Z)\,Z'^3 + 3\dot{B}(Z)\,C(Z)\,Z'Z'') -$$

$$\left. - 4B(Z)\,C(Z)\,Z'^2\bar{Q}_1 - 4bcq_2\right).$$

Wir erreichen dasselbe Ergebnis, indem wir das gegebene System (2) unmittelbar mit der bekannten Methode (vgl. etwa [3], S. 48) auf die DGl bezüglich $\alpha(t)$ überführen.

Bemerkung 3. Ist die Funktion $\alpha(t)$ nicht gegeben, sondern ein anderes Element der Matrix $K(t)$, so erhalten wir die entsprechenden Formeln wie folgt:

Für die gegebene Funktion $\beta(t)$ vertauschen wir in den Formeln (8), (9), (10), (11) $\alpha(t)$ und $\beta(t)$, $\gamma(t)$ und $\delta(t)$, $B(T)$ und $C(T)$, d. h. auch $Q_1(T)$ und $Q_2(T)$.

Für die gegebene Funktion $\gamma(t)$ vertauschen wir in allen Formeln $\alpha(t)$ und $\gamma(t)$, $\beta(t)$ und $\delta(t)$, $b(t)$ und $c(t)$, d. h. auch $q_1(t)$ und $q_2(t)$.

Für die gegebene Funktion $\delta(t)$ vertauschen wir in allen Formen) $\alpha(t)$ und $\delta(t)$, $\beta(t)$ und $\gamma(t)$, $b(t)$ und $c(t)$, $B(T)$ und $C(T)$, d. h. auch $Q_1(T)$ und $Q_2(T)$, $q_1(t)$ und $q_2(t)$.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Травничек С.: *О преобразованиях решений систем двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка.* „Acta UPO", F. R. N. т. 9, 1962, S. 151—162.

[2] Trávníček S.: *Splývání speciálních transformací a jeho souvislost s teorií dispersí.* „Acta UPO", F. R. N. t. 27, S. 69—91.

[3] Sansone G.: *Equazioni differenziali nel campo reale I* (in Russisch). ИЛ, Москва 1953.

S. Trávníček
772 00 Olomouc, Foerstrova 24
Tschechoslowakei