T. St. Nikolova; Drumi Dimitrov Bajnov

Краевая задача с параметрами для дифференциальных уравнений сверхнейтрального типа

Archivum Mathematicum, Vol. 13 (1977), No. 4, 201--206

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106980`

ARCH. MATH. 4, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XIII: 201—206, 1977

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СВЕРХНЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Т. СТ. НИКОЛОВА, Д. Д. БАЙНОВ

(Поступило в редакцию 29-го марта 1976 г.)

Рассмотрим следующую краевую задачу

(1) $\ddot{x}(t) = A\lambda + B\mu + f[t, x(t), x(\tau^{x(t)}), \dot{x}(t), \dot{x}(\tau^{x(t)}), \ddot{x}(\tau^{x(t)}), \lambda, \mu], 0 \leqq t \leqq T$

(2) $x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_0'$

(3) $x(T) = x_T, \quad \dot{x}(T) = x_T'.$

Здесь t — скалярный аргумент, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — искомая вектор-функция, f — заданная вектор-функция, A и B — постоянные обратимые матрицы размерностями $n \times n$, λ и μ — векторные параметры; преобразованный аргумент $\tau^{x(t)}$ имеет вид

$$\tau^{x(t)} = \tau(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)).$$

Отметим, что в связи с большим теоретическим и практическим значением краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом с параметрами, эти задачи стали предметом изучения многими авторами ([1]–[8] и другие).

Будем предполагать, что краевая задача (1), (2), (3) рассматривается при выполнении следующих условий, обозначенных через (Д):

Д1. Функции $f(t, u, v, u_1, v_1, v_2, \lambda, \mu)$ и $\tau(t, u, u_1, u_2)$ определены соответственно в областях

$$G_f = [0, T] \times G_1 \times G_1 \times G_2 \times G_2 \times G_3 \times R_0 \times R_1$$
$$G_\tau = [0, T] \times G_1 \times G_2 \times G_3,$$

где

$$G_i = \{\zeta : |\zeta| \leqq g_i\}, \ i = 1, 2, 3 \ (g_i = \text{const} > 0)$$
$$R_0 = \{\lambda : |\lambda| \leqq \varrho\}, \ R_1 = \{\mu : |\mu| \leqq \varrho'\} \ (\varrho, \varrho' = \text{const} > 0)$$

($|\,.\,|$ — некоторая норма в соответствующем конечномерном пространстве).

Д2. Существует неотрицательная интегрируемая на отрезке $[0, T]$ функция $F(t)$ такая, что

$$F_0 = \sup_{t \in [0, T]} F(t) \leqq g_3;$$

$$|x_0'| + \int_0^T F(t) \, dt \leqq g_2;$$

$$|x_0| + |x_0'| T + \int_0^T \left[\int_0^t F(s) \, ds \right] dt \leqq g_1.$$

Д3. В области G_f функция $f(t, u, v, u_1, v_1, v_2, \lambda, \mu)$ удовлетсворяет условию Липшица по всем аргументам кроме λ и μ с константой L и неравенству

$$|A| \varrho + |B| \varrho' + \sup_{(u, v, u_1, v_1, v_2, \lambda, \mu) \in G_1 \times G_1 \times G_2 \times G_2 \times G_3 \times R_0 \times R_1} |f(t, u, v, u_1, v_1, v_2, \lambda, \mu)| \leqq$$
$$\leqq F(t).$$

Д4. В области G_τ функция $\tau(t, u, u_1, u_2)$ удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам с константой M и неравенствам

$$0 \leqq \tau^{x(t)} \leqq T.$$

Пусть $C^n[0, T]$ — пространство непрерывных n-мерных функций $z : [0, T] \to$ $\to R^n$ (R — вещественная ось) с метрикой порожденной нормой:

$$\| z \| = \sup_{t \in [0, T]} | z(t) |$$

и пусть Ω — множество всех функций $z \in C^n[0, T]$, удовлетворяющих условиям

$$|z(t)| \leqq F(t), \quad t \in [0, T] \tag{4}$$

$$|z(t) - z(\bar{t})| \leqq K |t - \bar{t}|; \quad t, \bar{t} \in [0, T] \tag{5}$$

Решением задачи (1), (2) будем называть такую два раза дифференцируемую на интервале $[0, T]$ функцию $x(t)$, удовлетворяющую уравнению (1) и условию (2), вторая производная которой принадлежит Ω.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (Д) и неравенства*

$$L[1 + |x_0'| + F_0 T + F_0 + M(|x_0'| + F_0 T + F_0 + K)$$
$$(1 + |x_0'| + F_0 T + F_0 + K)] \leqq K \tag{6}$$

$$q = L\left[T^2 + 2T + 1 + M(|x_0'| + F_0 T + F_0 + K)\left(\frac{T^2}{2} + T + 1\right)\right] < 1. \tag{7}$$

Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение.

Доказательство. Пусть оператор Π действует в Ω по формуле

$$\Pi z(t) = A\lambda + B\mu + f[t, x(t), x(\tau^{x(t)}), y(t), y(\tau^{x(t)}), z(\tau^{x(t)}), \lambda, \mu],$$

где

$$(8)\qquad \begin{aligned} y(t) &= x_0' + \int_0^t z(s)\,\mathrm{d}s, \\ x(t) &= x_0 + x_0' t + \int_0^t \left[\int_0^s z(u)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Задача (1), (2) эквивалентна операторному уравнению $\Pi z = z$.

Покажем, что $\Pi\Omega \subset \Omega$. Действительно, из Д3 следует, что функция Πz удовлетворяет условию (4) при $z \in \Omega$.

Используя (8), Д4 и Д3 получаем последовательно

$$(9)\qquad \begin{gathered} |x(t) - x(\bar t)| \leqq (|x_0'| + F_0 T)|t - \bar t|; \\ |y(t) - y(\bar t)| \leqq F_0 |t - \bar t|; \\ |\tau^{x(t)} - \tau^{x(\bar t)}| \leqq M(1 + |x_0'| + F_0 T + F_0 + K)|t - \bar t|; \\ |\Pi z(t) - \Pi z(\bar t)| \leqq L[1 + |x_0'| + F_0 T + F_0 + M \\ (|x_0'| + F_0 T + F_0 + K)(1 + |x_0'| + F_0 T + F_0 + K)] \,.\, |t - \bar t|. \end{gathered}$$

Дальше из условия (6) следует, что выполнено и условие (5). Следовательно $\Pi\Omega \subset \Omega$.

Покажем еще, что Π — сжимающий оператор на множестве Ω. Действительно, пусть $z, \bar z \in \Omega$ и пусть $\bar x$ и $\bar y$ соответствуют $\bar z$ по формулам (8). Тогда из (8), Д4 и Д34 следует

$$\begin{gathered} |y(t) - \bar y(t)| \leqq T \| z - \bar z \|; \\ |x(t) - \bar x(t)| \leqq \frac{T^2}{2} \| z - \bar z \|; \\ |\tau^{x(t)} - \tau^{\bar x(t)}| \leqq M\left(\frac{T^2}{2} + T + 1\right) \| z - \bar z \|; \\ |\Pi z(t) - \Pi \bar z(t)| \leqq \\ \leqq L\left[T^2 + 2T + 1 + M(|x_0'| + F_0 T + F_0 + K)\left(\frac{T^2}{2} + T + 1\right)\right] \| z - \bar z \|, \end{gathered}$$

т. е.

$$\| \Pi z - \Pi \bar z \| \leqq q \| z - \bar z \|.$$

Согласно (7) $q < 1$.

Все условия принципа Банаха о неподвижной точке оператора Π выполнены. Следовательно для каждой пары $(\lambda, \mu) \in R_0 \times R_1$ существует единственная неподвижная точка оператора Π, т. е. единственное решение задачи (1), (2). Решение задачи (1), (2), соответствующее пары (λ, μ), будем обозначать через $x(t, \lambda, \mu)$ (соответственно первую и вторую производную решения будем обозначать через $\dot{x}(t, \lambda, \mu)$ и $\ddot{x}(t, \lambda, \mu)$.

Теорема 2. *Пусть:*

1. *Выполнены условия теоремы* 1.
2. *Существующее решение* $x(t, \lambda, \mu)$ *задачи* (1), (2) *удовлетворяет условиям*

$$
\begin{aligned}
&|x(t, \lambda, \mu) - x(t, \bar{\lambda}, \bar{\mu})| \leqq \delta_1 |\lambda - \bar{\lambda}| + \delta_2 |\mu - \bar{\mu}|;\\
&|\dot{x}(t, \lambda, \mu) - \dot{x}(t, \bar{\lambda}, \bar{\mu})| \leqq \delta_1' |\lambda - \bar{\lambda}| + \delta_2' |\mu - \bar{\mu}|;\\
&|\ddot{x}(t, \lambda, \mu) - \ddot{x}(t, \bar{\lambda}, \bar{\mu})| \leqq \delta_1'' |\lambda - \bar{\lambda}| + \delta_2'' |\mu - \bar{\mu}|.
\end{aligned} \tag{10}
$$

3.

$$
\max\left\{2T^{-2}|A^{-1}|\left[|x_T| + |x_0| + T|x_0'| + \frac{T^2}{2}F_0 - \frac{T^2}{2}|A|\varrho\right],\right.
$$

$$
\left. T^{-1}|B^{-1}|\,.\,[|x_T'| + |x_0'| + TF_0 - T|B|\varrho']\right\} \leqq \gamma = \min\{\varrho, \varrho'\}. \tag{11}
$$

4. *В области* G_f *функция* $f(t, u, v, u_1, v_1, v_2, \lambda, \mu)$ *удовлетворяет условию Липшица по* λ *и* μ *с константой* L.

5.

$$
\begin{aligned}
p = \max\{&|A^{-1}|\,[|B| + L(2\delta_1 + 2\delta_1' + \delta_1'' + 2 + 2\delta_2 + 2\delta_2' + \delta_2'' +\\
&+ M(|x_0'| + F_0T + F_0 + K)(\delta_1 + \delta_1' + \delta_1'' + \delta_2 + \delta_2' + \delta_2''))],\\
&|B^{-1}|\,[|A| + L(2\delta_1 + 2\delta_1' + \delta_1'' + 2 + 2\delta_2 + 2\delta_2' + \delta_2'' +\\
&+ M(|x_0'| + F_0T + F_0 + K)(\delta_1 + \delta_1' + \delta_1'' + \delta_2 + \delta_2' + \delta_2''))]\} < 1.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Тогда существует единственное решение краевой задачи (1), (2), (3).

Доказательство. Краевая задача (1), (2), (3) эквивалентна системе

$$
\begin{aligned}
\lambda = 2T^{-2}A^{-1}\Big\{&x_T - x_0 - Tx_0' - \frac{T^2}{2}B\mu - \int_0^T (T - s)\, f[s, x(s, \lambda, \mu), x(\tau^{x(s, \lambda, \mu)}, \lambda, \mu),\\
&\dot{x}(s, \lambda, \mu), \dot{x}(\tau^{x(s, \lambda, \mu)}, \lambda, \mu), \ddot{x}(\tau^{x(s, \lambda, \mu)}, \lambda, \mu), \lambda, \mu]\, \mathrm{d}s\Big\},\\
\mu = T^{-1}B^{-1}\Big\{&x_T' - x_0' - TA\lambda - \int_0^T f[t, x(t, \lambda, \mu), x(\tau^{x(t, \lambda, \mu)}, \lambda, \mu),\\
&\dot{x}(t, \lambda, \mu), \dot{x}(\tau^{x(t, \lambda, \mu)}, \lambda, \mu), \ddot{x}(\tau^{x(t, \lambda, \mu)}, \lambda, \mu), \lambda, \mu]\, \mathrm{d}t\Big\}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Докажем однозначную разрешимость системы (13).

Вводим обозначения

$$w = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(w) =$$

$$= \begin{bmatrix} 2T^{-2}A^{-1}\Big\{x_T - x_0 - Tx'_0 - \frac{T^2}{2}B\mu - \int_0^T (T-s) f[s, x(s,\lambda,\mu), x(\tau^{x(s,\lambda,\gamma)}, \lambda, \mu), \\ \dot{x}(s,\lambda,\mu), \dot{x}(\tau^{x(s,\lambda,\mu)}, \lambda, \mu), \ddot{x}(\tau^{x(s,\lambda,\mu)}, \lambda, \mu), \lambda, \mu]\,\mathrm{d}s\Big\} \\ T^{-1}B^{-1}\Big\{x'_T - x'_0 - TA\lambda - \int_0^T f[t, x(t,\lambda,\mu), x(\tau^{x(t,\lambda,\mu)}, \lambda, \mu), \dot{x}(t,\lambda,\mu), \\ \dot{x}(\tau^{x(t,\lambda,\mu)}, \lambda, \mu), \ddot{x}(\tau^{x(t,\lambda,\mu)}, \lambda, \mu), \lambda, \mu]\,\mathrm{d}t\Big\} \end{bmatrix}$$

и норму $\| w \|_1 = \max(|\lambda|, |\mu|)$. Обозначаем через W множество векторов $w = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}(|\lambda| < \varrho, |\mu| < \varrho')$, для которых выполнено $\| w \|_1 \leqq \gamma$.

Система (13) эквивалентна операторному уравнению

$$w = \Gamma(w)\,. \tag{14}$$

Пусть $w \in W$. Тогда из Д3 и (11) следует

$$\| \Gamma(w) \|_1 = \max\Big\{\Big| 2T^{-2}A^{-1}\Big[x_T - x_0 - Tx'_0 - \frac{T^2}{2}B\mu - \int_0^T (T-s) f(s, x(s,\lambda,\mu),$$
$$x(\tau^{x(s,\lambda,\mu)}, \lambda, \mu), \dot{x}(s,\lambda,\mu), \dot{x}(\tau^{x(s,\lambda,\mu)}, \lambda, \mu), \ddot{x}(\tau^{x(s,\lambda,\mu)}, \lambda, \mu), \lambda, \mu)\,\mathrm{d}s\Big]\Big|,$$
$$| T^{-1}B^{-1}[x'_T - x'_0 - TA\lambda - \int_0^T f(t, x(t,\lambda,\mu), x(\tau^{x(t,\lambda,\mu)}, \lambda, \mu), \dot{x}(t,\lambda,\mu),$$
$$\dot{x}(\tau^{x(t,\lambda,\mu)}, \lambda, \mu), \ddot{x}(\tau^{x(t,\lambda,\mu)}, \lambda, \mu), \lambda, \mu)\,\mathrm{d}t] |\Big\} \leqq$$
$$\leqq \max\Big\{2T^{-2} | A^{-1} | \Big[| x_T | + | x_0 | + T | x'_0 | + \frac{T^2}{2}F_0 - \frac{T^2}{2} | A | \varrho\Big],$$
$$T^{-1} | B^{-1} | [| x'_T | + | x'_0 | + TF_0 - T | B | \varrho']\Big\} \leqq \gamma,$$

т. е. $\Gamma W \subset W$.

Если $w = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in W$ и $\bar{w} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \in W$, согласно Д4, (10), Д3, условия (4) теоремы 2, (5) и (9), после некоторых выкладок, получаем

$$| \tau^{x(t,\lambda,\mu)} - \tau^{x(t,\bar{\lambda},\bar{\mu})} | \leqq M[(\delta_1 + \delta'_1 + \delta''_1) | \lambda - \bar{\lambda} | + (\delta_2 + \delta'_2 + \delta''_2) | \mu - \bar{\mu} |];$$

$$\| \Gamma(w) - \Gamma(\bar{w}) \|_1 \leqq \max \Bigg\{ 2T^{-2} | A^{-1} | \Bigg[\frac{T^2}{2} | B | | \mu_1 - \mu_2 | +$$

$$+ L \int_0^T (T - s)(| x(s, \lambda, \mu) - x(s, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) | + | x(\tau^{x(s, \lambda, \mu)}, \lambda, \mu) - x(\tau^{x(s, \bar{\lambda}, \bar{\mu})}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) | +$$

$$+ | \dot{x}(s, \lambda, \mu) - \dot{x}(s, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) | + | \dot{x}(\tau^{x(s, \lambda, \mu)}, \lambda, \mu) - \dot{x}(\tau^{x(s, \bar{\lambda}, \bar{\mu})}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) | +$$

$$+ | \ddot{x}(\tau^{x(s, \lambda, \mu)}, \lambda, \mu) - \ddot{x}(\tau^{x(s, \bar{\lambda}, \bar{\mu})}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) + | \lambda - \bar{\lambda} | + | \mu - \bar{\mu} |) \, ds \Bigg],$$

$$T^{-1} | B^{-1} | \Big[T | A | | \lambda - \bar{\lambda} | + L \int_0^T (| x(s, \lambda, \mu) - x(s, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) | +$$

$$+ | x(\tau^{x(s, \lambda, \mu)}, \lambda, \mu) - x(\tau^{x(s, \bar{\lambda}, \bar{\mu})}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) | + | \dot{x}(s, \lambda, \mu) - \dot{x}(s, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) | +$$

$$+ | \dot{x}(\tau^{x(s, \lambda, \mu)}, \lambda, \mu) - \dot{x}(\tau^{x(s, \bar{\lambda}, \bar{\mu})}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) | + | \ddot{x}(\tau^{x(s, \lambda, \mu)}, \lambda, \mu) - \ddot{x}(\tau^{x(s, \bar{\lambda}, \bar{\mu})}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) | +$$

$$+ | \lambda - \bar{\lambda} | + | \mu - \bar{\mu} |) \, ds \Big] \Bigg\} \leqq p \, \| w - \bar{w} \|_1 .$$

По условию (12) $p < 1$. Следовательно Γ — оператор сжатия на множестве W.

Согласно принципа сжатых отображений операторное уравнение (14) имеет единственное решение.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Каменский Г. А.: *О существовании и единственности решений краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Труды сем. по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом, т. У, 1967, 107—108.

[2] Облогина Т. И.: *Краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом*, Труды сем. по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом, т. II, 1963, 234—237.

[3] Исраилов И.: *Об одной краевой задаче с параметром для дифференциально-зкстремальных уравнений с запаздывающим аргументом*, Уч. зап. АГУ, 4, 1968.

[4] Исраилов И.: *Об одной краевой задаче с параметром для дифференциально-зкстремальных уравнений с авторегулируемым запаздыванием*, Т. Самаркандского университета, вып. 202, 1972, 71—81.

[5] Сеидов З. Б.: *Краевая задача с параметром для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*, Уч. зап. АГУ, сер. физ.-мат. наук, № 1, 1973, 53—60.

[6] Сеидов З. Б.: *Краевая задача для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*, Сиб. мат. журнал, т. XIV, № 2, 1973.

[7] Бенсаад Х., Норкин С. Б.: *Краевая задача с управлением в начальной функции для нелинейных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*, УМЖ, т. 26, № 1, 1974.

[8] Сеидов З. Б.: *Краевая задача с параметром для систем дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом*, УМЖ, т. 26, 5, 1974.

Т. Ст. Николова

Д. Д. Байнов
София—4, Оборище 23
Болгария