Archivum Mathematicum

Syméon Bozapalides

Les fins cartésiennes généralisées

Archivum Mathematicum, Vol. 13 (1977), No. 2, 75--87

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106961`

ARCH. MATH. 2, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XIII: 75—88, 1977

LES FINS CARTÉSIENNES GÉNÉRALISÉES

SYMÉON BOZAPALIDES

(Received October 8, 1976)

On généralise les fins cartésiennes [1] afin de donner un construction universelle de la bicatégorie *Pseud* (**II**, **A**) [4].

§ 1. BIMORPHISMES ET FINS CARTÉSIENNES GÉNÉRALISÉES

Soient **A** une bicatégorie et **V** une 2-catégorie.

Définition. *Un bimorphisme* $T : \mathbf{A}^{op} \times \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ *est la donnée*

1. *d'une fonction* $T : Ob\ \mathbf{A} \times Ob\ \mathbf{A} \to Ob\ \mathbf{V}$,
2. *pour chaque objet* A *de* **A**, *d'un morphisme „partiel"*

$$T(A, -) : \mathbf{A} \to \mathbf{V};$$

on note

$$\varphi_{fg} : T(A, f) \,.\, T(A, g) \to T(A, fg),\ \forall (f, g) \in \mathbf{A}^*,$$
$$\eta_B : 1_{T(A, B)} \to T(A, I_B), \forall B \in Ob\ \mathbf{A},$$

les multiplications et les unités resp. du morphisme $T(A, -)$,

3. *pour chaque objet* A *de* **A**, *d'un morphisme „partiel"*

$$T(-, A) : \mathbf{A}^{op} \to \mathbf{V};$$

on note

$$\varphi^{fg} : T(g, A) \,.\, T(f, A) \to T(fg, A),\ \forall (f, g) \in \mathbf{A}^*,$$
$$\eta^B : 1_{T(B, A)} \to T(I_B, A), \forall B \in Ob\ \mathbf{A},$$

les multiplications et les unités resp. du morphisme $T(-, A)$. $\mathbf{A}^*$ *et* I_B *désignent les couples de flèches composables de* **A** *et les flèches „identités" resp. de la bicatégorie* **A**. *De plus, on impose que*

$$T(\lambda, B') \,.\, T(A, \mu) = T(A', \mu) \,.\, T(\lambda, B)$$

pour tout couple de 2-cellules de **A**

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\lambda"] & A \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} B \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mu"] & B' \end{tikzcd}$$

Exemples. 1°. Soit $\mathbf{A}$ une 2-catégorie; alors un 2-foncteur

$$T : \mathbf{A}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{A} \to \mathbf{V}$$

est un cas particulier de bimorphisme.

2°. Un bimorphisme $\mathbf{1}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{1} \to \mathbf{V}$, est un couple de monades commutatives sur un objet V:

$$TT' = T'T,$$
$$\eta T' = T'\eta, \qquad T\eta' = \eta' T,$$
$$\mu T' = T'\mu, \qquad T\mu' = \mu' T.$$

3°. Soient $F, G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ deux morphismes de bicatégories; alors

$$\mathbf{B}(F(\_), G(\_)) : \mathbf{A}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{A} \to \mathbf{Cat}$$

est un bimorphisme. C'est l'exemple typique.

Soient $T : \mathbf{A}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ un bimorphisme et X un objet de $\mathbf{V}$.

Définition. *Un quasi-wedge projectif de base T et de sommet X est une collection de flèches de* $\mathbf{V}$

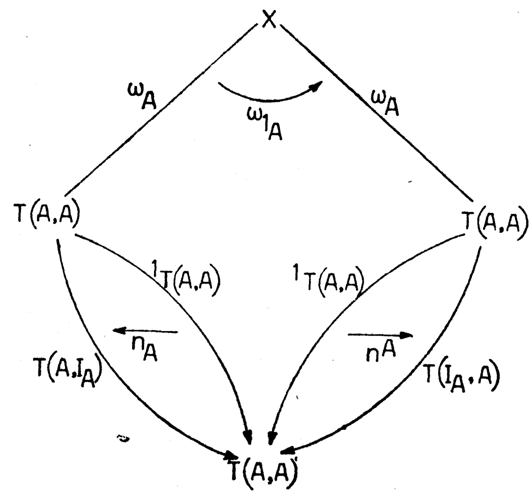
$$\{\omega_A : X \to T(A, A)\}_{A \in ObA}$$

et de 2-cellules de $\mathbf{V}$

$$\{\omega_f : T(\partial_0 f, f) \,.\, \omega_f \to T(f, \partial_1 f) \,.\, \omega_f\}_{f \in FlA}$$

de façon que

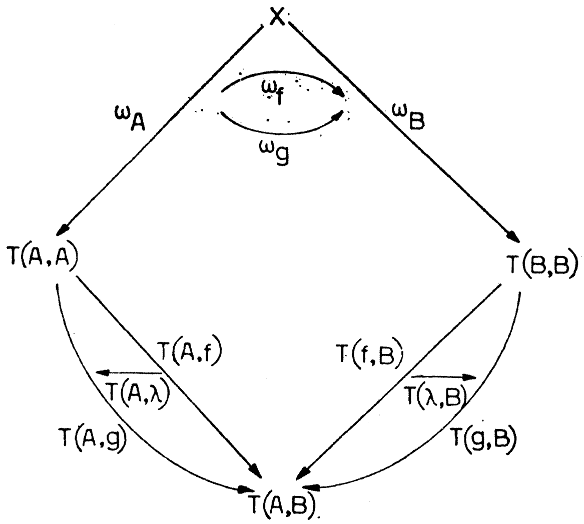
QW_1) *pout objet A de* $\mathbf{A}$ *le diagramme suivant commute*



i.e.

$$\omega_{1_A} \circ \eta_A \,.\, \omega_A = \eta^A \,.\, \omega_A;$$

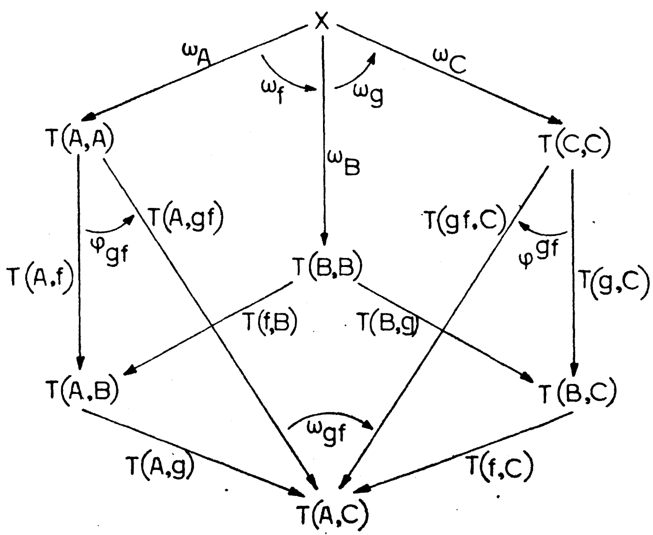
QW_2) *Pour toute 2-cellule* $\lambda : f \to g : A \to B$ *de* $\mathbf{A}$ *le diagramme suivant commute*



i.e.

$$\omega_g \circ T(A, \lambda) \,.\, \omega_A = T(\lambda, B) \,.\, \omega_B \circ \omega_f \,;$$

QW_3) *Pour tout couple de flèches composables* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *de* $\mathbf{A}$ *le diagramme*



suivant commute

i.e.

$$\varphi^{gf} \,.\, \omega_C \circ T(f, C) \,.\, \omega_g \circ T(A, g) \,.\, \omega_f = \omega_{gf} \circ \varphi_{gf} \,.\, \omega_A .$$

Par exemple un quasi-wedge projectif de sommet X et de base le 2-foncteur $T : \mathbf{A}^{op} \times \times \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ ($\mathbf{A}$ = 2-catégorie) [1] est un cas particulier de la notion ci-dessus.

Soient $\{\omega_A, \omega_f\}$ et $\{\sigma_A, \sigma_f\}$ deux quasi-wedges projectifs de base $T : \mathbf{A}^{op} \times \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ et de sommet X.

Définition. *Une modification de* $\{\omega_A, \omega_f\}$ *vers* $\{\sigma_A, \sigma_f\}$ *est une collection de 2-cellules*

$$\{m_A : \omega_A \to \sigma_A\}_{A \in ObA}$$

telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "\omega_A"] \arrow[dl, bend right=40, "\sigma_A"'] \arrow[dl, phantom, bend right=20, "\xleftarrow{m_A}"] \arrow[dr, "\omega_B"'] \arrow[dr, bend left=40, "\sigma_A"] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\xrightarrow{m_B}"] & \\
T(A,A) \arrow[dr, "T(A,f)"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\omega_f}{\underset{\sigma_f}{\rightrightarrows}}"] & & T(B,B) \arrow[dl, "T(f,B)"] \\
& T(A,B) &
\end{tikzcd}$$

i.e.

$$\sigma_f \circ T(A, f) \,.\, m_A = T(f, B) \,.\, m_B \circ \omega_f .$$

Définition. *Le quasi-wedge projectif* $\{\omega_A, \omega_f\}$ *de base le bimorphisme* $T : \mathbf{A}^{op} \times \mathbf{A} \to \to \mathbf{V}$ *et de sommet* X *est dit fin cartésienne généralisée projective si, pour tout quasi-wedge projectif* $\{\sigma_A, \sigma_f\}$ *de même base et de sommet* X', *il existe une seule flèche* $\sigma : X' \to X$ *telle que*

$$\begin{cases} \omega_A \,.\, \sigma = \sigma_A, & \forall A \in Ob\,\mathbf{A}, \\ \omega_f \,.\, \sigma = \sigma_f, & \forall f \in Fl\,\mathbf{A}, \end{cases}$$

et si, de plus, toute modification $\{m_A\}$ *de* $\{\sigma_A, \sigma_f\}$ *vers* $\{\bar{\sigma}_A, \bar{\sigma}_f\}$ *induit une seule* 2-*cellule* $m : \sigma \to \bar{\sigma}$ ($\bar{\sigma}$ *est induite par* $\{\bar{\sigma}_A, \bar{\sigma}_f\}$) *telle que*

$$\omega_A \,.\, m = m_A, \quad \forall A \in Ob\mathbf{A}.$$

Dans ce cas on écrit $Cart - \int_A^{u} T(A, A) = X$.

Remarque. Si on renverse le sens des 2-cellules ω_f, σ_f, etc., ... dans les définitions ci-dessus on obtient une notion duale de fin cartésienne généralisée, notée $Cart - \int_A^d T(A, A)$.

Si on suppose que les 2-cellules ω_f, σ_f, etc., ... sont des identités, alors on obtient une notion de fin cartésienne généralisée, notée $Cart - \int_A^e T(A, A)$.

Exemples. 1°. La fin cartésienne définie dans [1] est un cas particulier de la notion ci-dessus.

2°. Soient

$$T : \mathbf{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{W}, \qquad S : \mathbf{A} \to \mathbf{V}$$

deux morphismes et

$$\bigcirc : \mathbf{W} \times \mathbf{V} \to \mathbf{B}$$

un 2-foncteur; alors la cofin cartésienne généralisée du bimorphisme

$$\mathbf{A}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{A} \xrightarrow{(T,S)} \mathbf{W} \times \mathbf{V} \xrightarrow{\bigcirc} \mathbf{B}$$

est appelée $\bigcirc$-*produit* de T et S, notée

$$T \bigcirc S = Cart - \int^A \bigcirc\, (TA, SA);$$

2_a) $\mathbf{W} = \mathbf{V}$, et $\mathbf{V}$ est à **Cat**-produits,

$$\bigcirc\, (\_\,, \_) = -\otimes- : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}.$$

2_b) $\mathbf{W} = \mathbf{Cat}$ et $\mathbf{V}$ est à tenseurs,

$$\bigcirc\, (\_\,, \_) = -\times- : \mathbf{Cat} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}.$$

3°. Soient

$$T : \mathbf{A} \to \mathbf{W}, \qquad S : \mathbf{A} \to \mathbf{V}$$

deux morphismes et

$$\{\_\,, \_\} : \mathbf{W}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{V} \to \mathbf{B}$$

un 2-foncteur; alors la fin cartésienne généralisée du bimorphisme

$$\mathbf{A}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{A} \xrightarrow{(T^{\mathrm{op}},S)} \mathbf{W}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{V} \xrightarrow{\{\_,\_\}} \mathbf{B}$$

est appelée $\{\ \}$-hom de T vers S:

$$\{T, S\} = Cart - \int_A^u \{TA, SA\},$$

3_a) $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ et $\mathbf{V}$ est 2-cartésienne fermée,

$$\{\_\,, \_\} = (\_)^{(-)} : \mathbf{V}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}.$$

3_b) **W** = **Cat** et **V** est à tenseurs:

$$\{\_,\_\} = (\_)^{(-)} : \mathbf{Cat}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}.$$

3_c) **W** = **V** et

$$\{\_,\_\} = \mathbf{V}(\_,\_) : \mathbf{V}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{V} \to \mathbf{Cat}.$$

§ 2. EXISTENCE DE FINS GÉNÉRALISÉES

Soient $T : \mathbf{A}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{A} \to \mathbf{Cat}$ un bimorphisme et $QF(T)$ la catégorie qui a comme objets les couples

(1) $$X = (\{x_A\}_{A \in Ob\mathbf{A}}, \quad \{x_f\}_{f \in Fl\mathbf{A}}),$$

où x_A est un objet de $T(A, A)$ et x_f est un morphisme dans $T(\partial_0 f, \partial_1 f)$ de $T(\partial_0 f, f)(x_{\partial_0 f})$ vers $T(f, \partial_1 f)(x_{\partial_1 f})$ de façon que:

i) pour tout couple de flèches composables $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ de **A** le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
g_A f_A(x_A) \arrow[r, "g_A(x_f)"] \arrow[d, "(\varphi_{gf})_{x_A}"'] & g_A f^B(x_B) = f^C g_B(x_B) \arrow[r, "f^C(x_g)"] & f^C g^C(x_C) \arrow[d, "(\varphi^{gf})_{x_C}"] \\
(gf)_A(x_A) \arrow[rr, "x_{gf}"] & & (GF)^C(x_C)
\end{tikzcd} ;$$

ii) pour toute 2-cellule $\lambda : f \to g : A \to B$ de **A**, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
f_A(x_A) \arrow[r, "(\lambda_A)_{x_A}"] \arrow[d, "x_f"'] & g_A(x_a) \arrow[d, "x_g"] \\
f^B(x_B) \arrow[r, "(\lambda_B)_{x_B}"] & g^B(x_b)
\end{tikzcd}$$

iii) pour tout objet A de $\mathbf{A}$ le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
x_A \arrow[rr, "(\eta_A)_{x_A}"] \arrow[dr, "(\eta^A)_{x_A}"'] & & (1_A)_A(x_A) \arrow[dl, "x_{1_A}"] \\
& (1_A)^A(x_A) &
\end{tikzcd}$$

On a posé pour simplifier l'écriture

$$T(A, g) = g_A, \quad T(f, B) = g^B, \quad T(\lambda, A) = \lambda^A, \quad T(B, \lambda) = \lambda_B, \quad \text{etc.} \ldots$$

Un morphisme dans $QF(T)$ de l'objet (1) vers l'objet

$$Y = (\{y_A\}_{A \in Ob A}, \{y_f\}_{f \in Fl\,\mathbf{A}})$$

est une famille

$$\{m_A : x_A \to y_A\}_{A \in Ob\,\mathbf{A}}$$

telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
f_A(x_A) \arrow[r, "f_A(m_A)"] \arrow[d, "x_f"'] & f_A(y_A) \arrow[d, "y_f"] \\
f^B(x_B) \arrow[r, "f^B(m_B)"'] & f^B(y_B)
\end{tikzcd}$$

pour toute flèche $f : A \to B$ de $\mathbf{A}$.

Alors il est facile de voir que $QF(T)$ est une catégorie; on a les foncteurs projections

$$pr_A : QF(T) \to T(A, A)$$

définis par

$$\begin{cases} pr_A(\{x_B\}_{B \in Ob A}\{x_f\}_{f \in Fl\,\mathbf{A}}) = x_A \\ pr_A\{m_A\}_{A \in Ob\,\mathbf{A}} = m_A \end{cases}$$

et les transformations naturelles

$$pr_f : T(A, f) \cdot pr_A \to T(f, B) \cdot pr_B, \qquad f : A \to B,$$

définies par

$$(pr_f)_{(\{x_C\},\{x_B\})} = x_f : f_A(x_A) \to f^B(x_b).$$

Le lecteur vérifiera que le système $\{pr_A, pr_f\}$ est la fin cartésienne généralisée de T

APPLICATIONS

1. Soient $F, G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ deux morphismes de bicatégories et

$$\mathbf{B}(F(\_), G(\_)) : \mathbf{A}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{A} \to \mathbf{Cat}$$

le bimorphisme associé.

Dans ce cas les objets de $QF(\mathbf{B}(F(\_), G(\_)))$ sont les familles de flèches de $\mathbf{B}$

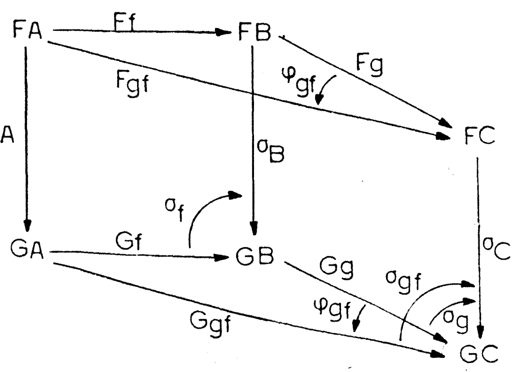
$$\{\sigma_A : FA \to GA\}_{A \in Ob\mathbf{A}}$$

et de 2-cellules de $\mathbf{B}$

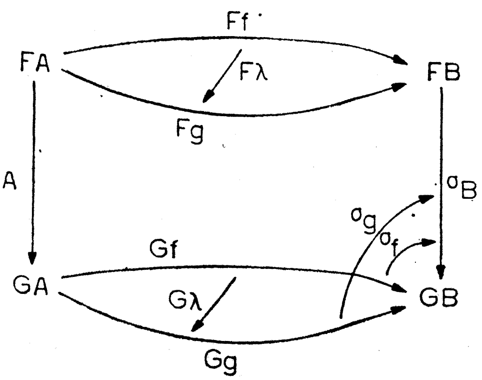
$$\{\sigma_f : Gf \,.\, \sigma_{\partial_0 f} \to \sigma_{\partial f} \,.\, Ff\}_{f \in Fl\mathbf{A}}$$

telles que

i) pour tout $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ dans $\mathbf{A}$, le diagramme suivant commute



ii) pour $\lambda : f \to g : A \to B$ dans $\mathbf{A}$, le diagramme suivant commute



iii) pour tout $A \in Ob\,\mathbf{A}$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
FA \arrow[r, bend left, "1_{FA}"] \arrow[r, bend right, "F(1_A)"'] \arrow[r, phantom, "\swarrow n_A"] \arrow[d, "\sigma_A"'] \arrow[dr, phantom, "\sigma_{1_A}"] & FA \arrow[d, "\sigma_A"] \\
GA \arrow[r, bend left, "1_{GA}"] \arrow[r, bend right, "G(1_A)"'] \arrow[r, phantom, "\swarrow n_A"] & GA
\end{tikzcd}$$

Enfin les morphismes de $QF(\mathbf{B}(F(\_), G(\_)))$ sont les familles de 2-cellules de $\mathbf{B}$

$$\{m_A : \sigma_A \to \bar{\sigma}_A\}_{A \in Ob\,\mathbf{A}}$$

qui font commuter les diagrammes de la forme

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, bend right, "\sigma_A"'] \arrow[d, bend left, "\bar{\sigma}_A"] \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{m_A}"] \arrow[dr, phantom, "\bar{\sigma}_f \quad \sigma_f"] & FA \arrow[d, bend right, "\sigma_B"'] \arrow[d, bend left, "\bar{\sigma}_A"] \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{m_A}"] \\
GA \arrow[r, "Gf"'] & GB
\end{tikzcd}$$

Donc

$$QF(\mathbf{B}(F(\_), G(\_))) = Pseud\,(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,(F, G) \qquad [4],$$

c'est-à-dire

$$Pseud\,(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,(F, G) = Cart - \int_A^u \mathbf{B}(FA, GA).$$

2. Soit $M : \mathbf{1}^{op} \times \mathbf{1} \to \mathbf{Cat}$ un bimorphisme, i.e. un couple de monades commutatives sur une catégorie A (v. ex. 2, § 1).

$$\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[loop left, "T"] \arrow[loop right, "T'"]
\end{tikzcd}$$

Alors la catégorie $QF(M)$ a comme objets les couples (a, h), où $a \in Ob\ A$ et $h : Ta \to$ $\to T'a$, de facon que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd}
T^2a \arrow[r, "Th"'] \arrow[d, "\mu_T"'] & TT'a = T'Ta \arrow[r, "T'h"'] & T'^2a \arrow[d, "\mu_{T'}"] \\
Ta \arrow[rr, "h"] & & T'a
\end{tikzcd}$$

ii)

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "n_a"] \arrow[dr, "n'_a"'] & Ta \arrow[d, "h"] \\
& T'a
\end{tikzcd}$$

μ, μ' et n, n' étant les multiplications et les unités des monades T et T' respecitvement.

Un morphisme dans $QF(M)$ de (a, h) vers (b, k) est un morphisme $f : a \to b$ de A tel que

$$\begin{tikzcd}
Ta \arrow[r, "Tf"'] \arrow[d, "h"'] & Tb \arrow[d, "k"] \\
T'a \arrow[r, "T'f"'] & T'b
\end{tikzcd}$$

En d'autres termes

$$Cart - \int_1^u M(1, 1) = \mathsf{Alg}(Id),$$

où $\mathsf{Alg}(Id)$ désigne la catégorie des algèbres par rapport á la loi distributive

$$Id : TT' \to T'T \qquad [3].$$

Par exemple si T' est la monade identique sur A, on a

$$\mathsf{Alg}(Id) = \mathsf{Alg}(T).$$

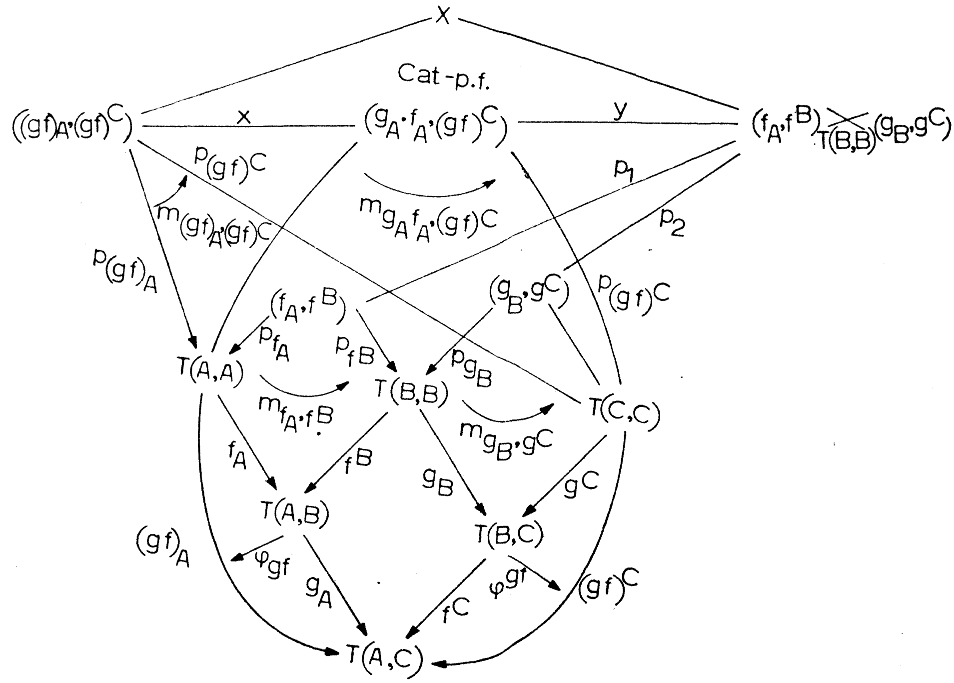
Théoréme d'existence de fins cartésiennes généralisées

Une 2-catégorie **V** *admet des fins cartésiennes généralisées projectives dès qu'elle possède des objets commas et* **Cat**-*limites projectives.*

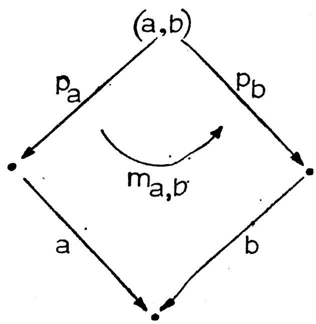
Par exemple, les 2-catégories **Cat**, $\mathcal{U}$-**Cat**, **Cat** (E), **Fib** (B), **Ord**, etc., [2] sont à fins cartésiennes généralisées.

Preuve. Soit $T : \mathbf{A}^{op} \times \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ un bimorphisme.

Pour tout couple de flèches composables $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ de **A**, on construit le cône suivant



où: f_A, g^B, etc. sont les abréviations des $T(A,f)$, $T(g, B)$, etc.



désigne l'objet comma des flèches a et b respectivement, y et x sont les flèches induites pat les 2-cellules

$$\varphi^{gf} \,.\, P_{gc} \,.\, P_2 \circ f^c \circ m_{gB,gc} \,.\, P_2 \circ g_A \,.\, m_{f_A,f^B} \,.\, P_1$$

et

$$m_{(gf)_A,(gf)^c} \cdot \varphi_{gf} \cdot P_{(gf)\mathbf{A}}$$

respectivement et enfin X est le **Cat**-produit fibré de x et y. D'une manière analogue on construit pour toute 2-cellule $\lambda : f \to g : A \to B$ de **A** et pour tout objet A de **A**, des cônes dont les bases sont

$$\begin{tikzcd} T(A,A) \arrow[r, bend left, "T(A{,}f)"] \arrow[r, bend right, "T(A{,}g)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow T(A{,}\lambda)"] & T(A,B) & T(B,B) \arrow[l, bend right, "T(f{,}B)"'] \arrow[l, bend left, "T(g{,}B)"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow T(\lambda{,}B)"] \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} T(A,A) \arrow[r, bend left, "1_{T(A{,}A)}"] \arrow[r, bend right, "T(A{,}1_A)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow n_A"] & T(A,A) & T(A,A) \arrow[l, bend right, "'1_{T(A{,}A)}"'] \arrow[l, bend left, "T(1_A{,}A)"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow n^A"] \end{tikzcd}$$

respectivement, et ensuite en prenant la **Cat**-limite projective de tous ces cônes on trouve la fin cartésienne généralisée desirée.

§ 3. LA BICATÉGORIE RELATIVE *Pseud* (**I**, **A**)

Dans ce paragraphe on réalise le but de ce travail, c'est-à-dire on utilise les fins cartésiennes généralisées afin d'enrichir la structure de la bicatégorie *Pseud* (**I**, **A**).

Pour la notion de bicatégorie relative à une 2-catégorie multiplicative **V**, le lecteur est envoyé à [2].

Considerons donc une bicatégorie **I** et une **V**-bicatégorie **A**, oú **V** est à fins cartésiennes projectives généralisées.

Pseud (**I**, **A**) a alors comme objets les morphismes de **I** vers la bicatégorie | **A** | sous-jacente à **A** [2], tandis que pour $S, T \in Ob\, Pseud\,(\mathbf{I}, \mathbf{A})$ l'objet *Pseud* (**I**, **A**) (S, T) est donné par la fin cartésienne projective généralisée suivante

$$Pseud\,(\mathbf{I}, \mathbf{A})\,(S, T) = Cart - \int_i^u \mathbf{A}(Si, Ti)$$

Le lecteur vérifiera à l'aide de la propriété universelle des $Cart - \int$ que les données précédentes s'organisent à une **V**-bicatégorie, notée *Pseud* (**I**, **A**).

Proposition 3.1 *Pseud* $(\_, \_) : (Bicat^{[I]})^{op} \times \mathbf{V}\text{-}Bicat^{[I]} \to \mathbf{V}\text{-}Bicat^{[I]}$ *es un bifoncteur tel que*

$$| \, Pseud\,(\mathbf{I}, \mathbf{A}) \, | \xrightarrow{\sim} Pseud\,(\mathbf{I}, | \, \mathbf{A} \, |).$$

La construction précédente nous permet de relativiser la notion de quasi-limite [4]. Ainsi, une **V**-*bicatégorie* **A** est à **V**-*quasi-limites projectives* si pour toute bicatégorie **I**, l'homomorphisme relatif diagonal $\Delta_{\mathbf{I}} : \mathbf{A} \to Pseud\,(\mathrm{I}, \mathbf{A})$ admet un **V**-quasi-adjoint à droite, i.e. s'il existe un morphisme relatif $\underleftarrow{QL_{\mathbf{I}}}$ de *Pseud* (**I**, **A**) vers **A** et des transformations **V**-quasi-naturalles [2] $n : Id_{\mathbf{A}} \Rightarrow \underleftarrow{QL_{\mathbf{I}}} \, . \, \Delta_{\mathbf{I}}$ et $\varepsilon : \Delta_{\mathbf{I}} \, . \, \underleftarrow{QL_{\mathbf{I}}} \Rightarrow Id_{Pseud(\mathbf{I}, \mathbf{A})}$ telles que

$$\Delta_{\mathbf{I}} = \varepsilon \, . \, \Delta_{\mathbf{I}} \circ \Delta_{\mathbf{I}} \, . \, n, \qquad \underleftarrow{QL_{\mathbf{I}}} = \underleftarrow{QL_{\mathbf{I}}} \, . \, \varepsilon \circ n \, . \, \underleftarrow{QL_{\mathbf{I}}}.$$

Dans le cas par exemple des **Cat**-bicatégories (= bicatégories ordinaires) on retrouve les quasi-limites projectives de GRAY [4].

REFERENCES

[1] S. Bozapalides: *Les fins cartésiennes,* C. RAS de PARIS t. 281 (1975).

[2] S. Bozapalides: *Bicatégories relatives à une 2-catégorie multiplicative*, CRAS de PARIS t. 282 (1976).

[3] E. Burroni: *Algèbres non détérministiques et D-catégories,* Cah. Top. Geom. Diff. XIV-4 (1973).

[4] J. W. Gray: *Adjointnes for 2-catégories,* S.L.N. v. 391 (1974).

S. Bozapalides
Université de Ioannina
Ioannina
Grèce