Jiří Svoboda

Заметка к определению регулярных идеалов

Archivum Mathematicum, Vol. 13 (1977), No. 1, 47--49

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106955

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XIII: 47—50, 1977

ЗАМЕТКА К ОПРЕДЕЛЕНИЮ РЕГУЛЯРНЫХ ИДЕАЛОВ

ЙИРЖИ СВОБОДА, Брно

(Поступило в редакцию 14го июня 1967 г.)

В настоящей статье мы следуем терминологии и обозначениям приведенным в монографии [1] и отправимся от следующих определений.

Пусть R – кольцо.

1° $0 \neq I \in R$ – левый идеал в R, если

a) $I \neq R$; b) $x, y \in I \Rightarrow x + y \in I$;

c) $x \in I$, $a \in R \Rightarrow ax \in I$.

2° Левый идеал в R регулярен, если существует $u \in R$ такой, что

$$x \in R \Rightarrow xu - x \in I.$$

Аналогичные определения имеют место для правых, двусторонних (регулярных) идеалов.

Если R – кольцо с единицей e, то очевидно всякий идеал в R обладает свойством линейности, так как $x \in I$, $\lambda \in \Phi \Rightarrow \lambda x = (\lambda e)\, x \in I$ (Φ – поле скаляров). В случае колец без единицы это не всегда справедливо и целью нашей заметки – показать, что явное требование линейности идеалов необходимо для верности следующих двух теорем ([1], стр. 149–150).

Теорема 1. Пусть R – кольцо без единицы, и R' – кольцо, полученное из R присоединением единицы. Пусть $\mathcal{I}'$ совокупность всех левых идеалов I' в R', для которых $I' \not\subset R$ и $\mathcal{I}$ – совокупность всех регулярных левых идеалов в R. Тогда отображение $I' \to I' \cap R$ – биекция $\mathcal{I}'$ на $\mathcal{I}$ и $I \to \{y \in R' \mid u \,.\, y \in I\}$, где u единичный элемент по I – обратное отображение.

Теорема 2. Пусть R кольцо и I двусторонний идеал в R. Тогда отношение $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in I$ – эквивалентность в R.

Рассмотрим следующую конструкцию. Пусть $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ – конечная полугруппа; умножение в G записываем в виде $g_i \cdot g_j = g_{\varphi(i,j)}$. Обозначим $R(G) = \{A, B, C, \ldots\}$ множество всех элементов вида $A = [\langle \alpha_1, g_1 \rangle, \ldots, \langle \alpha_n, g_n \rangle]$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Phi$. Сумму и умножение на скаляры определим равенствами

$$[\langle\alpha_1, g_1\rangle, \ldots, \langle\alpha_n, g_n\rangle] + [\langle\beta_1, g_1\rangle, \ldots, \langle\beta_n, g_n\rangle] = [\langle\alpha_1 + \beta_1, g_1\rangle \ldots$$
$$\ldots \langle\alpha_n + \beta_n, g_n\rangle],\ \lambda \,.\, [\langle\alpha_1, g_1\rangle, \ldots, \langle\alpha_n, g_n\rangle] = [\langle\lambda\alpha_1, g_1\rangle, \ldots, \langle\alpha_n, g_n\rangle].$$

Если теперь вводим „базисные элементы“ $E_1, \ldots, E_n \in R(G)$, где

$$E_i = [\langle\delta_{1i}, g_1\rangle, \ldots, \langle\delta_{ni}, g_n\rangle] \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и δ_{ij} — символ Кронекера — то легко убедимся, что всякий элемент $A \in R(G)$ имеет единственное представление $A = \sum_1^n \alpha_i E_i$, и что $R(G)$ будет кольцом, если мы определим умножение в $R(G)$ равенством

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i\right) . \left(\sum_{j=1}^n \beta_j E_j\right) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \,.\, E_{\varphi(i,j)}.$$

Пусть теперь $G = \{g_1, g_2, g_3\}$, $H = \{h_1, h_2\}$ и умножения в G и H определены следующим образом:

$$\begin{array}{lll} g_1 \cdot g_1 = g_2, & g_1 \cdot g_2 = g_2, & g_1 \cdot g_3 = g_1 \\ g_2 \cdot g_1 = g_2, & g_2 \cdot g_2 = g_2 & g_2 \cdot g_3 = g_2 \\ g_3 \cdot g_1 = g_2, & g_3 \cdot g_2 = g_2 & g_3 \cdot g_3 = g_3 \end{array}$$

и $$h_1 \,.\, h_1 = h_1 \,.\, h_2 \,.\, h_1 = h_2 \,.\, h_2 = h_2.$$

Читатель может легко убедиться, что G, H — действительно полугруппы.

Лемма 1. *Пусть I_0 множество всех элементов из $R(G)$ вида $n \,.\, E_1 + \alpha E_2$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $\alpha \in \Phi$.*
Тогда

1° $I_0 \neq R(G)$;
2° $A_1, A_2 \in I_0 \Rightarrow A_1 + A_2 \in I_0$;
3° $A \in R(G), B \in I_0 \Rightarrow A \,.\, B \in I_0$;
4° $A \in R(G) \Rightarrow A \,.\, E_3 - A \in I_0$;
5° $\lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \Rightarrow \lambda E_1 \notin I_0$.

Доказательство. Из единственности представления всякого $A \in R(G)$ в виде $A = \sum_1^3 \alpha_i E_i$ следует 1°, 5°. Пусть $\sum_1^3 \alpha_i E_i \in R(G)$ и $nE_1 + \alpha E_2 \in I_0$. Имеем

$$\left(\sum_1^3 \alpha_i E_i\right) . (nE_1 + \alpha E_2) = 0 \,.\, E_1 + (n\alpha_1 + n\alpha_2 + n\alpha_3 + \alpha\alpha_1 + \alpha\alpha_2 + \alpha\alpha_3) E_2 \in I_0,$$

так что 3° верно. Если $\sum_1^3 \alpha_i E_i \in R(G)$, то

$$\left(\sum_1^3 \alpha_i E_i\right) E_3 - \sum_1^3 \alpha_i E_i = \sum_1^3 0 \,.\, E_i \in I_0$$

что доказывает 4°. 2° очевидно.

Лемма 2. *Пусть* I_1 *множество всех элементов из* $R(H)$ *вида* $E_1 + \alpha E_2$ *где* $\alpha \geqq 0$ *а* $\alpha \in \Phi$. *Тогда*

$$1^\circ \;\; -E_1 \notin I_1 ,\; I_1 \neq R(H);$$
$$2^\circ \;\; A_1, A_2 \in I_1 \Rightarrow A_1 + A_2 \in I_1$$
$$3^\circ \;\; A \in I_1 , B \in R(H) \Rightarrow A \,.\, B, B \,.\, A \in I_1 .$$

Доказательство. Из единственности представления всякого $A \in R(H)$ в виде $A = \sum_1^2 \alpha_i E_i$, 1° и 2° очевидны, 3° следует из свойств умножения в H, так как произведения $(E_1 + \alpha E_2)(\sum_1^2 \alpha_i E_i)$ и $(\sum_1^2 \alpha_i E_i)(E_1 + \alpha E_2)$ имеют вид $0E_1 + \beta E_2$, т. е. принадлежат к I_1.

Обсудим теперь теорему 1. Из леммы 1 вытекает, что I_0 — регулярный левый идеал в $R(G)$, E_3 — единичный по идеалу I_0. Так как I_0 — нелинейно, то $R(G)$ кольцо без единицы. Пусть R' — кольцо полученное из $R(G)$ присоединением единицы. В случае, что теорема 1 верна, то $I'_0 = \{\psi \in R' , \psi E_3 \in I_0\}$ — левый идеал в R' и $I_0 = I'_0 \cap R(G)$. Так как $E_1 \in I_0$, то $E_1 \in I'_0$. Но в R' есть единица; это значит, что $\frac{1}{2} E_1 \in I'_0$, $\frac{1}{2} E_1 \in R(G)$ и мы получили противоречие $\frac{1}{2} E_1 \in I_0$.

Что касается теоремы 2, применим лемму 2 из которой следует, что I_0 — двусторонний идеал в $R(H)$ а так как $2E_1 - E_1 = E_1 \in I_0$ и $E_1 - 2E_1 = -E_1 \notin I_0$, отношение $\sim$ не обладает свойством симметрии.

Хотя многие теоремы об идеалах в кольце без единицы не требуют линейности идеалов, можно сделать заключение из вышеприведенного, что найболее целесообразным выходом из положения является явное требование линейности, как это сделано во втором издании [1].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Najmark: *Normirovannyje kol'ca*, Moskva 1956, 1968.

J. Svoboda
662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a
Чехословакия