Jaromír Suchomel

Преобразование линейных однородных дифференциальных уравнений высшего порядка

Archivum Mathematicum, Vol. 13 (1977), No. 1, 41--45

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106954`

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XIII: 41—46, 1977

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

JAROMÍR SUCHOMEL, Brno
(Поступило в редакцию 13го января 1976 г.)

Пусть I любой непустой интервал на действительной прямой R. Множество всех функций имеющих k непрерывных производных на I обозначается через $C^k(I)$. Через $M^k(I)$ обозначим множество всех $n \times n$ матриц с элементами из $C^k(I)$. Через $p_i = (p_{i1}, \ldots, p_{in})$ обозначим i-ю строку матрицы $P = (p_{ij}) \in M^1(I)$. Это обозначение применяется и к другим буквам. δ_{ij} — символ Кронекера.

Пусть Функции $y_1, \ldots, y_n \in C^n(I)$ образуют Фундаментальную систему решений уравнения

$$(a) \qquad y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(i-1)} = 0, \qquad a_i \in C^0(I),\ i = 1, \ldots, n.$$

Обозначая $W = (y_j^{(i-1)}) \in M^1(I)$, переводим (a) в систему $W' = AW$, где $A = F - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$, где $F = (\delta_{i+1j})$ — $n \times n$ постоянная матрица, $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Матрицу A будем называть сопровождающей матрицей уравнения (a). Аналогично $B = F - \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \in M^0(J)$ — сопровождающая матрица уравнения

$$(b) \qquad z^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} b_i z^{(i-1)} = 0, \qquad b_i \in C^0(J),\ i = 1, \ldots, n,$$

где $b = (b_1, \ldots b_n)$ и J — любой другой непустой интервал на R.

Теорема 1. *Пусть $Y = (y_{ij}) \in M^1(I)$ является фундаментальной матрицей системы $Y' = CY$, где $C \in M^0(I)$. Для того чтобы функции $y_{k1}, \ldots, y_{kn}$ образовали фундаментальную систему решений уравнения (a) необходимо и достаточно, чтобы существовала регулярная матрица $P_k = (p_{kij}) \in M^1(I)$ такая, что на I имеет место*

$$(1) \qquad P_k' = AP_k - P_kC, \quad p_{k2} = (\delta_{k1}, \ldots, \delta_{kn});$$

$k = 1, \ldots, n.$

Доказательство. Необходимость. Пусть $y_{k1}, \ldots, y_{kn}$ — Фундаментальная система решений (a). Тогда на I справедливо $W_k = AW_k$ и $\det W_k = W(y_{k1}, \ldots, y_{kn}) \neq 0$, где $W_k = (y_{kj}^{(i-1)}) \in M^1(I)$. Обозначая $P_k = W_k Y^{-1}$, получим

$$P_k' = W_k' Y^{-1} - W_k Y^{-1} Y' Y^{-1} = AP_k - P_k C$$

и

$$P_{k1j} = (\det Y)^{-1} \sum_{l=1}^{n} y_{kl} Y_{jl} = \delta_{kj}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

где Y_{ij} — алгебраическое дополнение элемента y_{ij} в Y.

Достаточность. Пусть $P_k \in M^1(I)$, $\det P_k \neq 0$ на I и (1) вступают в силу. Обозначая $W_k = (w_{kij}) = P_k Y$, получим

$$W'_k = P'_k Y + P_k Y' = (AP_k - P_k C)\, Y + P_k C Y = AW_k$$

и

$$w_{k1j} = \sum_{l=1}^{n} P_{k1l} y_{lj} = \sum_{l=1}^{n} \delta_{kl} y_{lj} = y_{kj}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Следствие 1. *Для того чтобы $y_{k1}, \ldots, y_{kn} \in C^n(I)$ и $W(y_{k1}, \ldots, y_{kn}) \neq 0$ на I необходимо и достаточно, чтобы существовала $P_k \in M^1(I)$ такая, что*

$$P_{k1} = (\delta_{k1}, \ldots, \delta_{kn}),\ p_{ki+1} = p_{ki}C + p'_{ki},\ i = 1, \ldots, n-1$$
$$\text{и } \det P_k \neq 0 \ \textit{на } I;\ k = 1, \ldots, n.$$

Доказательство вытекает из теоремы 1 при обозначении

$$a = -p_{kn} C P_k^{-1} - p'_{kn} P_k^{-1}.$$

Замечание 1. Следствие 1 является эффективным признаком приводимости системы n линейных уравнений 1-го порядка к уравнению n-го порядка. См. [1], с. 150–152, [2], с. 230–237.

Определение 1. *Пусть существуют функции t, $u \in C^n(I)$ такие, что $t' \neq 0$, $u \neq 0$ на I, $J = t(I)$ и функция $y = uz(t) \in C^n(I)$, $[y(x) = u(x)\, z(t(x))]$, является решением уравнения (a) для каждого решения $z \in C^n(J)$ уравнения (b). Тогда скажем, что уравнения (a), (b) эквивалентны и будем писать*

$$(a) \sim (b)\, \{t, \zeta\}, \quad \textit{где} \quad \zeta = \frac{u'}{u} \in C^{n-1}(I). \qquad \text{См. [4], с. 6, 7.}$$

Лемма 1. *Для того чтобы $(a) \sim (b)\,(t, \zeta)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала регулярная нижняя треугольная матрица $P \in M^1(I)$ такая, что на I справедливо*

$$(2) \qquad p_{11} = 1,\ p_{ij} = 0 \text{ для } i = 1, \ldots, n-1;\ j = i+1, \ldots, n \quad \text{и}$$

$$(3) \qquad P' + \zeta P + t' P B(t) = AP.$$

Доказательство. Пусть $Z \in M^1(J)$ — Фундаментальная матрица системы $Z' = BZ$. Обозначая $V = uZ(t) \in M^1(I)$ получим

$$V' = u'Z(t) + ut'B(t)\,Z(t)$$

и

$$V' = (\zeta E + t'B(t))\,V, \tag{4}$$

где E — единичная матрица порядка n. Применяя к (4) теорему 1 при $k = 1$, получим из (1) $p_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ и (3). Используя

$$p_{i+1} = p_i\left[\zeta E + t'F - t'\begin{pmatrix}0\\ b(t)\end{pmatrix}\right] + p_i', \qquad i = 1, \ldots, n-1 \tag{5}$$

индукцией по i получаем (2).

Лемма 2. *Пусть матрица $P \in M^1(I)$ и вектор $p_{n+1} = (p_{n+1,1}, \ldots p_{n+1,n})$, где $p_{n+1\,j} \in C^0(I)$, $j = 1, \ldots, n$, определены уравнениями*

$$P' + \zeta P + t'PF = FP + \begin{pmatrix}0\\ p_{n+1}\end{pmatrix}, \qquad p_1 = (1, 0, \ldots, 0). \tag{6}$$

Тогда P удовлетворяет уравнениям (2), (3).

Доказательство. Из (2), (3) вытекает

$$p_i = (1, 0, \ldots, 0),\ p_{i+1} = p_i(\zeta E + t'F) + p_i', \qquad i = 1, \ldots, n-1, \tag{7}$$

но тоже самое получится из (6).

Замечание 2. Матрица P определенная в лемме 1 зависит только от выбора Функций t, ξ. (7) дает эффективно строки p_i матрицы P.

Теорема 2. (a) $\sim$ (b) $\{t, \xi\}$ *тогда и только тогда, если имеет место*

$$(t')^n b(t) = aP + p_{n+1}, \tag{8}$$

где

$$P = (p_{ij}) \in M^1(I),$$

$$p_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ p_{i+1} = p_i[\zeta E + t'F] + p_i', \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Доказательство вытекает из леммы 1 и леммы 2. Именно из (3), (6) получится

$$t'P\begin{pmatrix}0\\ b(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ a\end{pmatrix}P + \begin{pmatrix}0\\ p_{n+1}\end{pmatrix},$$

$t'p_{nn}b(t) = aP + p_{n+1}$ и в силу (10) (8).

Замечание 3. Обозначая $P_{n+1} = \begin{pmatrix}P & 0\\ p_{n+1} & (t')^n\end{pmatrix}$, получится (8) в виде $(t')^n(b(t), 1) = (a, 1)\,P_{n+1}$. См. [3], с. 419.

Лемма 3. *Пусть* $t \in C^n(I)$, $t' \neq 0$ *на* I, $\zeta \in C^{n-1}(I)$. *Пусть векторы* $p_i = (p_{i1}, \ldots, p_{in})$, $p_{ij} \in C^{n-i+1}(I)$, $i = 1, \ldots, n+1$, $j = 1, \ldots, n$, *удовлетворяют* (9). *Тогда имеет место*

$$p_{ii} = (t')^{i-1}, \; i = 1, n+1,$$

$$p_{i+1\,i} = \binom{i}{1}\zeta(t')^{i-1} + \binom{i}{2}(t')^{i-2}t'', \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$(10) \qquad p_{i+1\,i-1} = \binom{i}{2}(\zeta^2 + \zeta')(t')^{i-2} + 3\binom{i}{3}\zeta(t')^{i-3} +$$

$$+ \binom{i}{3}(t')^{i-3}t''' + 3\binom{i}{4}(t'')^2(t')^{i-4}, \qquad i = 2, \ldots, n.$$

Доказательство получится методом индукции по i используя

$$p_{i+1\,j} = \zeta p_{ij} + t'p_{ij-1} + p'_{ij}, \; i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, i,$$

где

$$p_{i0} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Теорема 3. *Пусть даны уравнения* (*a*), (*b*). *Для того чтобы* (*a*) $\sim$ (*b*) (t, ξ) *неоходимо и достаточно, чтобы существовало решение* $t \in C^n(I)$ *дифференциального уравнения*

$$(11) \qquad \frac{n(n^2-1)}{6}\left[\frac{1}{2}\frac{t'''}{t'} - \frac{3}{4}\left(\frac{t''}{t'}\right)^2\right] + (t')^2\left[b_{n-1}(t) - \frac{n-1}{2n}b_n^2(t)\right] +$$

$$+ \frac{n-1}{2}b_n(t)\,t'' = a_{n-1} - \frac{n-1}{2n}a_n^2 + \frac{n-1}{2}[b_n(t)\,t' - a_n]'$$

такое, что (8), (9) *имеет место для* t *и*

$$(12) \qquad \zeta = \frac{1}{n}\left[b_n(t)\,t' - a_n - \binom{n}{2}(t')^{-1}\,t''\right] \in C^{n-1}(I).$$

Доказательство. Из (8) (10) вытекает

$$(13) \qquad (t')^2\,b_n(t) = a_n t' + \binom{n}{1}\zeta t' + \binom{n}{2}t'',$$

$$(14) \qquad (t')^4\,b_{n-1}(t) = (t')^2\,a_{n-1} + \left[\binom{n-1}{1}\zeta(t')^2 + \binom{n-1}{1}t't''\right]a_n +$$

$$+ \binom{n}{2}(\zeta^2 + \zeta')(t')^2 + 3\binom{n}{3}\zeta t't'' + \binom{n}{3}t't''' + 3\binom{n}{4}(t'')^2.$$

Из (13) получится (12), что и вместе с

$$\zeta' = \frac{1}{n}[b_n(t)\,t' - a_n]' - \frac{n-1}{2}[(t')^{-1}\,t'']'$$

и (14) дает (11). Наоборот из (11), (12) вытекает (13), (14). На основе теоремы 2 закончивается доказательство.

Замечание 4. Теорема 3 обобщает теорему 2.13 в [4] с. 10. В случае $n = 2$, $a_2 = 0$, $b_2 = 0$ уравнение (11) принимеат вид

$$\left[\frac{1}{2}\frac{t'''}{t'} - \frac{3}{4}\left(\frac{t''}{t'}\right)^2\right] + (t')^2\, b_1(t) = a_1, \quad \text{см. [5].}$$

Замечание 5. Пусть $P = UT$. Тогда (6) равносильно с

$$U' + \zeta U + UF = FU + \begin{pmatrix} 0 \\ u_{n+1} \end{pmatrix}, \qquad u_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$

$$T' + t'TF = FT + \begin{pmatrix} 0 \\ t_{n+1} \end{pmatrix}, \qquad t_1 = (1, 0, \ldots, 0).$$

Вид элементов p_{ij} матрицы P независит от n. См. [3], с. 491.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. П. Еругин, *Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений*, Минск 1970.

[2] J. Hronec: *Diferenciálne rovnice I*, Bratislava 1960.

[3], [4] Z. Hustý: *Über die Transformationen und Äquivalenz homogener linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung I, II*, Чех. мат. ж. т. 15 (90), No 4, (1965), 479—502; т. 16 (91), No 1, (1966), 1—13.
Чех. мат. ж., т. 15 (90), № 4, (1965), 479—502; т. 16 (91), № 1, (1966), 1—13.

[5] O. Borůvka: *Transformationstheorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. Berlin, 1967.

J. Suchomel
602 00 Brno, nám. 28. října 26
Чехословакия