Archivum Mathematicum

Josef Dalík

Verbandstheoretische Eigenschaften von Sprachen. II

Archivum Mathematicum, Vol. 13 (1977), No. 1, 13--23

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106951`

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XIII: 13—24, 1977

VERBANDSTHEORETISCHE EIGENSCHAFTEN VON SPRACHEN II

JOSEF DALÍK, Brno

(Eingegangen am 25. Juli 1976)

0. EINFÜHRUNG

Mit dem Symbol V^* wird das freie Monoid über einer Menge V bezeichnet. Für jedes Element $u \in V^*$ gibt es eine ganze Zahl $n \geqq 0$ und Elemente $a_1, a_2, \dots, a_n$ von V so, dass $u = a_1a_2 \dots a_n$. u heisst eine *Kette* und n wird die *Länge* von u genannt. Symbolisch wird $|u| = n$ geschrieben. Das einzige Element von V^*, dessen Länge $n = 0$ ist, wird mit Λ bezeichnet. Das geordnete Paar (V, L) wird eine *Sprache* genannt, wenn V eine endliche Menge (das *Alphabet*) und L eine Teilmenge von V^* sind. Für $a \in V$ sei

$$\sigma_L(a) = \{(u, v) \in V^* \times V^*;\ uav \in L\}.$$

$\sigma_L(a)$ heisst die *Kontextmenge* des Elementes a in (V, L). $a \in V$ wird *parasitär* in einer Sprache (V, L) genannt, wenn $\sigma_L(a) = \emptyset$. Weiter sei

$$\Sigma\mathfrak{A}(V, L) = \{\bigcup_{a \in A} \sigma_L(a);\ A \subseteq V\}.$$

In [1] wird bewiesen, dass $\Sigma\mathfrak{A}(V, L)$ immer ein nichtleerer endlicher Verband ist, in dem die Operationen der verbandstheoretischen und der mengentheoretischen Vereinigung gleich sind und dass es zu jedem nichtleeren endlichen Verband S eine Sprache (V, L) mit der Eigenschaft $S \cong \Sigma\mathfrak{A}(V, L)$ gibt. Weiter werden in $\Sigma\mathfrak{A}(V, L)$ einige von den Typen der Elemente des Alphabets von (V, L) charakterisiert, die in [3] erschienen sind.

In dieser Arbeit wird das folgende Problem gelöst: Sei S ein nichtleerer endlicher Verband. Zu jedem Typ der Elemente des Alphabets, der in [3] definiert wurde, sei eine Teilmenge von S zugeordnet. Welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für diese Teilmengen, damit eine Menge $V \subseteq S$, eine Sprache (V, L) und ein Isomorphismus Σ_L von S auf $\Sigma\mathfrak{A}(V, L)$ mit der Eigenschaft $\Sigma_L(a) = \sigma_L(a)$ für $a \in V$ existieren und folgende Bedingung erfüllen: Ein beliebiges Element a liegt in der Teilmenge von S, die einem gewissen Typ zugeordnet wird, genau dann, wenn a ein Element dieses Typs in (V, L) ist.

Für einige Typen der Elemente des Alphabets werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Sprache, die keine parasitären Elemente enthält, gegeben.

1. MORPHISMEN UND STARKE ELEMENTE

Für ein Mengensystem $\mathfrak{A}$ wird durch $\bigcup \mathfrak{A}$ die mengentheoretische Vereinigung aller Mengen von $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Die leere Menge $\emptyset$ wird zu den endlichen Mengen gezählt und es wird $\bigcup \emptyset = \emptyset$ vorausgesetzt. Für eine Abbildung σ von M in N und für $A \subseteq M$ ist es gewöhnlich $\sigma(A)$ statt $\{\sigma(a);\ a \in A\}$ zu schreiben.

Auf einer Menge M sei eine Ordnungsrelation gegeben. M wird total ungeordnet genannt, wenn es $a \parallel b$ für alle $a \neq b$ von M gilt. Es sei H ein Halbverband. Die Operation in H wird eine *Vereinigung* genannt und genauso wie im Verband mit dem Symbol $\vee$ bezeichnet. Für $a, b \in H$ wird $a \leqq b$ festgelegt, wenn $a \vee b = b$. $\leqq$ ist eine Ordnungsrelation auf H mit der Eigenschaft, dass jede nichtleere endliche Teilmenge A von H ein Supremum besitzt, welches die Vereinigung aller Elemente von A ist. Dies wird mit $\sup_H A$ bezeichnet. Enthält H ein kleinstes Element o, legen wir $\sup_H \emptyset = o$ fest. Eine binäre Relation ϱ auf H heisst *kompatibel* (*mit* $\vee$) in H, wenn es für beliebige $a, b, a', b' \in H$ mit $a\varrho a'$, $b\varrho b'$ immer $a \vee b\varrho a'\varrho \vee b'$ gilt. Die *Minimalbedingung* für Halbverbände ist ein Spezialfall der Minimalbedingung für geordnete Mengen, die in [4] definiert wird. Es ist klar, dass jeder endliche Halbverband die Minimalbedingung erfüllt. Ein *Atom* im Halbverband mit einem kleinsten Element wird auf die gleiche Weise definiert wie ein Atom im Verband mit einem kleinsten Element.

Im weiteren wird vorausgesetzt, dass jeder Verband nichtleer ist. Dann ist es eine Folgerung eines der grundlegenden Sätze der Verbandstheorie, dass der Begriff des endlichen Halbverbandes mit einem kleinsten Element und der des endlichen Verbandes zusammenfallen.

1.1. Definition. Es sei H ein Halbverband. Ein Element $a \in H$ heisst *irreduzibel* (*primitiv*) in H, wenn es für jede endliche Menge $A \subseteq H$ mit der Eigenschaft $a = \sup_H A$ ($a \leqq \sup_H A$) immer $a \in A$ gilt (ein Element $a_0 \in A$ existiert so, dass $a \leqq a_0$).

Bezeichne $\mathbf{IR}_H(\mathbf{P}_H)$ die Menge aller in H irreduzibler (primitiver) Elemente. Für H mit einem kleinsten Element bezeichne $\mathbf{A}_H$ die Menge aller Atome in H.

1.2. Lemma. *Genügt ein Halbverband H der Minimalbedingung, so lässt sich jedes seiner Elemente als Supremum einer endlichen Teilmenge von $\mathbf{IR}_H$ darstellen.*

Beweis. Das kleinste Element ist ein Supremum der leeren Menge. Den Rest der Behauptung kann man mit demselben Verfahren wie den Satz 28 in [4] beweisen.

1.3. Definition. Es seien H, $\bar{H}$ Halbverbände und Σ eine Abbildung von H in $\bar{H}$. Σ wird ein *Morphismus* (von H in $\bar{H}$) genannt, wenn es für jede endliche Menge $A \subseteq H$

$$\Sigma(\sup_H A) = \sup_{\bar{H}} \Sigma(A)$$

gilt.

1.4. Bemerkung. Es sei Σ ein Morphismus von H in $\bar{H}$. Nach [4], Kap. II gilt:

(i) *aus* $a \leqq b$ *folgt* $\Sigma(a) \leqq \Sigma(b)$ *für alle* $a, b \in H$ und

(ii) *ist* Σ *eine Surjektion und wenn es mit* $\Sigma(a) \leqq \Sigma(b)$ *immer* $a \leqq b$ *für alle* $a, b \in H$ *gilt, so ist* Σ *ein Isomorphismus.*

1.5. Definition. Es seien H, $\bar{H}$ Halbverbände, V eine Teilmenge von H und σ eine Abbildung von V in $\bar{H}$. Ein morphismus Σ von H in $\bar{H}$ wird eine *Fortsetzung* von σ genannt, wenn $\Sigma(a) = \sigma(a)$ für alle $a \in V$.

1.6. Lemma. *Ein Halbverband H genüge der Minimalbedingung, es gelte* $\mathbf{IR}_H \subseteq V \subseteq$ $\subseteq H$ *und* σ *sei eine Abbildung von* V *in einen Halbverband* $\bar{H}$. *Dann*

(i) σ *besitzt eine Fortsetzung* Σ *genau dann, wenn*

(*) $\sup_H A \leqq \sup_H B \Rightarrow \sup_{\bar{H}} \sigma(A) \leqq \sup_{\bar{H}} \sigma(B)$ *für alle endlichen* $A, B \subseteq V$,

(ii) σ *besitzt höchstens eine Fortsetzung.*

Beweis. (i) Es sei Σ eine Fortsetzung von σ. Für eine endliche Menge $A \subseteq V$ ist $\Sigma(\sup_H A) = \sup_{\bar{H}} \Sigma(A) = \sup_{\bar{H}} \sigma(A)$. Gilt $\sup_H A \leqq \sup_H B$ für endliche Mengen $A, B \subseteq V$, so $\Sigma(\sup_H A) \leqq \Sigma(\sup_H B)$ und das bedeutet $\sup_{\bar{H}} \sigma(A) \leqq \sup_{\bar{H}} \sigma(B)$.

Es gelte (*). Nach 1.2 gibt es zum beliebigen $a \in H$ eine endliche Menge $A \subseteq V$ mit $a = \sup_H A$. Sei $\Sigma(a) = \sup_{\bar{H}} \sigma(A)$. Es folgt aus (*), dass $\Sigma(a)$ von der Wahl der endlichen Teilmenge von V, deren Supremum a ist, nicht abhängt. Offenbar $\Sigma(a) = \sigma(a)$ für jedes $a \in V$.

Σ ist ein Morphismus: Es sei $a = \sup_H B$ für eine endliche Menge $B \subseteq H$. Im Falle $B = \emptyset$ ist a das kleinste Element in H und $\Sigma(a) = \Sigma(\sup_H \emptyset) = \sup_{\bar{H}} \sigma(\emptyset) = \sup_{\bar{H}} \emptyset$ ist das kleinste Element in $\bar{H}$. Für $B \neq \emptyset$ gibt es zu jedem $b \in B$ eine endliche Menge $A_b \subseteq V$ derart, dass $b = \sup_H A_b$. Dann ist $A = \bigcup_{b \in B} A_b$ eine endliche Teilmenge von V, $a = \sup_H A$ und $\Sigma(a) = \sup_{\bar{H}} \bigcup_{bBH} \sigma(A_b) = \sup_{\bar{H}} \{\sup_{\bar{H}} \sigma(A_b); b \in B\} = \sup_{\bar{H}} \{\Sigma(\sup_H A_b); b \in B\} = \sup_{\bar{H}} \Sigma(B)$.

(ii) Sind Σ und Σ' Fortsetzungen von σ, so gibt es für ein beliebiges $a \in H$ eine endliche Menge $A \subseteq V$ so, dass $a = \sup_H A$ und

$$\Sigma(a) = \sup_{\bar{H}} \Sigma(A) = \sup_{\bar{H}} \sigma(A) = \sup_{\bar{H}} \Sigma'(A) = \Sigma'(a).$$

1.7. Definition. Es sei h ein Element eines Halbverbandes H. Wir definieren für alle $a, b \in H$

$$a \dashv_h b, \qquad \text{wenn} \qquad a \vee h \leqq b \vee h.$$

Für eine endliche Menge $N \subseteq H$ wird statt $\dashv_{\sup_H N}$ einfach $\dashv_N$ geschrieben.

1.8. Lemma. *Es sei h ein Element eines Halbverbandes H. $\dashv_h$ ist eine kompatible und transitive Relation auf H mit der Eigenschaft $\leqq \subseteq \dashv_h$.*

Beweis. $\dashv_h$ ist kompatibel: Es gelte $a, b, a', b' \in H$, $a \dashv_h b$ und $a' \dashv_h b'$. Dann $(a \vee a) \vee h = (a \vee h) \vee (a' \vee h) \leqq (b \vee h) \vee (b' \vee h) = (b \vee b') \vee h$. Das bedeutet $a \vee a' \dashv_h b \vee b'$. Der Rest der Behauptung gilt offenbar.

1.9. Lemma. *Es seien a, h Elemente eines Halbverbandes H mit dem kleinsten Element o. Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:*

(i) $a \dashv_h b$ *für alle* $b \in H$,

(ii) $a \dashv_h o$,

(iii) $a \leqq h$.

1.10. Definition. Es sei H ein Halbverband. Ein Element $a \in H$ heisst *stark* (in H), wenn es für alle $b, c \in H$

$$b < c,\ a \parallel c \Rightarrow a \vee b < a \vee c$$

gilt.

In [2] wird der Zusammenhang der Begriffe des starken Elementes und des Elementes, das „der oberen Nachbarbedingung" genügt, klar gemacht.

1.11. Lemma. *Es sei a ein starkes und primitives Element eines Halbverbandes H. Für $b, c \in H$ gilt*

$$a \vee b \leqq a \vee c,\ a \parallel b \Rightarrow b \leqq c.$$

Beweis. Für $b, c \in H$ nehmen wir $a \vee b \leqq a \vee c$ und $a \parallel b$ an. Dann offenbar $b \vee c \nleqq a$.

Wegen der Primitivität von a fliesst aus $a \leqq b \vee c$ entweder $a \leqq b$ oder $a \leqq c$. Nach Voraussetzung kann der erste Fall nicht vorkommen. In dem zweiten Fall gilt $b \leqq a \vee b \leqq a \vee c = c$. Aus $a \nleqq b \vee c$ geht $a \parallel b \vee c$ hervor. Die Annahme $b \nleqq c$ impliziert $c < b \vee c$. Dann $a \vee c < a \vee (b \vee c)$, weil a ein starkes Element ist. Auf der anderen Seite $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee (a \vee c) = a \vee c$. Das ist ein Widerspruch.

1.12. Lemma. *Es seien A eine endliche Menge starker und primitiver Elemente eines Halbverbandes H, $B \subseteq A$ und $a, b \in H$. Ist $A \cup \{a\}$ eine total ungeordnete Menge, so*

$$\sup_H A \vee a \leqq \sup_H B \vee b \Rightarrow a \leqq b.$$

Beweis. Im Falle $A = \emptyset$ gilt die Behauptung offenbar. Für $A \neq \emptyset$ sei $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $a = a_{k+1}$ bezeichnet und $\sup_H A \vee a \leqq \sup_H B \vee b$ vorausgesetzt.

Wir werden $a_i \vee a_{i+1} \vee \ldots \vee a_{k+1} \leqq a_i \vee \ldots \vee a_k \vee b$ für $i = 1, 2, \ldots, k + 1$ mit der vollständigen Induktion beweisen.

1. Schritt. $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{k+1} \leqq a_1 \vee \ldots \vee a_k \vee b$ ergibt sich aus den Voraussetzungen.

2. Schritt. Es sei $a_i \vee a_{i+1} \vee \ldots \vee a_{k+1} \leqq a_i \vee \ldots \vee a_k \vee b$ für einen Index $i \in \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Mit $a_{i+1} \vee a_{i+2} \vee \ldots \vee a_{k+1} \leqq a_i$ gilt immer $a_{k+1} \leqq a_i$ und das ist ein Widerspruch. In dem Fall $a_i \leqq a_{i+1} \vee a_{i+2} \vee \ldots \vee a_{k+1}$ folgt aus der Primitivität von a_i die Existenz eines $j \in \{i + 1, i + 2, \ldots, k + 1\}$ so, dass $a_i \leqq a_j$. Das ist wieder ein Widerspruch. Also $a_i \parallel a_{i+1} \vee a_{i+2} \vee \ldots \vee a_{k+1}$ und nach 1.11 ist $a_{i+1} \vee a_{i+2} \vee \ldots \vee a_{k+1} \leqq a_{i+1} \vee \vee \ldots \vee a_k \vee b$.

Für $i = k + 1$ haben wir $a \leqq b$ bewiesen.

1.13. Definition. Es seien $\leqq$ eine Ordnungsrelation auf einer Menge H, $N \subseteq H$ und $a \in H$. Wir bezeichnen

$$A(a) = \{b \in H; b \leqq a\}, \quad E(a) = \{b \in H; a \leqq b\},$$

$$A(a, N) = N \cap A(a), \quad \bar{A}(a, N) = N - A(a) \quad \text{und} \quad E(a, N) = N \cap E(a).$$

1.14. Lemma. *Es seien H ein Halbverband mit dem kleinsten Element o und $N \subseteq \mathbf{A}_H$. Dann ist $\bar{A}(a, N) \cup \{a\}$ eine total ungeordnete Menge für jedes $a \in H - \{o\}$.*

Beweis. Für beliebiges $a \in H - \{o\}$ ist $\bar{A}(a, N)$ total ungeordnet und $b \nleqq a$ für alle $b \in \bar{A}(a, N)$.

Es bleibt $a \nleqq b$ für jedes $b \in \bar{A}(a, N)$ zu beweisen. Gibt es ein $b_0 \in \bar{A}(a, N)$ mit $a \leqq b_0$, so $a = b_0$, weil $a \neq o$ und b_0 ein Atom ist. Daraus folgt $b_0 \in A(a, N)$. Das steht aber im Widerspruch zu $A(a, N) \cap \bar{A}(a, N) = \emptyset$.

1.15. Definition. Es seien $\leqq$ eine Ordnungsrelation auf H, $N \subseteq H$ und $a, b \in H$. Wir legen

$$a \leqq_N b \qquad \text{in dem Fall} \qquad A(a, N) \subseteq A(b, N)$$

fest.

1.16. Hilfsatz. *Es seien H ein Halbverband mit dem kleinsten Element o und N eine endliche Menge starker und primitiver Atome in H. Dann*

$$\dashv_N \cap \leqq_N \subseteq \leqq.$$

Beweis. Für jedes $a \in H$ gilt

$$\sup_H N \vee a = \sup_H \bar{A}(a, N) \vee a. \tag{1}$$

Aus $o \dashv_N \cap \leqq_N b$ folgt offenbar $o \leqq b$ für alle $b \in H$.

Es seien $a, b \in H$ mit den Eigenschaften $a \neq o$ und $a \dashv_N \cap \leqq_N b$. Aus (1) und aus $a \dashv_N b$ ergibt sich

(2) $$\sup_H \bar{A}(a, N) \vee a \leqq \sup_H \bar{A}(b, N) \vee b.$$

$a \leqq_N b$ impliziert $\bar{A}(b, N) \subseteq \bar{A}(a, N)$. Daraus, aus (2), 1.14 und aus 1.12 folgt $a \leqq b$.

Nach [2], 1.6 ist in einem Verband, der der oberen Nachbarbedingung genügt, jedes Atom stark. Weiter ist es wohlbekannt, dass jedes Atom in einem distributiven Verband primitiv ist. Deswegen ist es möglich die Voraussetzungen in 1.16 und die Definition 2.3 im Spezialfall des Verbandes, der die obere Nachbarbedingung erfüllt beziehungsweise des distributiven Verbandes auf eine entsprechende Weise zu vereinfachen.

2. VERBANDSTHEORETISCHE CHARAKTERISIERUNG DER MENGEN ALLER NICHT-HOMONYME UND ALLER REINEN HOMONYME

2.1. Definition. Ein Element $a \in V$ wird ein *Nicht-Homonym* in einer Sprache (V, L) genannt, wenn $\sigma_L(a) \neq \emptyset$ und für alle $b \in V$

$$\sigma_L(a) \cap \sigma_L(b) \neq \emptyset \Rightarrow \sigma_L(a) \subseteq \sigma_L(b)$$

gilt.

2.2. Lemma. *Ein Element $a \in V$ ist ein Nicht-Homonym in (V, L) genau dann, wenn $\sigma_L(a) \neq \emptyset$ und für alle $\vartheta \in \Sigma\mathfrak{A}(V, L)$*

$$\sigma_L(a) \cap \vartheta \neq \emptyset \Rightarrow \sigma_L(a) \subseteq \vartheta$$

gilt.

Beweis. Es seien a ein Nicht-Homonym in (V, L) und $\vartheta \in \Sigma\mathfrak{A}(V, L)$ gegeben derart, dass $\sigma_L(a) \cap \vartheta \neq \emptyset$. Mit B sei eine Teilmenge von V mit der Eigenschaft $\vartheta = \bigcup \sigma_L(B)$ bezeichnet. Dann gibt es ein $b \in B$ so, dass $\sigma_L(a) \cap \sigma_L(b) \neq \emptyset$. Daraus folgt $\sigma_L(a) \subseteq \sigma_L(b) \subseteq \vartheta$. Die Umkehrung der eben bewiesenen Implikation gilt offenbar.

2.3. Definition. Eine endliche Teilmenge N eines Halbverbandes H mit einem kleinsten Element wird *nicht-homonym* in H genannt, wenn

(i) jedes Element von N ein starkes und primitives Atom in H ist und
(ii) jedes Atom in H kein kleinstes Element der Menge $H - A(\sup_H N)$ ist.

Mit dem Symbol $\mathfrak{N}_H$ wird das System aller in H nicht-homonymen Mengen bezeichnet.

2.4. Satz. *Es seien (V, L) eine Sprache und N die Menge aller Nicht-Homonyme in (V, L). Dann $\sigma_L(N) \in \mathfrak{N}_{\Sigma\mathfrak{A}(V,L)}$.*

Beweis. (i) Es sei $a \in N$.

$\sigma_L(a)$ ist stark in $\Sigma\mathfrak{A}(V, L)$: Es gelte $\eta, \vartheta \in \Sigma\mathfrak{A}(V, L), \eta \subset \vartheta$ und $\sigma_L(a) \parallel \vartheta$. Nach **2.2** ist $\sigma_L(a) \cap \vartheta = \emptyset$ und das bedeutet $\sigma_L(a) \cup \eta \subset \sigma_L(a) \cup \vartheta$.

$\sigma_L(a)$ ist primitiv: Es sei $\Theta \subseteq \Sigma\mathfrak{A}(V, L)$ und $\sigma_L(a) \subseteq \bigcup \Theta$. Dann gibt es ein $\vartheta \in \Theta$ mit der Eigenschaft $\sigma_L(a) \cap \vartheta \neq \emptyset$. Nach 2.2 gilt $\sigma_L(a) \subseteq \vartheta$.

$\sigma_L(a)$ ist ein Atom: Das kleinste Element in $\Sigma\mathfrak{A}(V, L)$ ist $\emptyset = \bigcup \sigma_L(\emptyset)$. Es sei $\vartheta \in \Sigma\mathfrak{A}(V, L)$ und $\vartheta \subset \sigma_L(a)$. Für $\vartheta \neq \emptyset$ gilt $\sigma_L(a) \subseteq \vartheta$ nach 2.2. Das ist ein Widerspruch. Deswegen $\vartheta = \emptyset$.

(ii) Wir legen $\zeta = \bigcup \sigma_L(N)$ fest. Das Symbol ϑ bezeichne ein Atom in $\Sigma\mathfrak{A}(V, L)$ und es sei vorausgesetzt, dass ϑ das kleinste Element in $\Sigma\mathfrak{A}(V, L) - A(\zeta)$ ist.

Dann $\vartheta \neq \emptyset$ und nach [1], 3.8 gibt es ein $a \in V$ mit $\vartheta = \sigma_L(a)$. Genüge $\eta \in \Sigma\mathfrak{A}(V, L)$ der Bedingung $\vartheta \cap \eta \neq \emptyset$.

Im Falle $\eta \in A(\zeta)$ ist auch $\vartheta \cap \zeta \neq \emptyset$, weil $\eta \subseteq \zeta$. Es existiert also ein $b \in N$ mit der Eigenschaft $\vartheta \cap \sigma_L(b) \neq \emptyset$. Daraus folgt $\sigma_L(b) \subseteq \vartheta$ und auch $\sigma_L(b) = \vartheta$. Das ist ein Widerspruch, denn $\sigma_L(b) \in A(\zeta)$ und $\vartheta \bar{\in} A(\zeta)$. Wir haben $\vartheta \cap \eta \neq \emptyset \Rightarrow \eta \in \Sigma\mathfrak{A}(V, L) - A(\zeta)$ bewiesen. Dann gilt aber $\vartheta \subseteq \eta$ und dies bedeutet $a \in N$ nach 2.2. Daraus folgt $\sigma_L(a) \in A(\zeta)$, während $\vartheta \in \Sigma\mathfrak{A}(V, L) - A(\zeta)$ gilt; also haben wir wieder einen Widerspruch.

2.5. Definition. Eine Sprache (V, L) wird eine *spezielle Representation* eines Verbandes S genannt, wenn $V \subseteq S$ und σ_L eine isomorphe Fortsetzung Σ_L von S auf $\Sigma\mathfrak{A}(V, L)$ besitzt.

2.6. Korollar. *Es bezeichne N die Menge aller Nicht-Homonyme in (V, L). Ist (V, L) eine spezielle Representation eines Verbandes S, so ist S endlich, $\mathbf{IR}_S \subseteq V$ und $N \in \mathfrak{N}_S$.*

Beweis. Die erste Behauptung gilt offenbar. $\mathbf{IR}_S \subseteq V$ folgt aus [1], 3.5 und $N \in \mathfrak{N}_S$ geht aus 2.4 hervor.

Im folgenden wird ein konstruktiver Beweis der Umkehrung von 2.6 gegeben.

2.7. Definition. Es seien $\dashv$ eine transitive Relation auf einer Menge S, $V \subseteq S$ und l eine Injektion von S in die Menge der ganzen positiven Zahlen.

Für jedes Element $a \in S$ seien alle möglichen Ketten der Länge $l(a)$ aus Elementen $a' \in V$ mit der Eigenschaft $a' \mathrel{\underline{\dashv}} a$ gebildet. Das Symbol $\mathscr{L}_V(l, \dashv)$ bezeichne die Menge aller gebildeten Ketten.

2.8. Satz. *Es sei $\dashv$ eine transitive, mit der Operation $\vee$ kompatible Relation auf einem endlichen Verband S so gegeben, dass $\leqq \subseteq \dashv$. Weiter sei $\mathbf{IR}_S \subseteq V \subseteq S$. Für $L = \mathscr{L}_V(l, \dashv)$ gilt*

(i) σ_L *besitzt eine Fortsetzung* Σ_L *und*

(ii) $\Sigma_L(a) \subseteq \Sigma_L(b) \Rightarrow a \dashv b$ *für beliebige* $a, b \in S$.

Beweis. (i) Wir setzen $\sup_S A \leqq \sup_S B$ für $A, B \subseteq S$ voraus. Es sei $(u, v) \in \in \bigcup \sigma_L(A)$. Dann existieren Elemente $a \in A$ und $a_0 \in S$ derart, dass $a \; a_0 \bar{\dashv}$ und $|uav| = l(a_0)$. Wegen $a \leqq \sup_S B$ ist $a \dashv \sup_S B$. Aus $b \dashv a_0$ für alle $b \in B$ folgt $\sup_S B \dashv a_0$ und das heisst $a \dashv a_0$. Das ist ein Widerspruch. Deshalb gibt es ein $b_0 \in B$ mit $b_0 \bar{\dashv} a_0$. Dann $(u, v) \in \sigma_L(b_0)$ und das bedeutet $(u, v) \in \bigcup \sigma_L(B)$. Für σ_L gilt also die Bedingung (*). Die Behauptung folgt jetzt aus 1.6 (i).

(ii) Es sei $\Sigma_L(a) \subseteq \Sigma_L(b)$ für $a, b \in S$. Seien $A, B \subseteq V$ so gewählt, dass $a = \sup_S A$ und $b = \sup_S B$. Setzen wir $a \bar{\dashv} b$ voraus, so gibt es ein $a_0 \in A$ so, dass $a_0 \bar{\dashv} b$. Das bedeutet die Existenz einer Kette $ua_0v \in L$ mit der Eigenschaft $|ua_0v| = l(b)$. Aufgrund von $(u, v) \in \bigcup \sigma_L(B)$ gilt $ub_0v \in L$ für ein $b_0 \in B$. Aus der Injektivität der Abbildung l folgt $b_0 \bar{\dashv} b$. Dieser Widerspruch beweist $a \dashv b$.

2.9. Definition. Es sei $\leqq$ eine Ordnungsrelation auf einer Menge V. Für $u, v \in V^*$ bezeichnen wir mit $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$ diejenige Elemente aus V, die die Gleichungen $u = a_1a_2 \ldots a_m$, $v = b_1b_2 \ldots b_n$ erfüllen. Wir schreiben $u \leqq_* v$, wenn

(i) $m = n$ und

(ii) $a_i \leqq b_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$

gilt.

Es ist klar, dass $\leqq_*$ eine Ordnungsrelation auf V^* ist.

2.10. Definition. Es seien $\leqq$ eine Ordnungsrelation auf einer endlichen Menge V, $k \geqq 0$ eine ganze Zahl und $a_i \in V$ für $i = 1, 2, \ldots, k$. Wir bezeichnen

$$\breve{\mathscr{L}}_V(\{a_i\}_1^k, \leqq) = \begin{cases} \{\Lambda\} & \text{für } k = 0 \\ E(a_1a_2 \ldots a_k, V^*) & \text{für } k > 0. \end{cases}$$

2.11. Lemma. *Es sei* $L = \breve{\mathscr{L}}_V(\{a_i\}_1^k, \leqq)$ *und* $(u, v) \in V^* \times V^*$. *Zu jedem* $a \in V$ *mit der Eigenschaft* $(u, v) \in \sigma_L(a)$ *gibt es eine ganze Zahl* j, $1 \leqq j \leqq k$, *derart, dass* $a_j \leqq a$ *und* $(u, v) \in \sigma_L(a_j)$. *Wird dazu noch vorausgesetzt, dass es für* $r \neq s$, $r, s = 1, 2, \ldots, k$ *immer* $a_r \parallel a_s$ *gilt, so folgt für* $t = 1, 2, \ldots, k$ *aus* $(u, v) \in \sigma_L(a_t)$ *immer* $t = j$.

Beweis. Es sei $(u, v) \in \sigma_L(a)$ für $a \in V$. Das bedeutet $a_1a_2 \ldots a_k \leqq_* uav$. Dann gibt es Elemente $b_1, b_2, \ldots, b_k \in V$ so, dass $uav = b_1b_2 \ldots b_k$ und $a_i \leqq b_i$ für $i = = 1, 2, \ldots, k$. Es bezeichne j einen Index mit der Eigenschaft $u = b_1b_2 \ldots b_{j-1}$. Dann $b_j = a$ und $a_j \leqq a$. Offenbar $a_1a_2 \ldots a_k \leqq_* ua_jv$ und das heisst $(u, v) \in \sigma_L(a_j)$. Aus $(u, v) \in \sigma_L(a_t)$ für $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$ folgt $a_j \leqq a_t$ nach dem ersten Teil des Beweises. Ist die letzte Voraussetzung erfüllt, so $j = t$.

2.12. Satz. *Seien S ein endlicher Verband,* $N \subseteq \mathbf{P}_S$ und $\mathbf{IR}_S \subseteq V \subseteq S$. *Wir setzen* $N = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *und* $L = \overline{\mathscr{L}}_V(\{a_i\}_1^k, \leqq)$. *Dann*

(i) σ_L *besitzt eine Fortsetzung* Σ_L *und*

(ii) $\Sigma_L(a) \subseteq \Sigma_L(b) \Rightarrow a \leqq_N b$ *für alle* $a, b \in S$.

Beweis. (i) Wir setzen $\sup_S A \leqq \sup_S B$ für $A, B \subseteq V$ voraus. Es sei $(u, v) \in \in \bigcup \sigma_L(A)$. Dann $(u, v) \in \sigma_L(a)$ für ein $a \in A$. Nach 2.11 existiert eine ganze Zahl j, $1 \leqq j \leqq k$, mit den Eigenschaften $a_j \leqq a$ und $(u, v) \in \sigma_L(a_j)$. Weil $a_j \leqq a \leqq \leqq \sup_S A \leqq \sup_S B$ und a_j primitiv ist, gilt $a_j \leqq b$ für ein $b \in B$. Dann $ua_jv \leqq_* ubv$. Daraus und aus $a_1a_2 \ldots a_k \leqq_* ua_jv$ ergibt sich $a_1a_2 \ldots a_k \leqq_* ubv$. Deswegen $ubv \in L$ und das heisst $(u, v) \in \bigcup \sigma_L(B)$. Wir haben für σ_L die Gültigkeit von (*) bewiesen. Die Behauptung folgt jetzt aus 1.6 (i).

(ii) Im Falle $k = 0$ ist $\Sigma_L(a) \subseteq \Sigma_L(b)$ und zugleich $a \leqq_N b$ für alle $a, b \in S$. Es sei $k > 0$, $\Sigma_L(a) \subseteq \Sigma_L(b)$ für $a, b \in S$ und $a_i \in A(a, N)$. Wir setzen $(u, v) = = (a_1a_2 \ldots a_{i-1}, a_{i+1} \ldots a_k)$. Zu b existiert eine Menge $B \subseteq V$ so, dass $\sup_S B = b$. Nach (i) ist $\sigma_L(a_i) = \Sigma_L(a_i) \subseteq \Sigma_L(b) = \bigcup \sigma_L(B)$. Daraus und aus $(u, v) \in \sigma_L(a_i)$ folgt $(u, v) \in \bigcup \sigma_L(B)$. Es gibt also ein $b_0 \in B$ mit $ub_0v \in L$. Dann $ua_iv \leqq_* ub_0v$ und das bedeutet $a_i \leqq b_0$. Es folgt $a_i \leqq \sup_S B = b$ und damit ist $a_i \in A(b, N)$ äquivalent. Es gilt also $A(a, N) \subseteq A(b, N)$ und deshalb $a \leqq_N b$.

2.13. Satz. *Seien S ein endlicher Verband und N, V Mengen mit Eigenschaften* $N \in \mathfrak{N}_S$ und $\mathbf{IR}_S \subseteq V \subseteq S$. *Dann*

(i) *es gibt eine spezielle Representation (V, L) von S, so dass*

(ii) *N ist die Menge aller Nicht-Homonyme in (V, L).*

Beweis. Es seien $N = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ und l eine injektive Abbildung von S in die Menge der ganzen positiven Zahlen gewählt derart, dass $k \,\bar{\in}\, l(S)$. Wir setzen

$$L_1 = \mathscr{L}_V(l, \dashv_N), \qquad L_2 = \overline{\mathscr{L}}_V(\{a_i\}_1^k, \leqq) \qquad \text{und} \qquad L = L_1 \cup L_2.$$

Ist $(u, v) \in \bigcup \sigma_{L_1}(V)$, so $|uav| \neq k$ für jedes $a \in V$. Das heisst $(u, v) \,\bar{\in}\, \bigcup \sigma_{L_2}(V)$ und wir haben

$$(1) \qquad \bigcup \sigma_{L_1}(V) \cap \bigcup \sigma_{L_2}(V) = \emptyset$$

gezeigt.

(i) Setzen wir $\sup_S A \leqq \sup_S B$ für $A, B \subseteq V$ voraus, so ist $\bigcup \sigma_{L_1}(A) \subseteq \bigcup \sigma_{L_1}(B)$ und $\bigcup \sigma_{L_2}(A) \subseteq \bigcup \sigma_{L_2}(B)$ nach 1.6 (i), 2.8 (i) und 2.12 (i). Daraus folgt $\bigcup \sigma_L(A) \subseteq \subseteq \bigcup \sigma_L(B)$. Nach 1.6 (i) besitzt dann σ_L eine Fortsetzung Σ_L.

Σ_L ist offenbar eine Surjektion von S auf $\Sigma\mathfrak{A}(V, L)$. Es sei nun $\Sigma_L(a) \subseteq \Sigma_L(b)$ für $a, b \in S$. Aufgrund von (1) gilt $\Sigma_{L_1}(a) \subseteq \Sigma_{L_1}(b)$ und $\Sigma_{L_2}(a) \subseteq \Sigma_{L_2}(b)$. Aus der ersten Inklusion und aus 2.8 (ii) folgt $a \dashv_N b$; die zweite Inklusion und 2.12 (ii) implizieren

$a \leqq_N b$. Es gilt also $a \dashv_N \cap \leqq_N b$ und dann $a \leqq b$ nach 1.16. Σ_L ist ein Isomorphismus von S auf $\Sigma\mathfrak{A}(V, L)$ nach 1.4 (ii).

(ii) Es sei $a \in N$.

Bezeichne o das kleinste Element von S. Aus (i) und $o < a$ folgt $\Sigma_L(o) \subset \Sigma_L(a) = \sigma_L(a)$. Deswegen $\sigma_L(a) \neq \emptyset$. Aus $a \leqq \sup_S N$ und aus 1.9 ergibt sich $a \dashv_N b$ für alle $b \in S$. Das bedeutet $\sigma_{L_1}(a) = \emptyset$. Es sei $\sigma_L(a) \cap \sigma_L(a_0) \neq \emptyset$. Nach 2.11 gilt $a \leqq a_0$ und nach (i) ist $\sigma_L(a) \subseteq \sigma_L(a_0)$. Das Element a ist also ein Nicht-Homonym in (V, L).

Es sei jetzt a ein Nicht-Homonym in (V, L). Nach (i) und 2.6 ist a ein primitives Atom in S. Angenommen, $a \in S - A(\sup_S N)$.

Dann gibt es ein $b \in S - A(\sup_S N)$ so, dass $a \nleqq b$. Es gelte $\sup_S B = b$ für $B \subseteq V$. Aus $B \subseteq A(\sup_S N)$ geht $b \in A(\sup_S N)$ hervor. Das ist ein Widerspruch. Deshalb gibt es ein $b_0 \in B - A(\sup_S N)$. Aus 1.9 folgt $a \bar{\dashv}_N o$, $b_0 \bar{\dashv}_N o$. Dann kommen a und b_0 in Ketten der Länge $l(o)$ in L vor und das bedeutet $\sigma_L(a) \cap \sigma_L(b_0) \neq \emptyset$. Daraus folgt $\sigma_L(a) \subseteq \sigma_L(b_0)$ und nach (i) ist $a \leqq b_0$. Wegen $b_0 \leqq b$ gilt $a \leqq b$. Dieser Widerspruch beweist $a \in A(\sup_S N)$.

Aus $a \leqq \sup_S N$ und aus der Primitivität von a ergibt sich die Existenz eines $a_i \in N$ mit $a \leqq a_i$. Nach (i) ist $\sigma_L(a) \subseteq \sigma_L(a_i)$. Weil a_i ein Nicht-Homonym ist und $\sigma_L(a) \neq \emptyset$, gilt $\sigma_L(a_i) \subseteq \sigma_L(a)$. Zusammen $\sigma_L(a) = \sigma_L(a_i)$. Daraus und aus (i) folgt $a = a_i$ und das bedeutet $a \in N$.

2.14. Korollar. *Es seien R, N Teilmengen eines endlichen Verbandes S. Es gilt $R \subseteq S - \mathbf{IR}_S$ und $N \in \mathfrak{N}_S$ dann und nur dann, wenn es eine spezielle Representation (V, L) von S gibt so, dass*

$$\begin{Bmatrix} R \\ N \end{Bmatrix} \textit{ die Menge aller } \begin{Bmatrix} \textit{reinen Homonyme} \\ \textit{Nicht-Homonyme} \end{Bmatrix} \textit{ in } (V, L) \textit{ ist.}$$

Beweis. Es sei $R \subseteq S - \mathbf{IR}_S$ und $N \in \mathfrak{N}_S$. Nach 2.13 existiert zu N und $V = \mathbf{IR}_S \cup R$ eine spezielle Representation (V, L) von S, in der N die Menge aller Nicht-Homonyme in (V, L) ist. Nach [1], 3.7 ist $a \in V$ ein reines Homonym dann und nur dann, wenn $a \bar{\in} \mathbf{IR}_S$. Dies ist mit $a \in R$ äquivalent.

Es sei nun (V, L) eine spezielle Representation von S und R bzw. N sei die Menge aller reinen Homonyme bzw. aller Nicht-Homonyme in (V, L). Aus [1], 3.7 bzw. 2.6 folgt $R \subseteq S - \mathbf{IR}_S$ bzw. $N \in \mathfrak{N}_S$.

3. ZUSAMMENFASSUNG DER ERGEBNISSE

3.1. Satz. *Es seien S ein endlicher Verband und R, W, K, N Teilmengen von S. Es gilt $R \subseteq S - \mathbf{IR}_S$, $W = \mathbf{IR}_S$, $K = \mathbf{P}_S$ und $N \in \mathfrak{N}_S$ dann und nur dann, wenn es eine spezielle Representation (V, L) von S*

$$\textit{existiert und} \begin{Bmatrix} R \\ W \\ K \\ N \end{Bmatrix} \textit{die Menge aller} \begin{Bmatrix} \textit{reinen Homonyme} \\ \textit{Wurzeln} \\ \textit{kompletten Elemente} \\ \textit{Nicht-Homonyme} \end{Bmatrix} \textit{in } (V, L) \textit{ ist.}$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus 2.14, [1], 3.5 und [1], 3.12.

3.2. Definition. Ein Element $a \in V$ heisst ein *freies Homonym* in einer Sprache (V, L), wenn a eine initiale Wortform und kein Nicht-Homonym in (V, L) ist.

3.3. Satz. *Es seien S ein endlicher Verband und P, I, F Teilmengen von S. Es gilt* $P = \mathbf{IR}_S - \mathbf{A}_S$, $I = \mathbf{A}_S$, $F \subseteq \mathbf{A}_S$ und $\mathbf{A}_S - F \in \mathfrak{N}_S$ *dann und nur dann, wenn es eine spezielle Representation (V, L) von S, die keine parasitären Elemente enthält, existiert*

$$\textit{und} \begin{Bmatrix} P \\ I \\ F \end{Bmatrix} \textit{die Menge aller} \begin{Bmatrix} \textit{partiellen Homonyme} \\ \textit{initialen Wortformen} \\ \textit{freien Homonyme} \end{Bmatrix} \textit{in } (V, L) \textit{ ist.}$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus [1], 3.10, [1], 3.8 und 3.1.

LITERATUR

[1] J. Dalík: *Verbandstheoretische Eigenschaften von Sprachen.* Arch. Math. Fasc. 1, Tom XII, 1976.

[2] J. Dalík: *Strong elements in lattices.* (In Vorbereitung).

[3] J. Kunze: *Versuch eines objektivierten Grammatikmodells I, II.* Z. Phonetik Sprachwiss. Komunikat. 20 (1967), 21 (1968).

[4] G. Szász: *Einführung in die Verbandstheorie.* Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1962.

J. Dalík
613 00 Brno, Nám. SNP 18
Tschechoslowakei