Archivum Mathematicum

Libuše Burešová

Über Mengen von Derivationen. I

Archivum Mathematicum, Vol. 13 (1977), No. 1, 1--12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106950

Terms of use:

© Masaryk University, 1977

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XIII: 1—12, 1977

ÜBER MENGEN VON DERIVATIONEN

LIBUŠE BUREŠOVÁ, Brno
(Eingegangen am 1. April 1976)

EINLEITUNG

In dieser Arbeit werden Kategorien $(C, \alpha, \beta, \varphi)$ untersucht, auf denen noch eine weitere Operation $\bullet$: $\alpha(C) \times C \to C$ definiert ist. Diese Operation ist noch weiter durch bestimmte Beziehungen mit den Grundoperationen der Kategorie C verbunden. Solche Kategorie C nenne ich Kategorie mit linksseitiger Multiplikation (1-Kategorie). Es zeigt sich, dass alle auf einer gegebenen Kategorie C konstruierten 1-Kategorien allen möglichen Abbildungen von der Menge $\alpha(C)$ in die Menge allen Endomorphismen von C entsprechen und umgekehrt. Ähnlich werden auch Kategorien mit einer assoziativen linksseitigen Multiplikation (al-Kategorien) und Kategorien mit einer monoidalen linksseitigen Multiplikation (ml-Kategorien) studiert. Diese Probleme lassen sich ähnlich lösen, wie Novotný analoge Probleme für Gruppoide gelöst hat. Insbesondere hat er zu einem gegebenen Gruppoid eine neue binäre Verknüpfung konstruiert so, dass beide ein Distributivgesetz erfüllt haben. Diese Methoden sind anwendbar, da auch hier beide binäre Operationen einer 1-Kategorie durch ein Distributivgesetz gebunden werden.

Diese Untersuchungen sind dadurch begründet, dass es ein wichtiges Modell von ml-Kategorien gibt. Wenn man zu einem semi-Thuesystem alle möglichen linksseitigen Derivationen bildet, so bekommt man eine freie ml-Kategorie mit Operationen, welche in einer sehr natürlichen Weise erklärt sind. Dabei ist der Begriff einer Derivation so definiert, dass er nicht nur Informationen über erzeugte Ketten, sondern auch über die angewandten Regeln trägt.

Umgekehrt, zu jeder freien ml-Kategorie kann man eine Menge von Regeln so wählen, dass die entstandene Menge von Derivationen im oben aufgeführten Sinne mit der gegebenen freien ml-Kategorie isomorph ist.

Diese Ergebnisse ergänzen in gewissem Sinne die Untersuchungen von Hotz, in welchen aber eine andere algebraische Struktur (X-Kategorie) studiert wurde.

An dieser Stelle möchte ich mich sehr herzlich Herrn Professor Miroslav Novotný für die Problemstellung und intensive Führung meiner Arbeit bedanken.

1. L-KATEGORIEN

Es sei $C = (C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Kategorie.

Ist $\bullet$: $\alpha(C) \times C \to C$ eine Operation in C mit folgenden Eigenschaften:

(i) $u(\mathbf{s} \circ \mathbf{t}) = (u\mathbf{s}) \circ (u\mathbf{t})$ für beliebige $u \in \alpha(C)$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{t} \in C$,

(ii) $u\alpha(\mathbf{s}) = \alpha(u\mathbf{s})$, $u\beta(\mathbf{s}) = \beta(u\mathbf{s})$ für beliebige $u \in \alpha(C)$, $\mathbf{s} \in C$,

so heisst C eine Kategorie mit linksseitiger Multiplikation, kurz eine *l-Kategorie*. Wir bezeichnen sie mit $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$.

Eine homomorphe Abbildung von einer Kategorie $C = (C, \alpha, \beta, \varphi)$ in eine Kategorie $C' = (C', \alpha', \beta', \varphi')$, heisst ein Funktor von der Kategorie C in C'.

Der folgende Satz ist von [1] übernommen:

1.1. Satz. *Eine Abbildung Φ von einer Kategorie $C = (C, \alpha, \beta, \circ)$ in eine Kategorie $C' = (C', \alpha', \beta', \circledcirc)$ ist genau dann ein Funktor von C in C', wenn Φ die folgenden Bedingungen erfüllt*

1. *Wenn $x, y \in C$ und $x \circ y$ definiert ist, dann $\Phi(x) \circledcirc \Phi(y)$ ist in C' definiert und gilt*

$$\Phi(x \circ y) = \Phi(x) \circledcirc \Phi(y)$$

2. *$\Phi(e) \in \alpha'(C')$ für jedes $e \in \alpha(C)$.*

Ein Funktor von einer Kategorie $C = (C, \alpha, \beta, \varphi)$ in sich heisst speziell ein Endomorphismus von C.

Aus der Definition einer 1-Kategorie erhalten wir

1.2. Hilfssatz. *Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ eine l-Kategorie, u sei ein beliebiges Element aus $\alpha(C)$, f_u: $C \to C$ sei eine Abbildung mit $f_u(\mathbf{s}) = u \bullet \mathbf{s}$ für jedes $\mathbf{s} \in C$. Dann ist f_u ein Endomorphismus der Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ)$.*

Bezeichnung: Die Menge aller Endomorphismen der Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ)$ bezeichnen wir mit *End* $(C, \alpha, \beta, \circ)$.

1.3. Hilfssatz. *Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Kategorie, für jedes $u \in \alpha(C)$ sei f_u ein beliebiger Endomorphismus der Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ)$. Für beliebige $u \in \alpha(C)$, $\mathbf{s} \in C$ definieren wir $u \bullet \mathbf{s} = f_u(\mathbf{s})$. Dann ist $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ eine l-Kategorie.*

Beweis: Es gilt $u(\mathbf{s} \circ \mathbf{t}) = f_u(\mathbf{s} \circ \mathbf{t}) = f_u(\mathbf{s}) \circ f_u(\mathbf{t}) = (u\mathbf{s}) \circ (u\mathbf{t})$ $u\alpha(\mathbf{s}) = f_u(\alpha(\mathbf{s})) = \alpha(f_u(\mathbf{s})) = \alpha(u\mathbf{s})$ und entsprechend für β.

Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Kategorie. Wir setzen $\mathfrak{A} = End(C, \alpha, \beta, \circ)^{\alpha(C)}$ und wir bezeichnen mit $\mathscr{L}$ die Menge aller 1-Kategorien von der Form $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$. Es sei $b : \mathfrak{A} \to \mathscr{L}$ eine Abbildung, die jedem $F \in \mathfrak{A}$ ein $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet) \in \mathscr{L}$ so zuordnet, dass $u\mathbf{s} = (F(u))(\mathbf{s})$ für beliebige $u \in \alpha(C)$, $\mathbf{s} \in C$ gilt. Dann heisst die Abbildung b *eine Konstruktion.*

NIEDERSÄCHS.
STAATS- U. UNIV.-
BIBLIOTHEK
GÖTTINGEN

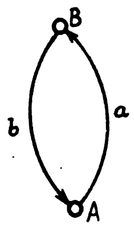
1.4. Satz. *Es sei* $(C, \alpha, \beta, \circ)$ *eine Kategorie. Dann ist die Konstruktion b aus der obigen Definition eine bijektive Abbildung von* $End(C, \alpha, \beta, \circ)^{\alpha(C)}$ *auf die Menge* $\mathscr{L}$ *aller l-Kategorien von der Form* $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$.

Beweis: F ist eine surjektive Abbildung von der Menge $End(C, \alpha, \beta, \circ)^{\alpha(C)}$ auf $\mathscr{L}$ nach 1.2 und 1.3. Es seien $F, F' \in End(C, \alpha, \beta, \circ)^{\alpha(C)}$, $F \neq F'$. Dann gibt es ein $u \in \alpha(C)$ so, dass $F(u) \neq F(u')$ gilt. Folglich existiert ein $\mathbf{s} \in C$ mit der Eigenschaft $u\mathbf{s} = (F(u))(\mathbf{s}) \neq (F'(u))(\mathbf{s}) = u|\mathbf{s}$. Demnach ist $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet) \neq (C, \alpha, \beta, \circ, |)$.

1.5. Beispiel. Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Kategorie, $a \in \alpha(C)$ ein beliebiges Element. Dann ist die Abbildung f mit $f(\mathbf{s}) = a$ für jedes $\mathbf{s} \in C$ ein Endomorphismus.

1.6. Folgerung. *Zu jeder Kategorie* $(C, \alpha, \beta, \circ)$ *gibt es wenigstens eine Operation* $\bullet : \alpha(C) \times C \to C$, *so dass* $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ *eine l-Kategorie ist.*

1.7. Beispiel. Wir nehmen eine Kategorie $C = (C, \alpha, \beta, \circ)$, $C = \{A, B, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, $\alpha(\mathbf{a}) = \beta(\mathbf{b}) = A$, $\alpha(\mathbf{b}) = \beta(\mathbf{a}) = B$, $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = A$, $\mathbf{b} \circ \mathbf{a} = B$. Diese Kategorie C ist durch Fig. 1 graphisch dargestellt:



Nun untersuchen wir die Endomorphismen von $(C, \alpha, \beta, \circ)$. Man überzeugt sich leicht, dass es 4 verschiedene Endomorphismen $f_1, \ldots, f_4$ gibt:

	f_1	f_2	f_3	f_4
A	A	A	B	B
B	B	A	B	A
$\mathbf{a}$	$\mathbf{a}$	A	B	$\mathbf{b}$
$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	A	B	$\mathbf{a}$

Eine Menge $\mathfrak{A} = End(C, \alpha, \beta, \circ)^{\alpha(C)}$ enthält also 16 Elemente $F_1, \ldots, F_{16}$, die in folgender Tabelle aufgeführt sind:

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
A	f_1	f_1	f_1	f_1	f_2	f_2	f_2	f_2	f_3	f_3	f_3	f_3	f_4	f_4	f_4	f_4
B	f_1	f_2	f_3	f_4	f_2	f_1	f_3	f_4	f_3	f_1	f_2	f_4	f_4	f_1	f_2	f_3

Die Konstruktion b ist eine bijektive Abbildung der Menge $\mathfrak{A}$ in die Menge $\mathscr{L}$ aller 1-Kategorien von der Form $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$. Diese Menge $\mathscr{L}$ enthält 16 verschiedene Elemente $C_1, \ldots, C_{16}$, welche sich durch die Operation $\bullet$ voneinander unterscheiden, wie aus der folgenden Tabelle hervorgeht:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}
$A . A$	A	A	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B
$A . B$	B	B	B	B	A	A	A	A	B	B	B	B	A	A	A	A
$A . \mathbf{a}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{a}$	A	A	A	A	B	B	B	B	$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$
$A . \mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	A	A	A	A	B	B	B	B	$\mathbf{a}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{a}$
$B . A$	A	A	B	B	A	A	B	B	B	A	A	B	B	A	A	B
$B . B$	B	A	B	A	A	B	B	A	B	B	A	A	A	B	A	B
$B . \mathbf{a}$	$\mathbf{a}$	A	B	$\mathbf{b}$	A	$\mathbf{a}$	B	$\mathbf{b}$	B	$\mathbf{a}$	A	$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{a}$	A	B
$B . \mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	A	B	$\mathbf{a}$	A	$\mathbf{b}$	B	$\mathbf{a}$	B	$\mathbf{b}$	A	$\mathbf{a}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	A	B

2. AL-KATEGORIEN

Eine 1-Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ heisst Kategorie mit einer assoziativen linksseitigen Multiplikation, kurz *al-Kategorie*, wenn

(iii) $u(v\mathbf{s}) = (uv)\,\mathbf{s}$ für beliebige $u, v \in \alpha(C)$, $\mathbf{s} \in C$ gilt.

2.1. Hilfssatz. *Es sei* $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ *eine al-Kategorie. Ist* $f_x (x \in \alpha(C))$ *das Element von* $End(C, \alpha, \beta, \circ)$, *welches* $f_x(\mathbf{s}) = x \bullet \mathbf{s}$ *für jedes* $\mathbf{s} \in C$ *erfüllt, dann gilt*

$$f_u f_v = f_{uv}$$

für beliebige $u, v \in \alpha(C)$.

Beweis: Nach der Definition der al-Kategorie gilt $(f_u f_v)\,\mathbf{s} = f_u(f_v(\mathbf{s})) = f_u(v\mathbf{s}) = u(v\mathbf{s}) = (uv)\,\mathbf{s} = f_{uv}(\mathbf{s})$ für jedes $\mathbf{s} \in C$.

Jede Abbildung $F : \alpha(C) \to End(C, \alpha, \beta, \circ)$ kann man als eine Abbildung $T : \alpha(C) \times C \to C$ betrachten: $T(u, \mathbf{s}) = (F(u))\,(\mathbf{s})$ für beliebige $u \in \alpha(C)$, $\mathbf{s} \in C$.

Die Abbildung F heisst *translativ*, wenn die zugeordnete Abbildung T die Bedingung

$$T(u, T(v, \mathbf{s})) = (T(u, v), \mathbf{s})$$

erfüllt. Wir bezeichnen mit $Trans(C, \alpha, \beta, \circ)$ die Menge aller translativen Abbildungen von $\alpha(C)$ in $End(C, \alpha, \beta, \circ)$.

2.2. Folgerung. *Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ eine al-Kategorie. Dann ist die Abbildung $F : \alpha(C) \to End\,(C, \alpha, \beta, \circ)$, die jedem $u \in \alpha(C)$ einen Endomorphismus $f_u : f_u(\mathbf{s}) = u\mathbf{s}$ für jedes $\mathbf{s} \in C$ zuordnet, translativ.*

Beweis: Man legt $F(u) = f_u$. Unter Beachtung von 2.1 gilt $T(u, T(v, \mathbf{s})) = f_u(f_v(\mathbf{s})) = f_{uv}(\mathbf{s}) = F(uv)\,(\mathbf{s}) = T(uv, \mathbf{s}) = T(f_u(v), \mathbf{s}) = T(T(u, v), \mathbf{s})$.

2.3. Hilfssatz. *Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Kategorie $F : \alpha(C) \to End(C, \alpha, \beta, \circ)$ ihre translative Abbildung. Für jedes $u \in \alpha(C)$, $\mathbf{s} \in C$ definieren wir $u\mathbf{s} = (F(u))\,(\mathbf{s})$. Dann ist $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ eine al-Kategorie.*

Beweis: $(C, \alpha, \beta, \circ)$ ist eine 1-Kategorie nach 1.3. Es gilt offenbar

$$(uv)\,\mathbf{s} = T(uv, \mathbf{s}) = T(T(u, v), \mathbf{s}) = T(u, T(v, \mathbf{s})) = u(v\mathbf{s})$$

für beliebige $u, v \in \alpha(C)$, $\mathbf{s} \in C$. Folglich ist $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ eine al-Kategorie.

2.4. Satz. *Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Kategorie und b die im Abschnitt* 1 *definierte Abbildung. Dann ist die Restriktion der Abbildung b auf $Trans(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine bijektive Abbildung der Menge $Trans(C, \alpha, \beta, \circ)$ auf die Menge aller al-Kategorien von der Form $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$.*

Der Beweis folgt aus 2.2. und 2.3.

2.5. Hilfssatz. *Es sei $F : \alpha(C) \to End(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine durch folgende Gleichung definierte Abbildung*

$F(a) = {}_af$ für jedes $a \in \alpha(C)$ und ${}_af(\mathbf{s}) = a$ für jedes $\mathbf{s} \in C$. Dann ist F eine translative Abbildung.

Beweis: Es gilt $T(u, T(v, \mathbf{s})) = T(u, (F(v)\,(\mathbf{s})) = T(u, v) = (F(u))\,(v) = u = (F(u))\,(\mathbf{s}) = T(u, \mathbf{s}) = T((F(u))\,(v), \mathbf{s}) = T(T(u, v), \mathbf{s})$.

2.6. Folgerung. *Zu jeder Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ)$ gibt es wenigstens eine Operation $\bullet : \alpha(C) \times C \to C$ so, dass $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ eine al-Kategorie ist.*

2.7. Beispiel. Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ)$ die Kategorie aus dem Beispiel 1.7.

Wir untersuchen die Menge $\mathfrak{A} = \{F_1, \ldots, F_{16}\}$, um alle translative Abbildungen zu finden.

Zuerst nehmen wir die Abbildung $F_1 : F_1(A) = f_1$, $F_1(B) = f_1$. Die zugeordnete Abbildung $T_1 : \alpha(C) \times C \to C$ ist durch folgende Gleichungen definiert.

$$
\begin{aligned}
T_1(A, A) &= f_1(A) = A\\
T_1(A, B) &= f_1(B) = B\\
T_1(A, \mathbf{a}) &= f_1(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\\
T_1(A, \mathbf{b}) &= f_1(\mathbf{b}) = \mathbf{b}\\
T_1(B, A) &= f_2(A) = A\\
T_1(B, B) &= f_2(B) = B\\
T_1(B, \mathbf{a}) &= f_2(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\\
T_1(B, \mathbf{b}) &= f_2(\mathbf{b}) = \mathbf{b}
\end{aligned}
$$

F_1 ist translativ, denn

$$
\begin{aligned}
T_1(A, T_1(A, A)) &= T_1(A, A) = T_1(T_1(A, A), A)\\
T_1(A, T_1(A, B)) &= T_1(A, B) = T_1(T_1(A, A), B)\\
T_1(A, T_1(A, \mathbf{a})) &= T_1(A, \mathbf{a}) = T_1(T_1(A, A), \mathbf{a})\\
T_1(A, T_1(A, \mathbf{b})) &= T_1(A, \mathbf{b}) = T_1(T_1(A, A), \mathbf{b})\\
T_1(A, T_1(B, A)) &= T_1(A, A) = T_1(B, A) = T_1(T_1(A, B), A)\\
T_1(A, T_1(B, B)) &= T_1(A, B) = T_1(B, B) = T_1(T_1(A, B), B)\\
T_1(A, T_1(B, \mathbf{a})) &= T_1(A, \mathbf{a}) = T_1(B, \mathbf{a}) = T_1(T_1(A, B), \mathbf{a})\\
T_1(A, T_1(B, \mathbf{b})) &= T_1(A, \mathbf{b}) = T_1(B, \mathbf{b}) = T_1(T_1(A, B), \mathbf{b})\\
T_1(B, T_1(A, A)) &= T_1(B, A) = T_1(A, A) = T_1(T_1(B, A), A)\\
T_1(B, T_1(A, B)) &= T_1(B, B) = T_1(A, B) = T_1(T_1(B, A), B)\\
T_1(B, T_1(A, \mathbf{a})) &= T_1(B, \mathbf{a}) = T_1(A, \mathbf{a}) = T_1(T_1(B, A), \mathbf{a})\\
T_1(B, T_1(A, \mathbf{b})) &= T_1(B, \mathbf{b}) = T_1(A, \mathbf{b}) = T_1(T_1(B, A), \mathbf{b})\\
T_1(B, T_1(B, A)) &= T_1(B, A) = T_1(T_1(B, B), A)\\
T_1(B, T_1(B, B)) &= T_1(B, B) = T_1(T_1(B, B), B)\\
T_1(B, T_1(B, \mathbf{a})) &= T_1(B, \mathbf{a}) = T_1(T_1(B, B), \mathbf{a})\\
T_1(B, T_1(B, \mathbf{b})) &= T_1(B, \mathbf{b}) = T_1(T_1(B, B), \mathbf{b})
\end{aligned}
$$

Die Abbildung F_2 ist nicht translativ. Es ist nämlich

$$
\begin{aligned}
T_2(B, T_2(B, B)) &= f_2(f_2(B)) = f_2(A) = A\\
T_2(T_2(B, B), B) &= T_2(f_2(B), B) = T_2(A, B) = f_1(B) = B
\end{aligned}
$$

Also $T_2(B, T_2(B, B)) \neq T_2(T_2(B, B), B)$.

Nach der Untersuchung aller Abbildungen bekommen wir die Menge *Trans* $(C, \alpha, \beta, \circ) = \{F_1, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_{14}\}$ aller translativen Abbildungen.

Da die Konstruktion b C_i zu F_i zuordnet, ist $\mathscr{L}_1 = \{C_1, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_{14}\}$ die Menge aller al-Kategorien von der Form $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$.

3. ML-KATEGORIEN

Eine al-Kategorie heisst Kategorie mit einer monoidalen linksseitigen Multiplikation, kurz eine *ml-Kategorie*, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt:

(iv) Es gibt ein $e \in \alpha(C)$ so, dass $e\mathbf{s} = \mathbf{s}$ für jedes $\mathbf{s} \in C$ und $ue = u$ für jedes $u \in \alpha(C)$.

Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Kategorie, $F : \alpha(C) \to End(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Abbildung, $T(u, \mathbf{s}) = (F(u))(\mathbf{s})$ die zugeordnete Abbildung $T : \alpha(C) \times C \to C$. Wir sagen, dass die Abbildung F stark translativ ist, wenn sie translativ ist und wenn es ein $e \in \alpha(C)$ mit den Eigenschaften $T(u, e) = u$ für jedes $u \in \alpha(C)$, $T(e, \mathbf{s}) = \mathbf{s}$ für jedes $\mathbf{s} \in C$, gibt. Wir bezeichnen mit $S\text{-}Trans(C, \alpha, \beta, \circ)$ die Menge aller stark translativen Abbildungen von $\alpha(C)$ in $End(C, \alpha, \beta, \circ)$.

3.1. Hilfssatz. *Ist $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ eine ml-Kategorie, dann ist die Abbildung F, welche zu jedem $u \in \alpha(C)$ den Endomorphismus $f_u \in End(C, \alpha, \beta, \circ)$ mit $f_u(\mathbf{s}) = u\mathbf{s}$ für jedes $\mathbf{s} \in C$ zuordnet, stark translativ.*

Beweis: Gemäss 2.2 ist F eine translative Abbildung. Weiter gilt $T(u, e) = (F(u))(e) = ue = u$ für jedes $u \in \alpha(C)$ und $T(e, s) = (F(e))(\mathbf{s}) = e\mathbf{s} = \mathbf{s}$ für jedes $\mathbf{s} \in C$. Demnach gilt 3.1.

3.2. Hilfssatz. *Sei $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Kategorie, $F : \alpha(C) \to End(C, \alpha, \beta, \circ)$ ihre stark translative Abbildung. Für jedes $u \in \alpha(C)$, $\mathbf{s} \in C$ definieren wir $u\mathbf{s} = (F(u))(\mathbf{s})$. Dann ist $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ eine ml-Kategorie.*

Beweis: Gemäss 2.3 ist $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ eine al-Kategorie. Es gilt $ue = (F(u))(e) = T(u, e) = u$ für jedes $u \in \alpha(C)$, $e\mathbf{s} = (F(e))(\mathbf{s}) = T(e, \mathbf{s}) = \mathbf{s}$ für jedes $\mathbf{s} \in C$. Also C ist eine ml-Kategorie.

3.3. Satz. *Es sei $(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine Kategorie und b die im Abschnitt* 1 *definierte Abbildung. Dann ist die Restriktion der Abbildung b auf $S\text{-}Trans(C, \alpha, \beta, \circ)$ eine bijektive Abbildung von der Menge $S\text{-}Trans(C, \alpha, \beta, \circ)$ auf die Menge aller ml-Kategorien von der Form $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$.*

Beweis: Der Satz folgt aus 2.4, 3.1 und 3.2.

3.4. Hilfssatz. *Es sei $e \in \alpha(C)$ ein beliebiges Element. Wir legen $F(e) = {}_ef$* mit *${}_ef \in End(C, \alpha, \beta, \circ)$, ${}_ef(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$ für jedes $\mathbf{s} \in C$. Weiter definieren wir für jedes $u \in \alpha(C)$, $u \neq e$, $F(u) = {}_uf \in End(C, \alpha, \beta, \circ)$, ${}_uf(\mathbf{s}) = u$ für jedes $\mathbf{s} \in C$. Dann ist F eine stark translative Abbildung.*

Beweis: Gilt $u \neq e \neq v$, dann ist $T(u, T(v, \mathbf{s})) = T(T(u, v), \mathbf{s})$ nach 2.5. Offenbar ist $T(u, e) = (F(u))(e) = u$, $T(e, \mathbf{s}) = (F(e))(\mathbf{s}) = {}_ef(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$ für jedes $u \in \alpha(C)$, $\mathbf{s} \in C$. Ferner $T(e, T(v, \mathbf{s})) = T(v, \mathbf{s}) = T(T(e, v), \mathbf{s})$ und $T(v, (e, \mathbf{s})) = T(v, \mathbf{s}) = T(T(v, e)\, \mathbf{s})$ für jedes $v \in \alpha(C)$ und $\mathbf{s} \in C$. Also ist F stark translativ.

3.5. Folgerung. *Zu jeder Kategorie* $(C, \alpha, \beta, \circ)$ *gibt es wenigstens eine Operation* $\bullet$: $: \alpha(C) \times C \to C$ *so, dass* $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ *eine ml-Kategorie ist.*

3.6. Beispiel. Wir setzen das Beispiel 1.7 und 2.7 fort. Wir werden in der Menge $Trans(C, \alpha, \beta, \circ)$ ihre stark translativen Elemente finden.

Wir versuchen für $i = 1, 3, 4, 5, 6, 7, 14$ ein Element $e \in \alpha(C)$ mit den Eigenschaften

(α) $T_i(u, e) = u$ für jedes $u \in \alpha(C)$

(β) $T_i(e, \mathbf{s}) = \mathbf{s}$ für jedes $\mathbf{s} \in C$

zu finden.

Es gilt $T_1(B, A) = A$, $T_1(A, B) = B$, also besitzt weder A noch B die verlangten Eigenschaften für $i = 1$. Folglich ist F_1 keine stark translative Abbildung.

Unter Beachtung von

$$T_3(A, A) = A, \quad T_3(B, A) = B, \quad T_3(A, B) = B, \quad T_3(A, \mathbf{a}) = \mathbf{a} \quad T_3(A, \mathbf{b}) = \mathbf{b},$$

erfüllt A für $i = 3$ die Bedingungen α, β, also F_3 ist eine stark translative Abbildung. Entsprechend findet man auch, dass F_6, F_{14} stark translativ, während F_4, F_5, F_7 nicht stark translativ sind. Also $S\text{-}Trans(C, \alpha, \beta, \circ) = \{F_3, F_4, F_6, F_{14}\}$. Daraus folgt, dass $\{C_3, C_4, C_6, C_{14}\}$ die Menge aller ml-Kategorien von der Form $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ ist.

Eine ml-Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ heisst eine *ml-Kategorie über einem Monoid G*, wenn $\alpha(C) = G$ (einschliesslich der Multiplikation). Also ist eine ml-Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ über einem monoid G eine Kategorie $(C, \alpha, \beta, \circ)$ mit einer Operation $\bullet$: $G \times C \to C$, die folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $u(\mathbf{s} \circ \mathbf{t}) = (u\mathbf{s}) \circ (u\mathbf{t})$ für beliebige $u \in G$, $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in C$

(ii) $\alpha(u\mathbf{s}) = u\alpha(\mathbf{s})$, $\beta u(\mathbf{s}) = u\beta(\mathbf{s})$ für beliebige $u \in G$, $\mathbf{s} \in C$

(iii) $u(v\mathbf{s}) = (uv)\,\mathbf{s}$ für beliebige $u, v \in G$, $\mathbf{s} \in C$

(iv) Es gibt ein $e \in G$ so, dass $e\mathbf{s} = \mathbf{s}$ und $ue = u$ für beliebige $\mathbf{s} \in C$, $u \in G$

Es seien G ein Monoid, $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ und $(D, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ ml-Kategorien über G, $M \subseteq C$ eine beliebige Menge. Es sei f eine Abbildung: $M \to D$ mit der Eigenschaft $f | G \cap M = id_{G \cap M}$ und $\alpha(f(\mathbf{x})) = \alpha(\mathbf{x})$, $\beta(f(\mathbf{x})) = \beta(\mathbf{x})$ für jedes $\mathbf{x} \in M$. Dann sagt man, dass die Abbildung f die Existenz von Summen erhalten lässt. Wirklich, wenn für einige $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$ definiert ist, dann gilt $\beta(f(\mathbf{x})) = \beta(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{y}) = \alpha(f(\mathbf{y}))$, also existiert $f(\mathbf{x}) \circ f(\mathbf{y})$ in D.

Eine Abbildung, welche Existenz von Summen erhalten lässt, wird *treu* heissen.

Es seien $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$, $(D, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ ml-Kategorien über G, f eine Abbildung von C in D. Wir sagen, dass f ein Homomorphismus ist, wenn f ein Funktor von $(C, \alpha, \beta, \circ)$ in $(D, \alpha, \beta, \circ)$ ist und die folgende Bedingungen erfüllt sind

(i) $f(u \bullet \mathbf{x}) = f(u) \bullet f(\mathbf{x})$ für beliebige $u \in G$ und $\mathbf{x} \in C$

(ii) $f | G = id_G$

Der Begriff einer ml-Teilkategorie lässt sich in üblicher Weise erklären. Ist $C = (C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ eine ml-Kategorie über G und $D = (D, \alpha, \beta, \circ)$ eine Teilkategorie von $(C, \alpha, \beta, \circ)$, so heisst sie eine ml-Teilkategorie von $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$, wenn $G \subseteq D$ und die Menge D in Bezug auf die Operation $\bullet$ abgeschlossen ist. Eine ml-Teilkategorie von C wird mit $D = (D, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ bezeichnet. Wenn $M \subseteq C$ ist, so ist der Durchschnitt aller ml-Teilkategorien über G, welche M enthalten und in C enthalten sind, wieder eine ml-Teilkategorie von C über G; sie heisst die von M erzeugte ml-Teilkategorie von C über G.

Es sei $C = (C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ die von M erzeugte ml-Kategorie über G, $M \subseteq C$. Die ml-Kategorie C heisst frei von M erzeugt, wenn sie die folgende Bedingung erfüllt:

Für jede ml-Kategorie $D = (D, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ über G und für jede treue Abbildung f von M in D gibt es eine homomorphe Abbildung F von C in D mit $F \mid M = f$.

Eine ml-Kategorie über G, welche von einer Menge frei erzeugt ist, heisst eine *reie ml-Kategorie über G*.

4. DIE MENGEN D_R, I_R, S_R

Es sei G ein Monoid, $R \subseteq G \times G$ eine Menge. Wir bezeichnen mit $\underset{R}{\Rightarrow}$ die Menge aller geordneten Paare $\mathbf{s} = (s, t)$ von Elementen aus R, zu welchen Elemente $u \in G$, $(y, x) \in R$ existieren, so dass im Monoid G die Gleichungen $s = uy$, $ux = t$ gelten.

Man bezeichne mit D_R die Menge aller Folgen $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ mit $n \geqq 0$ und $(t_{i-1}, t_i) \in \underset{R}{\Rightarrow}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Die Folge in der Form (t), die nur ein Element besitzt, identifizieren wir mit dem zugehörigen Element $t \in G$. Demnach schreiben wir $t \in D_R$ für jedes $t \in G$.

Auf D_R wird eine Algebra $(D_R, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ vom Typ $(1, 1, 2, 2)$ mit vollständigen einstelligen Operationen α, β, einer partiellen binären Verknüpfung $\circ$ und einer partiellen binären Verknüpfung $\bullet$ erklärt. Diese Operationen definieren wir folgendermassen:

(i) $\alpha(\mathbf{t}) = t_0$, $\beta(\mathbf{t}) = t_n$ für jedes $\mathbf{t} = (t_0, \ldots, t_n) \in D_R$

(ii) Es seien $\mathbf{s}, \mathbf{t}$ beliebige Elemente aus G. Gilt $\beta(\mathbf{s}) = \alpha(\mathbf{t})$, dann ist $\mathbf{s} \circ \mathbf{t}$ definiert, und zwar $\mathbf{s} \circ \mathbf{t} = \mathbf{z}$, $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_{n+m}) \in D_R$ mit

$$z_i = \begin{cases} s_i & \text{für } i = 0, 1, \ldots, m \\ t_{i-m} & \text{für } i = m + 1, \ldots, m + n \end{cases}$$

(iii) Es seien $u \in G$, $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_n) \in D_R$ $(n \geqq 0)$ beliebige Elemente. Dann ist $u \bullet \mathbf{t}$ definiert und zwar

$$u \bullet \mathbf{t} = (ut_0, ut_1, \ldots, ut_n).$$

(Die Operation $\bullet$ ist eine Erweiterung der in G definierten Operation $\bullet$).

Es seien $R \subseteq G \times G$, $\mathscr{K}$ Mengen und $f: \mathscr{K} \to R$ eine surjektive Abbildung. Es sei J_R die Menge aller geordneten n-Tupel $(u_i, \boldsymbol{r}_i, k_i)_{i=1}^n$ $(n \geqq 1)$ mit $(u_i, \boldsymbol{r}_i, k_i) \in G \times R \times \mathscr{K}$, $\boldsymbol{r}_i = (y_i, x_i)$, $u_i y_i = u_{i-1} x_{i-1}$ für $i = 2, \ldots, n$. Wir setzen $I_R = J_R \cup G$.

Auf I_R wird eine Algebra $(I_R, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ vom Typ $(1, 1, 2, 2)$ mit vollständigen einstelligen Operationen α, β, einer partiellen binären Verknüpfung $\circ$ und einer partiellen binären Operation $\bullet$ erklärt. Diese Operationen definieren wir folgendermassen:

(1) Ist $u \in G$, so definieren wir $\alpha(u) = u = \beta(u)$. Ist $\boldsymbol{s} = (u_i, \boldsymbol{r}_i, k_i)_{i=1}^n \in I_R$ $(n \geqq 1)$ mit $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i) \in R$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, so wird $\alpha(\boldsymbol{s}) = u_1 y_1$, $\beta(\boldsymbol{s}) = u_n x_n$ gesetzt.

(2) Die Verknüpfung $\circ$ ist für $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \in I_R$ definiert, wenn $\beta(\boldsymbol{s}) = \alpha(\boldsymbol{t})$ ist. Wir unterscheiden folgende Fälle:

a) Es sei $\boldsymbol{s} = u \in G$, $\boldsymbol{t} = (u_i, \boldsymbol{r}_i, k_i)_{i=1}^n \in I_R$ $(n \geqq 1)$ mit $\boldsymbol{r}_i = (y_i, x_i)$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ und $u = u_1 y_1$. Dann legt man $\boldsymbol{s} \circ \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}$

b) Es seien $\boldsymbol{s} = (u_i, \boldsymbol{r}_i, k_i)_{i=1}^n \in I_R$ $(n \geqq 1)$ mit $\boldsymbol{r}_i = (y_i, x_i)$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, $\boldsymbol{t} = v \in G$; dabei sei $u_n x_n = v$. Dann legt man $\boldsymbol{s} \circ \boldsymbol{t} = \boldsymbol{s}$.

c) Es sei $\boldsymbol{s} = (u_i, \boldsymbol{r}_i, k_i)_{i=1}^m \in I_R$ $(m \geqq 1)$ mit $\boldsymbol{r}_i = (y_i, x_i)$ für $i = 1, 2, \ldots, m$, $\boldsymbol{t} = (v_i, \boldsymbol{p}_i, l_i)_{i=1}^n \in I_R$ $(n \geqq 1)$ mit $\boldsymbol{p}_i = (c_i, d_i)$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Es sei $u_m x_m = v_1 c_1$. Dann legt man $\boldsymbol{s} \circ \boldsymbol{t} = \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z} = (w_i, \boldsymbol{q}_i, j_i)_{i=1}^{m+n} \in I_R$ mit

$$w_i = \begin{cases} u_i & \text{für } i = 1, 2, \ldots, m \\ v_i & \text{für } i = m+1, \ldots, m+n \end{cases}$$

$$q_i = \begin{cases} \boldsymbol{r}_i & \text{für } i = 1, 2, \ldots, m \\ \boldsymbol{p}_i & \text{für } i = m+1, \ldots, m+n \end{cases}$$

$$j_i = \begin{cases} k_i & \text{für } i = 1, 2, \ldots, m \\ l_i & \text{für } i = m+1, \ldots, m+n \end{cases}$$

(3) Schliesslich definieren wir für $v \in G$, $\boldsymbol{s} \in I_R$ das Element $v\boldsymbol{s}$ auf folgende Weise: Ist $\boldsymbol{s} = u \in G$, dann legt man $v\boldsymbol{s} = vu$. Ist $\boldsymbol{s} = (u_i, \boldsymbol{r}_i, k_i)_{i=1}^n$ $(n \geqq 1)$, so definiert man $v\boldsymbol{s} = (vu_i, \boldsymbol{r}_i, k_i)_{i=1}^n$.

Speziell kann man für die Menge $\mathscr{K}$ die Menge R und für f die Identität auf R nehmen. In diesem Falle bezeichnen wir die Menge I_R mit S_R; die Elemente aus S_R werden wir anstatt $(u_i, \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_i)_{i=1}^n$ einfach $(u_i, \boldsymbol{r}_i)_{i=1}^n$ schreiben.

4.1. Hilfssatz. *Es sei G ein Monoid, $R \subseteq G \times G$ eine Menge. Es bezeichene X ein beliebiges von den Symbolen D, I, S. Dann gelten folgende Behauptungen:*

a) *$(X_R, \alpha, \beta, \circ)$ ist eine freie Kategorie mit $\alpha(X_R) = G = \beta(X_R)$.*

b) *Die partielle Operation $\bullet$: $G \times X_R \to X_R$ besitzt die folgenden Eigenschaften*

(i) *$u(\boldsymbol{s} \circ \boldsymbol{t}) = u\boldsymbol{s} \circ u\boldsymbol{t}$ für beliebige $u \in G$, $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \in X_R$*

(ii) *$u\alpha(\boldsymbol{s}) = \alpha(u\boldsymbol{s})$, $u\beta(\boldsymbol{s}) = \beta(u\boldsymbol{s})$ für beliebige $u \in G$, $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \in X_R$*

(iii) *$u(v\boldsymbol{s}) = (uv)\boldsymbol{s}$ für beliebige $u, v \in G$, $\boldsymbol{s} \in X_R$*

(iv) *Ist e das Einselement des Monoids G, so gilt $e\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}$ für jedes $\boldsymbol{s} \in X_R$*

Beweis: a) $(D_R, \alpha, \beta, \circ)$, $(I_R, \alpha, \beta, \circ)$, $(S_R, \alpha, \beta, \circ)$ sind offensichtlich Kategorien. Wir zeigen, dass sie freie Kategorien sind.

1. Wir betrachten zuerst die Kategorie $(D_R, \alpha, \beta, \circ)$. Man überzeugt sich leicht, dass $Y = \{(s, t); (s, t) \in \underset{R}{\Rightarrow}\}$ die Menge aller irreduziblen Elemente sind. (Die Definition von irreduziblen Elementen kann man in [1] finden). Es sei $x \in D_R - G$, $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $n > 0$, $x_i \in G$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Dann gilt $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_0, x_1) \circ \ldots \circ (x_{n-1}, x_n) = \mathbf{x}_0 \circ \ldots \circ \mathbf{x}_n$, mit $\mathbf{x}_i = (x_{i-1}, x_i) \in Y$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Offenbar ist $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \circ \ldots \circ \mathbf{x}_n$ die einzige Darstellung von $\mathbf{x}$ als Produkt von irreduziblen Elementen. Keine Einheit von D_R ist dagegen als Produkt von irreduziblen Elementen darstellbar. Nach § 30, Satz 7 in [1] ist also D_R eine freie Kategorie.

2. Ganz entsprechend kann man beweisen, dass $(I_R, \alpha, \beta, \circ)$ eine freie Kategorie ist. Die Menge aller irreduziblen Elemente ist in diesem Falle die Menge $Y = \{(u, \mathbf{r}, k); u \in G, f(k) = \mathbf{r}, k \in \mathscr{K}\}$.

3. Aus 2) folgt, dass $(S_R, \alpha, \beta, \circ)$ eine freie Kategorie ist, da S_R ein spezieller Fall der Kategorie I_R ist.

b) Die Behauptung b) folgt unmittelbar aus der Definition der Algebren D_R, I_R, S_R.

4.2. Satz. *Es sei G ein Monoid, $R \subseteq G \times G$. Dann ist $(I_R, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ eine freie ml-Kategorie über G. Die Menge $M = \{(e, \mathbf{r}, k); (e, \mathbf{r}, k) \in I_R$, e ist das Einselement von $G\}$ ist ein Erzeugendensystem von I_R.*

Beweis: 1. Wir beweisen zuerst, dass die Menge M die Kategorie I_R erzeugt. Es sei C' die kleinste ml-Kategorie über G mit der Eigenschaft $M \subseteq C'$. Es sei $\mathbf{x} \in I_R$ ein beliebiges Element. Wenn $\mathbf{x} \in G$, so $\mathbf{x} \in C'$. Es sei also $\mathbf{x} \notin G$. Dann existieren $u_i, \mathbf{r}_i, k_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geqq 1$ so, dass $\mathbf{x} = (u_i, \mathbf{r}_i, k_i)_{i=1}^n$. Es gilt $\mathbf{x} = u_1(e, \mathbf{r}_1, k_1) \circ u_2(e, \mathbf{r}_2, k_2) \circ \ldots \circ u_n(e, \mathbf{r}_n, k_n)$. Weiter folgt aus $(e, \mathbf{r}_i, k_i) \in M$, $u_i \in G$, dass $u_i(e, \mathbf{r}_i, k_i) \in C'$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt. Hieraus ergibt sich $\mathbf{x} = u_1(e, \mathbf{r}_1, k_1) \circ \ldots \circ u_n(e, \mathbf{r}_n, k_n) \in C'$. Folglich $I_R \subseteq C'$ und wegen der Minimalität von C' ist $I_R = C'$.

2. Es sei $D = (D, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ eine ml-Kategorie über G, $f: M \to D$ eine beliebige treue Abbildung. Für beliebige $u \in G$, $\mathbf{x} = (e, \mathbf{r}, k) \in M$ legen wir $F(u) = u$, $F(u\mathbf{x}) = uf(\mathbf{x})$. Es gilt $\alpha(F(u\mathbf{x})) = \alpha(uf(\mathbf{x})) = u\alpha(f(\mathbf{x})) = u\alpha(\mathbf{x}) = \alpha(u\mathbf{x})$ und entsprechend $\beta(F(u\mathbf{x})) = \beta(u\mathbf{x})$.

Es sei jetzt $\mathbf{x} \in I_R - G$, $\mathbf{x} = (u_i, \mathbf{r}_i, k_i)_{i=1}^n$, $n \geqq 1$. Dann ist $\mathbf{x} = u_1(e, \mathbf{r}_1, k_1) \circ \ldots \circ u_n(e, \mathbf{r}_n, k_n) = u_1\mathbf{x}_1 \circ \ldots \circ u_n\mathbf{x}_n$. Dabei ist $\mathbf{x}_i \in M$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Demnach ist $F(u_{i-1}x_{i-1}) \circ F(u_i x_i)$ für $i = 2, 3, \ldots, n$ definiert. Man kann also $F(\mathbf{x}) = F(u_1\mathbf{x}_1) \circ \ldots \circ F(u_n\mathbf{x}_n)$ setzen. Hieraus folgt $\alpha(F(\mathbf{x})) = \alpha(F(u_1\mathbf{x}_1)) = \alpha(u_1\mathbf{x}_1) = \alpha(\mathbf{x})$ und entsprechend $\beta(F(\mathbf{x})) = \beta(\mathbf{x})$.

Wir haben jetzt zu zeigen, dass F ein Homomorphismus von I_R in D ist. Es seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I_R$ und $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$ sei definiert. Da $\beta(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{y})$, gilt $\beta(F(\mathbf{x})) = \beta(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{y}) =$

$= \alpha(F(\mathbf{y}))$, also ist $F(\mathbf{x}) \circ F(\mathbf{y})$ definiert. Es sei $\mathbf{x} = (u_i, \mathbf{r}_i, k_i)_{i=1}^n$ $(n \geqq 1)$, $y = (v_i, \mathbf{s}_i, l_i)_{i=1}^m$ $(m \geqq 1)$, dann gilt $F(\mathbf{x} \circ \mathbf{y}) = F(u_1(e, \mathbf{r}_1, k_1) \circ \ldots \circ u_n(e, \mathbf{r}_n, k_n) \circ v_1(e, \mathbf{s}_1, l_1) \circ \ldots \circ v_m(e, \mathbf{s}_m, l_m)) = F(u_1(e, \mathbf{r}_1, k_1)) \circ \ldots \circ F(u_n(e, \mathbf{r}_n, k_n)) \circ F(v_1(e, \mathbf{s}_1, l_1)) \circ \ldots \circ F(v_m(e, \mathbf{s}_m, l_m)) = F(\mathbf{x}) \circ F(\mathbf{y})$.

Es sei $u \in G$ ein beliebiges Element, $\mathbf{x} \in I_R$ mit $\mathbf{x} = (u_i, \mathbf{r}_i, k_i)_{i=1}^n$. Dann ist $F(u\mathbf{x}) = F(uu_i, \mathbf{r}_i, k_i)_{i=1}^n = F(uu_1(e, \mathbf{r}_1, k_1) \circ \ldots \circ uu_n(e, \mathbf{r}_n, k_n)) = uF(u_1(e, \mathbf{r}_1, k_1) \circ \ldots \circ u_n(e, \mathbf{r}_n, k_n)) = uF(\mathbf{x})$. Demnach ist F ein Homomorphismus von I_R in D mit der Eigenschaft $F \mid M = f$.

4.3. Folgerung. *Es sei G ein Monoid, $R \subseteq G \times G$. Dann ist S_R eine freie ml-Kategorie über G. Die Menge $M = \{(e, \mathbf{r}); (e, \mathbf{r}) \in S_R$, e ist ein Einselement von $G\}$ ist ein reies Erzeugendensystem von $S f_R$.*

4.4. Satz. *Zu jeder freien ml-Kategorie C über G existiert eine Menge $R \subseteq G \times G$ so, dass $(I_R, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ und $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ isomorph sind.*

Beweis: Es sei C eine durch die Menge M erzeugte freie ml-Kategorie über G. Zu jedem $\mathbf{s} \in M$ ordnet man das Element $k(\mathbf{s}) = (\alpha(\mathbf{s}), \beta(\mathbf{s})) \in G \times G$ zu. Wir setzen $R = \{k(\mathbf{s}); \mathbf{s} \in M\}$. Wir wählen $\mathscr{K} = M$ und definieren die Abbildung $f: M \to I_R$ folgenderweise: $f(\mathbf{s}) = (e, k(\mathbf{s}), \mathbf{s})$. Dann ist f offensichtlich eine eineindeutige Abbildung von M auf die Menge $M_1 = \{(e, k(\mathbf{s}), \mathbf{s}); \mathbf{s} \in M\}$ d. h. auf ein Erzeugendensystem von I_R. (Die Eineindeutigkeit folgt daraus, dass für beliebige $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in M$ mit $\mathbf{s}_1 \neq \mathbf{s}_2$ immer $(e, k(\mathbf{s}_1), \mathbf{s}_1) \neq (e, k(\mathbf{s}_2), \mathbf{s}_2)$ ist.) Also sind $(I_R, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ und $(C, \alpha, \beta, \circ, \bullet)$ isomorph [4].

LITERATUR

[1] Maria Hasse, Lothar Michler: *Theorie der Kategorien*, Berlin 1966.

[2] Miroslav Novotný: *Les systèmes à deux compositions avec une loi distributive*, Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, Řada A 4, č. 321, roč. 1950/5, pp. 49—68.

[3] Günther Hotz: *Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit formaler Sprachen*, EIK 2 (1966), Heft 4, pp. 235—246

[4] A. I. Mal'cev: *Algebraičeskije sistěmy*, Moskva 1970.

L. Burešová
621 00 Brno, Novoměstská 59
Tschechoslowakei