Robert Karpe

Über gewisse Zerlegung einer Funktion $f(x)$ in n trigonometrische Reihen; $n \geq 3$

Archivum Mathematicum, Vol. 12 (1976), No. 1, 9--14

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106921`

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XII: 9—14, 1976

ÜBER GEWISSE ZERLEGUNG EINER FUNKTION f(x) IN n TRIGONOMETRISCHE REIHEN; $n \geqq 3$

ROBERT KARPE, Brno
(Eingegangen am 6. Dezember 1973)

In diesem Artikel wird eine Funktion f(x) anstatt in zwei (d. i. in Cosinus- und Sinus-) Reihen, in n trigonometrische Reihen zerlegt; $n \geqq 3$. Hiemit ist zugleich die Spektralzerlegung eines durch die Funktion f(x) gegebenen Prozesses willkürlich erweitert worden.

Der Leimotiv dieses Artikels ist die im letzten Absatz angeführte asymptotische Kongruenz der Zerlegungen von zwei Gattungen, die durch gründliche nummerische Untersuchung festgestellt ist.

1. Definition. *Es sei $n \geqq 3$ eine beliebig aber fest gewählte natürliche Zahl. Als die Basis einer „Fourierschen Entwicklung n-ter Ordnung" benützen wir die Funktionen*

$$(1) \quad g_{nj}(kx) = \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{r} \cdot x - b - \frac{\pi}{n} i\right), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

wo r, b, fest gewählte Konstanten sind; $r \neq 0$.

Es sei f(x) eine Funktion im Argument x, die in einem Intervall $[-r, r]$ definiert ist und derer hinreichende Eigenschaften im Weiteren abgeleitet werden.

Die Fouriersche Entwicklung n-ter Ordnung der Funktion f(x) im Intervall $[-r, r]$ wird folgendendermassen definiert:

$$(2) \qquad f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f_{nj}(x),$$

$$(3) \qquad f_{nj}(x) = C_{nj} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nj}^{k} \cdot g_{nj}(kx); \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

wo C_{nj} das Absolutglied und A_{nj}^{k} der Koeffizient bei der Funktion $g_{nj}(kx)$ ist.

2. Verabredung. Die Fouriersche Entwicklung n-ter Ordnung benenen wir auch *„die Zerlegung der Funktion* f(x) *modulo n"*. Die Funktion $f_{nj}(x)$ benennen wir *„die j-te Komponente der Funktion* f(x) *modulo n"*.

In Weiterem benützt man:

3. Hilfsatz. *Es sei* A + Bi = cos 2$n\alpha$ + i . sin 2$n\alpha$ eine komplexe Zahl, wo $n \geqq 2$ *eine natürliche Zahl und* α *ein beliebig gewählter Winkel ist. Dann gilt die Gleichung*:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(2\alpha + \frac{2\pi}{n} j\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \sin\left(2\alpha + \frac{2\pi}{n} j\right) = 0. \tag{4}$$

Beweis. Es gilt für die Wurzeln ε_{nj}, $j = 0, 1, \dots, n - 1$, der binomischen Gl. $X^n = A + Bi$: $\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_{nj} = 0$, siehe die symmetrischen Funktionen der Wurzeln, so dass sowohl die reellen als auch die imaginären Komponenten dieser Wurzeln ebenso die Summe Null ergeben.

4. Hilfsatz. *Für den Index* $n \geqq 2$ *und für den beliebigen Winkel* α *gilt die Gleichung*:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) = \frac{n}{2}, \tag{5}$$

Beweis. Es gilt nach der bekannten Formel: $\sum_{j=0}^{n-1} \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} \times$ $\times \left[1 + \cos\left(2\alpha + \frac{2\pi}{n} j\right)\right] = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(2\alpha + \frac{2\pi}{n} j\right) = \frac{n}{2}$, siehe (4). Analog beweist man den übrigbleibenden Teil.

5. Hilfsatz. *Für den Index* $n \geqq 2$ *und für beliebige Winkel* α, β, *gilt die Gleichung*:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) . \cos\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{n} j\right) = \frac{n}{n} . \cos\beta. \tag{6}$$

Beweis. $\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) . \cos\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{n} j\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) \times$ $\times \left[\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) . \cos\beta - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) . \sin\beta\right] = \cos\beta . \sum_{j=0}^{n-1} \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) -$ $- \frac{1}{2} . \sin\beta . \sum_{j=0}^{n-1} \sin\left(2\alpha + \frac{2\pi}{n} j\right) = \frac{n}{2} . \cos\beta,$ siehe (4) und (5).

6. Satz. *Wenn die Zerlegung modulo n einer Funktion* f(x) *in einem Intervall* [$-r$, r] *möglich ist, dann sind die Koeffizienten bei* (3) *durch folgende Formeln gegeben*:

$$C_{nj} = \frac{1}{rn} . \cos^2\left(b - \frac{\pi}{n} j\right) . \int_{-r}^{r} \mathrm{f}(t) . \mathrm{d}t, \qquad j = 0, 1, \dots, n - 1, \tag{7}$$

$$A_{nj}^{k} = \frac{2}{rn} . \int_{-r}^{r} \mathrm{f}(t) . \mathrm{g}_{nj}(kt) . \mathrm{d}t, \qquad k = 1, 2, 3, \dots \tag{8}$$

Beweis. Setzen wir voraus, dass man die Funktion f(x) im Intervall $[-r, r]$ in die (bekannten) Fourierschen Reihen entwickeln kann:

$$\text{(9)} \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \,.\, \cos\left(k \frac{\pi}{r} x\right) + b_k \,.\, \sin\left(k \frac{\pi}{r} x\right)\right],$$

wo gilt:

$$\text{(10,1)} \qquad a_k = \frac{1}{r} \,.\, \int_{-r}^{r} \mathrm{f}(t) \,.\, \cos\left(k \frac{\pi}{r} t\right) .\, \mathrm{d}t, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\text{(10,2)} \qquad b_k = \frac{1}{r} \,.\, \int_{-r}^{r} \mathrm{f}(t) \,.\, \sin\left(k \frac{\pi}{r} t\right) .\, \mathrm{d}t, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Diese Entwicklung kann man in folgender Form schreiben:

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{1}{r} \,.\, \int_{-r}^{r} f(t) \,.\, \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(k \frac{\pi}{r} (t - x)\right)\right] .\, \mathrm{d}t,$$

so dass nach (5) und (6) gilt:

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{2}{rn} \,.\, \int_{-r}^{r} \mathrm{f}(t) \,.\, \left\{\frac{1}{2} \,.\, \sum_{j=0}^{n-1} \cos^2\left(b - \frac{\pi}{n} j\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(k \frac{\pi}{r} t - b - \frac{\pi}{n} j\right) .\, \cos\left(k \frac{\pi}{r} x - b - \frac{\pi}{n} j\right)\right]\right\} .\, \mathrm{d}t,$$

wo b eine willkürlich gewählte Konstante ist.

Wenn wir nun in dieser Gl. Die Reihenfolge der Summationen nach j, k, umwechseln (unter dem Voraussatz, daß es möglich ist), dann gilt:

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{f}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{1}{rn} \,.\, \cos^2\left(b - \frac{\pi}{n} j\right) .\, \int_{-r}^{r} \mathrm{f}(t) \,.\, \mathrm{d}t + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{rn} \,.\, \int_{-r}^{r} \mathrm{f}(t) \,.\, \cos\left(k \frac{\pi}{r} t - b - \frac{\pi}{n} j\right) \mathrm{d}t \,.\, \cos\left(k \frac{\pi}{r} x - b - \frac{\pi}{n} j\right)\right],$$

w. z. b. w.

Es bleiben nun die Bedingungen für die Voraussätze im obigen Beweis zu untersuchen: ersichtlich muß die Funktion f(x) im Intervall $[-r, r]$ integrationsfähig sein und die entsprechenden Reihen (3) (für $j = 0, 1, \ldots, n - 1$) müssen in einem geeigneten Intervall konvergieren. Die Bedingungen dieser Konvergenz werden wir nun suchen.

7. Hilfsatz. *Es konvergieren die Reihen* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, *und* p, q, *seien Konstanten. Dann konvergiert auch die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} (p \,.\, a_k + q \,.\, b_k)$.

Beweis. Es sei A_n, B_n, C_n, die n-te Teilsumme der ersten, zweiten, dritten oben angeführten Reihe. Dann gilt: $C_n = (p \,.\, a_1 + q \,.\, b_1) + (p \,.\, a_2 + q \,.\, b_2) + \ldots + (p \,.\, a_n + q \,.\, b_n) = p \,.\, A_n + q \,.\, B_n$. Deshalb gilt auch $\lim_{n\to\infty} C_n = p \,.\, \lim_{n\to\infty} A_n + q \,.\, \lim_{n\to\infty} B_n$.

8. Bemerkung. Nach dem Hilfsatz 7 wird es folgenderweise bewiesen werden, daß die Reihe Σc_k konvergiert: 1) Man zeigt, daß $c_k = p \,.\, a_k + q \,.\, b_k$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$ 2) Man zeigt, daß die Reihen Σa_k, Σb_k, konvergieren.

9. Satz. *Es sei die Funktion* $\mathrm{f}(x)$ *und ihre Ableitung* $\mathrm{f}'(x)$ *integrationsfähig in dem abgeschlossenen Intervall* $[-r, r]$. *Dann konvergiert die Reihe* (3), *die die Funktion* $\mathrm{f}_{nj}(x)$ *bildet*, $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$, *und zwar* a) *in dem offenen Intervall* $(-r, r)$, *wenn* $\mathrm{f}(r) \neq \mathrm{f}(-r)$ *gilt*; b) *in dem abgeschlossenen Intervall* $[-r, r]$, *wenn* $\mathrm{f}(r) = \mathrm{f}(-r)$ *gilt.*

Beweis. Nach (3) und (1) gilt: $\mathrm{f}_{nj}(x) = C_{nj} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{rn} \,.\, \int_{-r}^{r} \mathrm{f}(t) \,.\, \cos\left(k\frac{\pi}{r}t - b - \frac{\pi}{n}j\right) .\, \mathrm{d}t \,.\, \cos\left(k\frac{\pi}{r}x - b - \frac{\pi}{n}j\right)$.

Das k-te Glied dieser Reihe wird nach den elementaren Formeln folgenderweise zerlegt:

$$\text{A]} \quad \frac{2}{n} \,.\, \cos^2\left(b + \frac{\pi}{n}j\right) .\left\{\frac{1}{r} \,.\, \int_{-r}^{r} \mathrm{f}(t) \,.\, \cos\left(k\frac{\pi}{r}t\right) .\, \mathrm{d}t \,.\, \cos\left(k\frac{\pi}{r}x\right)\right\} +$$

$$\text{B]} \quad + \frac{2}{n} \,.\, \sin^2\left(b + \frac{\pi}{n}j\right) .\left\{\frac{1}{r} \,.\, \int_{-r}^{r} \mathrm{f}(t) \,.\, \sin\left(k\frac{\pi}{r}t\right) .\, \mathrm{d}t \,.\, \sin\left(k\frac{\pi}{r}x\right)\right\} +$$

$$\text{C]} \quad + \frac{1}{rn} \,.\, \sin\left(2b + \frac{2\pi}{n}j\right) .\left\{\int_{-r}^{r} \mathrm{f}(t) \,.\, \sin\left(k\frac{\pi}{r}(t + x)\right) .\, \mathrm{d}t\right\}.$$

Durch die Summierung der Glieder ad A], wo wir auch das Absolutglied C_{nj} eingegliedert haben, bekommen wir:

$$\frac{2}{n} \,.\, \cos^2\left(b + \frac{\pi}{n}j\right) \times$$
$$\times \left\{\frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \mathrm{f}(t) \,.\, \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r} \,.\, \int_{-r}^{r} \mathrm{f}(t) \,.\, \cos\left(k\frac{\pi}{r}t\right) .\, \mathrm{d}t \,.\, \cos\left(k\frac{\pi}{r}x\right)\right\},$$

wo in den geschweiften Klammern die Kosinus-Komponente der (gewöhnlichen) Fourierschen Reihe für die Funktion $f(x)$ ist. Diese Reihe konvergiert also nach dem Voraussatz des Satzes.

Das ähnliche bekommen wir durch die Summierung der Glieder ad B]:

$$\frac{2}{n} \cdot \sin^2\left(n + \frac{\pi}{n} j\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \int_{-r}^{r} f(t) \cdot \sin\left(k \frac{\pi}{r} t\right) \cdot dt \cdot \sin\left(k \frac{\pi}{r} x\right).$$

Es bleibt nun zu beweisen, daß auch die Reihe der Glieder ad C] konvergiert:

$$\frac{1}{rn} \cdot \sin\left(2b + \frac{2\pi}{n} j\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-r}^{r} f(t) \cdot \sin\left(k \frac{\pi}{r}(t + x)\right) \cdot dt. \tag{14}$$

Nach der Methode *„per partes"* zerlegen wir das k-te Glied dieser Reihe:

$$\int_{-r}^{r} f(t) \cdot \sin\left(k \frac{\pi}{r}(t + x)\right) \cdot dt =$$

D] $$= \left[-\frac{r}{k\pi} \cdot f(t) \cdot \cos\left(k \frac{\pi}{r}(t + x)\right) \right]_{-r}^{r} +$$

E] $$+ \frac{r^2}{k\pi} \cdot \left\{ \frac{1}{r} \cdot \int_{-r}^{r} f'(t) \cdot \cos\left(k \frac{\pi}{r} t\right) \cdot dt \cdot \cos\left(k \frac{\pi}{r} x\right) \right\} -$$

F] $$- \frac{r^2}{k\pi} \cdot \left\{ \frac{1}{r} \cdot \int_{-r}^{r} f'(t) \cdot \sin\left(k \frac{\pi}{r} t\right) \cdot dt \cdot \sin\left(k \frac{\pi}{r} x\right) \right\}.$$

Durch die Summierung der Glieder ad D] bekommen wir:

$$\frac{r}{\pi} \cdot [f(-r) - f(r)] \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \cos\left(k \frac{\pi}{r}(x + r)\right).$$

Diese Reihe konvergiert im Intervall $x \in (-r, r)$ nach dem Dirichletschen Kriterium, mit Hinsicht auf die Ungleichung (2,23) aus dem Buch [1], Seite 33.

Für $x = r, x = -r$ diese Reihe ersichtlich divergiert und im Falle $f(-r) - f(r) = 0$ existiert nicht.

Durch die Summierung der Glieder ad E], bzw. ad F], bekommen wir:

$$\frac{r^2}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \left\{ \frac{1}{r} \cdot \int_{-r}^{r} f'(t) \cdot \cos\left(k \frac{\pi}{r} t\right) \cdot dt \cdot \cos\left(k \frac{\pi}{r} x\right) \right\},$$

$$- \frac{r^2}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \left\{ \frac{1}{r} \cdot \int_{-r}^{r} f'(t) \cdot \sin\left(k \frac{\pi}{r} t\right) \cdot dt \cdot \sin\left(k \frac{\pi}{r} x\right) \right\}.$$

Beide diesen Reien konvergieren im Intervall $[-r, r]$, nach dem Dirichletschen Kriterium, mit Hinsicht auf den Voraussatz des Satzes.

10. Bemerkung. Wenn wir die Reihen (14) nach dem Index j summieren, ($j = 0, 1, \ldots, n-1$), so bekommen wir nach (4) die Summe Null.

11. Mitteilung. Ich führe an, daß es noch eine ganz ähnliche *und dabei eindeutige* Zerlegung einer Funktion $f(x)$ existiert, u. z. auf der Basis der Funktionen $G_{nj}(kx)$, die nach folgender Formel gebildet werden:

$$G_{nj}(x) = e^{-x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cdot \left(\frac{x^j}{j!} - \frac{x^{n+j}}{(n+j)!} + \frac{x^{2n+j}}{(2n+j)!} - + \ldots\right), \tag{15}$$

$$j = 0, 1, \ldots, n-1; \; n \geqq 2.$$

Diese Funktionen behandelte ich im Artikel [2].

Auf Grund der numerischen Untersuchungen, die *Ing Ivan Dírer* auf der Rechenmaschine vollzog, (*LPS* bei *FS-VUT* in *Brno*), kann man hier folgende Verhältnissen voraussetzen:

Es sei der Index $n > 2$. Zu einem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ kann man solche Konstante $H_n > 0$ finden, daß für $|x| > H_n$ gilt:*)

$$\left| G_{nj}(x) - \frac{2}{n} \cdot g_{nj}(x) \right| < \varepsilon; \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Die entsprechenden Konstanten r, b, siehe (1), kann man hier nummerischerweise feststellen.

Aus dieser Hinsicht erscheint die Zerlegung der Funktion $f(x)$ in die n Funktionen $f_{nj}(x)$ als die „*Restzerlegung modulo n*", d. i. die Funktion $f_{nj}(x)$ erscheint als „*die j-te Rest-komponente der Funktion* $f(x)$ *modulo n*" – siehe die Struktur der Potenzreihe in (15).

---

* Die gegenseitige Näherung der Funktionen verläuft sehr progressiv.

LITERATUR

[1] A. Kufner, J. Kadlec: "*Fourier Series*", Praha, 1971.

[2] R. Karpe: „*Verallgemeinerung der goniometrischen Funktionen,*" Brno, Archivum mathematicum, 1973.

R. Karpe
602 00 Brno, Gorkého 13
Tschechoslowakei