Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Ju. M. Movsisjan

Сверхтождвства ассоциативности ранга 1 и его следстия

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 29 (1988), No. 2, 365--378

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106646

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
29,2 (1988)

СВЕРХТОЖДЕСТВА АССОЦИАТИВНОСТИ РАНГА I И ЕГО СЛЕДСТВИЯ

Мовсисян Ю.М.

Abstract: Balanced hyperidentities deductible from the hyperidentity of associativity of rank 1 are investigated and their characterization by means of the Sade equivalence is obtained.

Key words: Hyperidentity, associativity, balanced hyperidentity, Sade equivalence.

Classification: 08B05

Сверхтождество (ранга m) - формула из языка 2-й ступени [1] вида

$$\forall X_1,\dots,X_m \forall x_1,\dots,x_k \,(w_1 = w_2),$$

где $X_1,\dots,X_m$ - все функциональные переменные, а $x_1,\dots$ $\dots,x_k$ - все предметные переменные в словах (термах) w_1, w_2. Сверхтождества ранга I называются еще тривиальными сверхтождествами.

Обычно сверхтождества записываются без кванторной приставки, понимая их выполнимость как выполнимость соответствующей формулы 2-й ступени, а именно: будем говорить, что в алгебре $\langle Q;\Sigma\rangle$ выполняется сверхтождество

$$w_1 = w_2 \,, \qquad (*)$$

если равенство (*) справедливо, когда в нем каждая предметная переменная и каждая функциональная переменная заменяются соответственно любым элементом из Q и любой операцией соответствующей арности из Σ (предполагается возможность такой замены).

Для сверхтождеств справедлива "теорема о полноте" [2], т.е. формальная выводимость сверхтождеств и выводимость сверхтождеств в смысле выполнимости эквивалентны.

В настоящей работе описываются уравновешенные сверхтождества (определение см. ниже), являющиеся следствиями сверхтождества ассоциативности ранга I:

$$X[x, X(y,z)] = X[X(x,y), z].$$

Например, сверхтождество

$$X[Z[Z(x,y),z], X(u,v)] = X[X[Z[x, Z(y,z)], u], v] \tag{I}$$

является следствием сверхтождества ассоциативности ранга I.

Рассмотрим сверхтождества с бинарными функциональными переменными.

Множество всех предметных (функциональных) переменных слова W обозначим через $[W]$ (соответственно, через $]W[$), при этом порядок множества $[W]$ называется длиной слова W и обозначается $\partial(W)$.

Сверхтождество

$$W_1 = W_2$$

называется с о к р а т и м ы м , если

а) W_1 и W_2 содержат подслова длины 2 , состоящие из одинаковых предметных переменных, или

б) $W_1 = X^*(\omega_1, x)$ и $W_2 = Y^*(\omega_2, x)$,

где

$$Z^*(y,z) = \begin{cases} Z(y,z), \\ Z(z,y); \end{cases}$$

В противном случае сверхтождество называется н е с о к р а т и м ы м.

Несократимое сверхтождество $w_1 = w_2$ называется уравновешенным, если $[w_1] = [w_2]$ и каждая предметная переменная по одному разу появляется в обоих словах, причем на одном и том же месте. $\partial(w_1) = \partial(w_2)$ называется длиной уравновешенного сверхтождества $w_1 = w_2$.

Идея уравновешенности восходит к А.И.Мальцеву [3] . Изучению уравновешенных (и близких к ним) тождеств посвящены работы [4] , [5] , [6], [7], [8] и др.

Для формулировки основного результата введем одно отношение эквивалентности ($\sim$), определенное на множестве всех функциональных переменных $\Phi =]w_1[\cup]w_2[$ произвольного уравновешенного сверхтождества

$$w_1 = w_2 . \qquad (2)$$

Сначала условимся в одной записи. Пусть x и y - различные предметные переменные, входящие в сверхтождество (2). Очевидно, существуют подслова u_i (i = I,..., к) слова w_1 и v_j (j = I,..., ℓ) слова w_2 такие, что

$$x, y \in [u_i] , \quad x, y \in [v_j] \quad (i = I,\dots,k;\ j = I,\dots,\ell).$$

Среди подслов $\{u_1, \dots, u_k\}$ найдется подслово u минимальной длины. Так и среди подслов $\{v_1, \dots, v_\ell\}$ найдется подслово v , имеющее минимальную длину. Если теперь

$$u = X(\omega_1, \omega_2), \quad v = Y(\omega_1', \omega_2'),$$

то будем писать

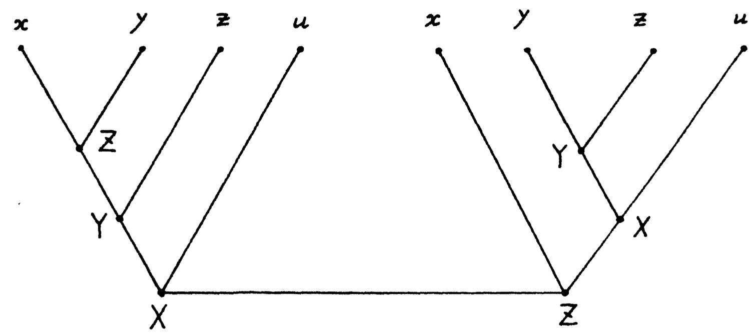
$$X \overset{x,y}{\Longleftrightarrow} Y .$$

Смысл этого определения легко интерпретировать на дереве*), соответствующем сверхтождеству (2). Так, для сверхтождества

*) Точнее графе, состоящем из двух деревьев, соединенные линией (стволом). Точки, соответствующие предметным (функциональным) переменным, называются вершинами (соответственно, узлами).

$$X[Y[Z(x,y),z],u] = Z[x,X[Y(y,z),u]] \qquad (3)$$

имеем



$$Z \overset{x,y}{\Longleftrightarrow} Z,\quad Y \overset{x,z}{\Longleftrightarrow} Z,\quad X \overset{x,u}{\Longleftrightarrow} Z,$$
$$Y \overset{y,z}{\Longleftrightarrow} Y,\quad X \overset{y,u}{\Longleftrightarrow} X,\quad X \overset{z,u}{\Longleftrightarrow} X.$$

Если берем пару x и z, то в левой части дерева, опускаясь от вершины x и z, попадаем в узел, в котором находится функциональная переменная Y, а в правой части дерева, опускаясь по ветвям от x и z, попадем в узел Z. Таким образом:

$$Y \overset{x,z}{\Longleftrightarrow} Z.$$

Точно так же получаются и остальные соотношения между функциональными переменными из множества Φ.

Тем самым на множестве Φ определено отношение $\Theta : X \Theta Y$ тогда и только тогда, когда существует пара u,v предметных переменных такая, что $X \overset{u,v}{\Longleftrightarrow} Y$.

Как видно из рассмотренного примера, в общем случае это отношение не является эквивалентностью. Продолжим Θ до отношения эквивалентности ($\sim$).

$X \sim Y$ тогда и только тогда, когда $X \overset{u_1,v_1}{\Longleftrightarrow} \cdots \overset{u_n,v_n}{\Longleftrightarrow} Y$,

и

$$X \sim X$$

для любых $X, Y \in \Phi$.

Отношение эквивалентности ($\sim$) назовем отношением эквивалентности Сада, соответствующее сверхтождеству (2).

Интересующее нас свойство сверхтождества (2) оказывается зависит от следующих обстоятельств.

а). Соответствующее отношение эквивалентности Сада - тривиально, т.е. оно разбивает Φ на одноэлементные классы эквивалентности.

б). Соответствующее отношение эквивалентности Сада - нетривиально.

Рассмотрим примеры. Для сверхтождества (I) имеем:

$$\Phi/_{(\sim)} = \{\{X\}, \{Y\}\},$$

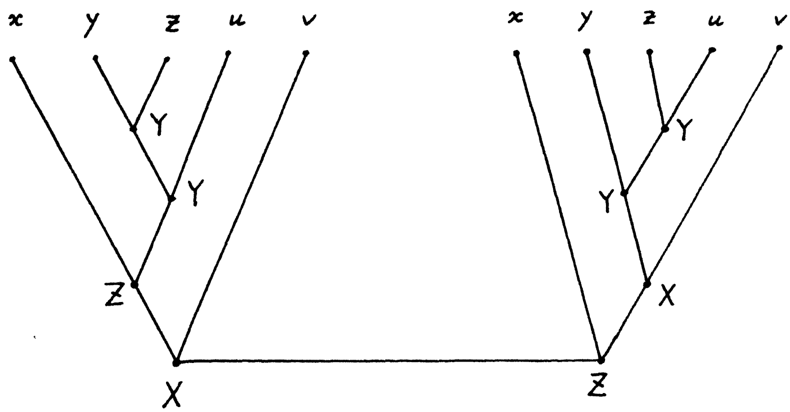
а в случае сверхтождества (3):

$$\Phi/_{(\sim)} = \{\{X, Y, Z\}\}.$$

Однако, в случае б) порядок фактор-множества $\Phi/_{(\sim)}$ может быть и больше I . Например:

$$X[Z[x, Y[Y(y,z), u]], v] = Z[x, X[Y[y, Y(z,u)], v]]. \qquad (4)$$

Как видно из дерева, соответствующего сверхтождеству (4)



$X \overset{x,v}{\Longleftrightarrow} Z$ и не существует пара предметных переменных t, s таких, что

$$Z \overset{t,s}{\Longleftrightarrow} Y \text{ или } Y \overset{t,s}{\Longleftrightarrow} Z,$$

$$X \overset{t,s}{\Longleftrightarrow} Y \text{ или } Y \overset{t,s}{\Longleftrightarrow} X.$$

Таким образом

$$\Phi/_{(\sim)} = \{\{X, Z\}, \{Y\}\}.$$

ТЕОРЕМА. Уравновешенное сверхтождество (2) является следствием тривиального сверхтождества ассоциативности тогда и только тогда, когда соответствующее сверхтождеству (2) отношение эквивалентности Сада - тривиально.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Предполагая тривиальность отношения эквивалентности Сада, соответствующее уравновешенному сверхтождеству (2), докажем выводимость сверхтождества (2) из тривиального сверхтождества ассоциативности

$$X[x, X(y,z)] = X[X(x,y), z].$$

Для этого покажем выполнимость уравновешенного сверхтождества (2) с тривиальным отношением эквивалентности Сада в любой алгебре $\langle Q; \Sigma \rangle$ с ассоциативными операциями (т.е. с полугрупповыми операциями) и воспользуемся "теоремой о полноте" для сверхтождеств.

Напомним, что ранг ρ сверхтождества (2) – порядок множества функциональных переменных $\Phi =]w_1[\cup]w_2[$.

I. Пусть ранг ρ рассматриваемого сверхтождества равен I. Тогда утверждение очевидно.

2. Предположим теперь, что ранг ρ рассматриваемого сверхтождества (2) больше I , т.е. $\rho > 1$. Доказательство будем вести методом индукции по длине d сверхтождества (2) . Путем непосредственной проверки можно убедиться, что длина d уравновешенного сверхтождества (2) с тривиальным отношением эквивалентности Сада, при $\rho > 1$, удовлетворяет неравенству $d \geqslant 5$.

Для $d = 5$ доказываемое утверждение верно, так как существует всего 6 таких неэквивалентных сверхтождеств:

$$X[X[Y[Y(x,y),z],u],v] = X[Y[x,Y(y,z)],X(u,v)],$$

$$X[X[Y[x,Y(y,z)],u],v] = X[Y[Y(x,y),z],X(u,v)],$$

$$X[X[x,Y[Y(y,z),u]],v] = X[x,X[Y[y,Y(z,u)],v]],$$

$$X[X[x,Y[y,Y(z,u)]],v] = X[x,X[Y[Y(y,z),u],v]],$$

$$X[X(x,y),Y[Y(z,u),v]]=X[x,X[y,Y[z,Y(u,v)]]],$$
$$X[X(x,y),Y[z,Y(u,v)]]=X[x,X[y,Y[Y(z,u),v]]],$$

и все они выполняются в любой алгебре $\langle Q;\Sigma\rangle$ с ассоциативными операциями. Например, для первого из них имеем:

$$[[[(x \textcircled{i} y)\textcircled{i} z]\textcircled{j} u]\textcircled{j} v]=[[x\textcircled{i}(y\textcircled{i} z)]\textcircled{j}(u\textcircled{j} v)],$$

где $\textcircled{i}$, $\textcircled{j}$ – ассоциативные операции, определенные на одном и том же множестве Q.

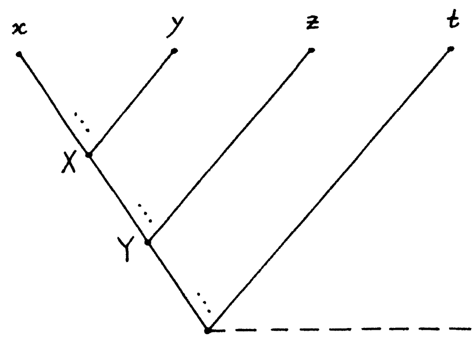
Поэтому предположим, что утверждение верно для любой длины $d<n$.

Если $u=X(u_1,u_2)$ – подслово слова W, то X называется первой функциональной переменной для u. В частности, можно говорить о первой функциональной переменной слова W.

Пусть Φ – множество всех функциональных переменных уравновешенного сверхтождества (2) и ($\sim$) – соответствующее отношение эквивалентности Сада. Обозначим через $K\subseteq\Phi$ тот класс эквивалентных функциональных переменных, который содержит первую функциональную переменную из W_1, а следовательно, и первую функциональную переменную в слове W_2. По условию, подмножество $K\subseteq\Phi$ одноэлементно. Пусть $K=\{X\}$.

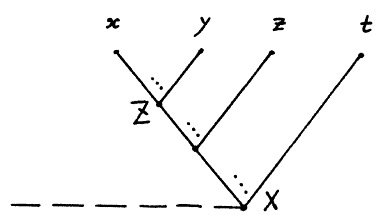
Без ущерба общности можно предполагать, что если u_1 и v_1 – подслова соответственно из W_1 и W_2, и $[u_1]=[v_1]$, то функциональные переменные из u_1 и v_1 не эквивалентны функциональным переменным из Φ, встречающимся вне этих подслов. Тогда, если в некотором узле деревьев W_1, W_2 имеется функциональное переменное X, то в любом узле, находящемся ниже этого узла, также будем иметь функциональное переменное

X . Действительно, пусть для w_1 имеем:

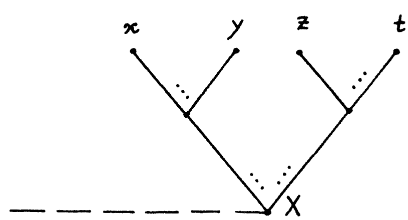


В дереве слова w_2 элементы x, y, z, t могут занимать следующие положения:

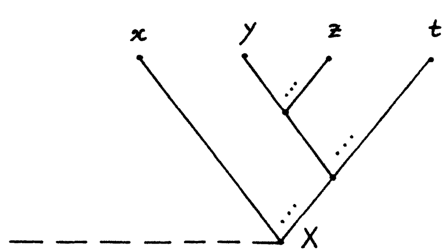
I)



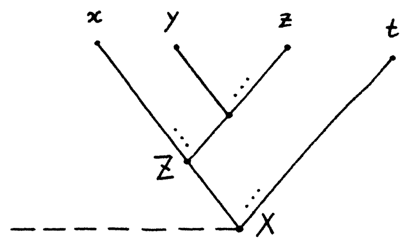
2)



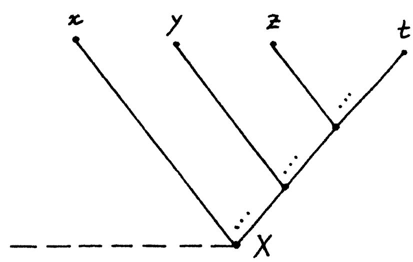
3)



4)



5)



Случай I). В слове w_1 имеется подслово u, определяемое узлом X, в которое входят все предметные переменные из $[w_1]$ от x до y. Пусть в дереве слова w_2, опускаясь по ветвям от x и y, попадаем в узел Z, т.е.

$$X \overset{x,y}{\Longleftrightarrow} Z .$$

Узел Z определяет подслово u' такое, что $[u] = [u']$. Следовательно, функциональные переменные из u не могут быть эквивалентны функциональным переменным из Φ, находящимся вне подслов u, u'. Противоречие показывает, что случай I) не может иметь место.

Аналогично рассматривается случай 2).

Случай 3). Имеем $Y \overset{x,z}{\Longleftrightarrow} X$, т.е. $Y \sim X$, следовательно, $Y = X$.

Случай 4). Имеем $X \overset{x,y}{\Longleftrightarrow} Z$, т.е. $X \sim Z$, следовательно, $X = Z$; далее $Y \overset{x,z}{\Longleftrightarrow} Z$, т.е. $Y \sim Z = X$, следовательно и $Y = X$.

Случай 5) . Имеем $Y \overset{x,z}{\Longleftrightarrow} X$, следовательно $Y \sim X$ и $Y = X$.

Таким образом, слово W_1 можно представить в виде:

$$W_1 = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdots \omega_r , \qquad (5)$$

где $(\cdot) = X$, а $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$ – множество подслов из W_1 , уже не содержащих функциональной переменной X , кроме того, в правой части равенства (5) имеется некоторая расстановка скобок.

Аналогично:

$$W_2 = \omega_1' \cdot \omega_2' \cdots \omega_s' ,$$

где $(\cdot) = X$, а $\{\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_s'\}$ – множество подслов из W_2 , также не содержащих функциональной переменной X .

Подслова ω_i обладают следующим свойством:
если $x, y \in [\omega_i]$ и

$$Y \overset{x,y}{\Longleftrightarrow} Z ,$$

то $Y \neq X$, а если $x \in [\omega_i]$, $y \in [\omega_j]$, $i \neq j$,тогда

$$X \overset{x,y}{\Longleftrightarrow} Z$$

для некоторой функциональной переменной Z . Это свойство вытекает из способа построения подслов ω_i . Аналогичным свойством обладают подслова ω_i' .

Докажем, что либо $[\omega_i] \cap [\omega_j'] = \emptyset$, либо $[\omega_i] = [\omega_j']$. Пусть $[\omega_i] \cap [\omega_j'] \neq \emptyset$, $x \in [\omega_i] \cap [\omega_j']$, и существует предметная переменная y в ω_i , не принадлежащем ω_j' (или, наоборот). Тогда:

$$Y \overset{x,y}{\Longleftrightarrow} X ,$$

где $Y \neq X$. Получаем противоречие: $Y \sim X$, но $Y \notin K =$ $= \{X\}$ - класс эквивалентности X .

Таким образом, между множествами $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$ и $\{\omega_1', \omega_2', \dots, \omega_s'\}$ можно установить биективное соответствие $\omega_i \longleftrightarrow \omega_i'$ такое, что $[\omega_i] = [\omega_i']$. Следовательно, сверхтождества

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_1', \\ \omega_2 &= \omega_2', \\ &\vdots \\ \omega_r &= \omega_r' \end{aligned} \qquad (6)$$

являются уравновешенными сверхтождествами.

Если $r = n$, то сверхтождество (2), очевидно, имеем ранг ρ = I . Поэтому $r < n$ и сверхтождества (6) имеют длину меньшую, чем n , и удовлетворяют условию тривиальности отношения эквивалентности Сада, так как исходное сверхтождество (2) удовлетворяет этому условию. Теперь, либо по пункту I , либо по предположению индукции все эти сверхтождества выполняются в любой алгебре $< Q; \Sigma >$ с ассоциативными операциями. Следовательно, и сверхтождество (2)

$$\omega_1 \cdot \omega_2 \cdots \omega_r = \omega_1' \cdot \omega_2' \cdots \omega_r'$$

выполняется в таких алгебрах.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Предположим, что некоторое уравновешенное сверхтождество

$$W_1 = W_2 \qquad (7)$$

с нетривиальным отношением эквивалентности Сада является следствием сверхтождества ассоциативности ранга I . Тогда такое сверхтождество должно выполняться в любой алгебре $< Q; \Sigma >$ с ассоциативными операциями. Пусть Σ состоит из неизоморфных групповых операций.

Обозначим через K тот класс эквивалентных функциональных переменных, который содержит хотя бы два различных функциональных переменных X, Y. Подставляя в сверхтождестве (7) вместо X, Y соответственно произвольные операции $A_i, A_j \in \Sigma$, а остальным функциональным переменным давая некоторые фиксированные значения из Σ, получаем уравновешенное тождество. При этом класс K принимает значение

$$K' = \{A_i, A_j, \dots\}.$$

По теореме Сада [4, 5] все операции из K изотопны одной и той же операции (i,j), т.е.

$$A_i = (i,j)^{T_i}, \quad A_j = (i,j)^{T_j}.$$

Отсюда, по транзитивности изотопии, выводим изотопию операций A_i, A_j :

$$A_i = A_j^{T_{i,j}}.$$

Однако, если две группы изотопны, то по теореме Алберта они будут и изоморфными. Противоречие!

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А.И. Некоторые вопросы теории классов моделей. - В кн: Труды IУ Всесоюзного математического съезда, т.I, Л.,1963, с.169-198.
2. Мовсисян Ю.М. Введение в теорию алгебр со сверхтождествами. - Ереван: Изд-во ЕГУ, 1986, -240 с.

3. Мальцев А.И. Свободные топологические алгебры. - Изв. АН СССР, сер. Матем., 1957, т.21, № 2, с.171-198.

4. Sade A. Entropie demosienne de multigroupoides et de quasigroupes. - Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1959, 73,3, p. 302-309.

5. Белоусов В.Д. Уравновешенные тождества в квазигруппах. - Мат. сборник, 1966, т.70, № 1, с. 55-97

6. Алимпич Б.П. Уравнотежени закони на квазигруппама. - Математички весник, 1972, т.9, с.249-255.

7. Ježek J., Kepka T. Varieties of quasigroups determined by short strictly balanced identities. Czech. Math. J., 1979, vol. 29, p. 84-96.

8. Taylor M.A. A generalization of a theorem of Belousov. - Bull. London Math. Soc., 1978, vol. 10, p. 285-286.

Department of Algebra and Geometry, Yerevan State University, ul. Mravyana 1, 375049 Yerevan, USSR

(Oblatum 8.10. 1987)