Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Jürgen Appell

Über eine Klasse symmetrischer idealer Funktionenräume nebst Anwendungen

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 25 (1984), No. 2, 337--354

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106306`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
25,2 (1984)

ÜBER EINE KLASSE SYMMETRISCHER IDEALER FUNKTIONENRÄUME NEBST ANWENDUNGEN

Jürgen APPELL

Abstract: *In this paper we introduce and study a class of function spaces which generalize the classical Orlicz spaces in the same way as L(p,q) spaces generalize the classical Lebesgue spaces. It turns out that the "extreme spaces" (in the sense of inclusion) coincide with certain Lorentz and Marcinkiewicz spaces. As application, we prove an interpolation theorem and consider Hardy-Littlewood operators.*

Key words: *Ideal function spaces, Orlicz spaces, Lorentz spaces, Marcinkiewicz spaces, Lorentz-Shimogaki interpolation theorem, Hardy-Littlewood operator*

Classification: *46 E 30 , 46 B 30 , 47 B 38*

Ziel dieser Arbeit ist die Einführung und Untersuchung einer Klasse von Funktionenräumen $L_{M,N}$, die die klassischen Orliczräume L_M in gleicher Weise verallgemeinern wie die Räume $L_{p,q}$ (siehe z. B. [6,7]) die klassischen Lebesgueräume L_p. Es stellt sich hierbei heraus, daß die "Extremfälle" $L_{M,1}$ und $L_{M,\infty}$ mit den Lorentzräumen Λ_ϕ und Marcinkiewiczräumen M_ϕ [4,5,15] übereinstimmen, falls die Funktion ϕ passend gewählt wird. Als Anwendungen werden ein Interpolationssatz in $L_{M,1}$ und Hardy-Littlewood-Operatoren in $L_{M,N}$ betrachtet.

1. Ideale Räume. Ein Banachraum X meßbarer Funktionen über einer Menge Ω heißt *idealer Raum*, falls mit x_1 jede meßbare Funktion x_2 mit $x_2 \leq x_1$ (d. h. $|x_2(t)| \leq |x_1(t)|$ fast überall in Ω) zu X gehört und $\|x_2\| \leq \|x_1\|$ ist. Folgt aus $x_1 \in X$ ferner $x_2 \in X$ und $\|x_2\| = \|x_1\|$ für jede zu x_1 gleichverteilte Funktion x_2 (d. h. die Mengen $\{t: t \in \Omega, |x_i(t)| > h\}$ $(i=1,2)$ haben für jedes $h>0$ das gleiche Maß), so heißt der Raum X *symmetrisch*.

Ist X ein idealer Raum, so bezeichne X^o den (separablen abgeschlossenen) Unterraum aller Elemente $x \in X$ mit absolutstetiger Norm, d. h.

$$\|\chi_D x\| \to 0 \qquad (\mu D \to 0),$$

wo χ_D wie üblich die charakteristische Funktion der Menge $D \subseteq \Omega$ bezeichnet. Stimmt X^o mit X überein, so nennt man X *regulär*; ist X^o lediglich dicht in X bezüglich der Konvergenz im Maß, so nennt man X *quasiregulär*. Jeder symmetrische Raum $X \neq L_\infty$ ist quasiregulär. Bezeichnet A_n den "Abschneideoperator"

$$A_n x(t) = \begin{cases} x(t) & |x(t)| \leq n \\ 0 & |x(t)| > n \end{cases}$$

in einem symmetrischen Raum X, so gilt für jedes $x \in X$

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{dist}(x, X^o) = \lim_{n\to\infty} \|x - A_n x\|;$$

insbesondere folgt hieraus, daß die beschränkten Funktionen dicht in X^o liegen. Eine ausführliche Darstellung der Theorie idealer Räume findet man beispielsweise in [16], viele wichtige Beispiele in [1].

In den Abschnitten 1 bis 5 betrachten wir stets (Lebesgue-) meßbare Funktionen über $\Omega = (0,1)$, im Abschnitt 6 über $\Omega = (0,\infty)$; die meisten unserer Resultate lassen sich jedoch ohne Schwierigkeit auf allgemeinere Mengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ übertragen.

Vor der Einführung der symmetrischen Räume $L_{M,N}$ benötigen wir einige Hilfsmittel aus der Theorie reeller Funktionen. Sei ϕ eine gegebene nichtnegative Funktion auf $(0,\infty)$; für $a>0$ setzen wir

(2) $$\rho(\phi;a) := \sup_{t>0} \frac{\phi(at)}{\phi(t)} .$$

Aus dieser Definition folgen leicht folgende Eigenschaften:

(i) $\rho(\phi;ab) \le \rho(\phi;a)\rho(\phi;b)$,

(ii) $\rho(\phi\psi;a) \le \rho(\phi;a)\rho(\psi;a)$,

(iii) $\rho(\phi\circ\psi;a) \le \rho(\phi;\rho(\psi;a))$;

aus (i) folgt insbesondere, daß die Funktion $\rho(\phi;\cdot)$ überall endlich ist, falls sie in einer Umgebung von $a=1$ endlich ist.

Für das Weitere interessieren uns Bedingungen an die Funktion $\rho(\phi;\cdot)$, die die Äquivalenz

(3) $$\int_0^u \frac{\phi(t)}{t}\, dt \sim \phi(u) \qquad (0<u<\infty)$$

oder die Äquivalenz

(4) $$\int_u^\infty \frac{\phi(t)}{t}\, dt \sim \phi(u) \qquad (0<u<\infty)$$

sichern, (Die Schreibweise $f(u) \sim g(u)$ bedeutet wie üblich, daß $cf(u) \le g(u) \le Cf(u)$ ist für zwei von u unabhängige Konstanten c und C.)

<u>Lemma 1</u> [3, Lemmata 1.4 und 1.5]. *Falls für ein* $a>1$ *die Ungleichheit* $\rho(\phi;1/a)<1$ *{bzw.* $\rho(\phi;a)<1$*} gilt, und falls die Funktion* $\rho(\phi;\cdot)$ *auf dem Intervall* $[1,a]$ *{bzw. auf dem Intervall* $[1/a,1]$*} beschränkt ist, so gilt* (3) *{bzw.* (4)*}*. □

Wir betrachten drei Beispiele, die für uns im folgenden von Wichtigkeit sein werden. Sei M eine Youngfunktion, die einer Δ_2-Bedingung genügt [2]. Dann folgt aus Lemma 1 für die beiden Funktionen

(5) $$\phi(u) = u\, M^{-1}(1/u)$$

und

(6) $$\phi(u) = 1/M^{-1}(1/u)$$

die Äquivalenz (3), und für die Funktion

(7) $\phi(u) = 1/u\ M^{-1}(1/u)$

die Äquivalenz (4).

Sei X ein symmetrischer Raum. Dann ist der sogenannte *Dehnungsoperator*

(8) $(\sigma_\tau x)(t) = x(t/\tau) \qquad (0<\tau<\infty)$

stetig und linear in X mit $\|\sigma_\tau\| \le \max\{\tau,1\}$ (siehe [3, Theorem 4.4]). Aus der Symmetrie des Raumes X folgt weiter, daß die Norm $\|\chi_D\|$ der charakteristischen Funktion einer meßbaren Teilmenge $D \subseteq [0,1]$ nur vom Maß μD dieser Menge abhängt; daher kann man in symmetrischen Räumen X die *Fundamentalfunktion*

(9) $\phi_X(\delta) = \|\chi_D\| \qquad (\mu D=\delta)$

einführen. Zwischen den Funktionen (2), (8) und (9) besteht der Zusammenhang

(10) $\rho(\phi_X;\tau) \le \|\sigma_\tau\|,$

wobei strikte Ungleichheit auftreten kann. Als besonders einfaches Beispiel für Gleichheit in (10) erwähnen wir die Lebesgueräume L_p $(1\le p\le\infty)$, in denen

$$\rho(\phi_X;\tau) = \phi_X(\tau) = \|\sigma_\tau\| = \tau^{1/p}$$

gilt (d. h. insbesondere $\|\sigma_\tau\| = 1$ in L_∞).

2. Die Räume $L_{M,N}$. Für eine meßbare Funktion x bezeichne $\lambda_x(h)$ das Maß der Menge aller $t\in(0,1)$ mit $|x(t)|>h$. Mit x^* bezeichnen wir die monoton fallende Umordnung von x, d. h.

$$x^*(t) = \inf\{h:\ h>0,\ \lambda_x(h)\le t\} \qquad (0<t<1),$$

und mit x^{**} deren Mittelung über (0,1), d. h.

$$x^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x^*(s)\,ds \qquad (0<t<1).$$

Definition 1. Seien M und N zwei Youngfunktionen und

$W_{M,N}(t) := N[1/M^{-1}(1/t)]$. Wir setzen

$$(11)\qquad |x|_{M,N} = \inf \{k:\ k>0,\ \int_0^1 W_{M,N}(t) N\left[\frac{x^*(t)}{k}\right]\frac{dt}{t} \le 1\}$$

und

$$(12)\qquad \|x\|_{M,N} = \inf \{k:\ k>0,\ \int_0^1 W_{M,N}(t) N\left[\frac{x^{**}(t)}{k}\right]\frac{dt}{t} \le 1\},$$

und bezeichnen mit $L_{M,N}$ die Menge aller meßbaren Funktionen x mit $\|x\|_{M,N}<\infty$. □

Das Funktional (12) ist eine Norm auf dem linearen Raum $L_{M,N}$, während für (11) die Dreiecksungleichheit nicht gilt. Man sieht leicht, daß $L_{M,N}$ ein symmetrischer idealer Raum ist, der quasi-regulär, aber im allgemeinen nicht regulär ist: In der Tat, eine meßbare Funktion x gehört offensichtlich genau dann zu $L_{M,N}$, falls für ein k>0

$$(13)\qquad \int_0^1 W_{M,N}(t) N\left[\frac{x^{**}(t)}{k}\right]\frac{dt}{t} < \infty$$

ist; dagegen gilt für den Unterraum $L^o_{M,N}$ das folgende charakterisierende

<u>Lemma 2</u>. *Eine meßbare Funktion* x *gehört genau dann zu* $L^o_{M,N}$, *falls* (13) *für alle* k>0 *gilt.*

Beweis. Sei $x\in L^o_{M,N}$ und k>0. Wegen (1) gibt es eine natürliche Zahl n_o derart, daß $\|x-A_nx\|\le k/2$ ausfällt für $n\ge n_o$, also

$$\int_0^1 W_{M,N}(t) N\left[\frac{2(x-A_nx)^{**}(t)}{k}\right]\frac{dt}{t} \le 1.$$

Da die Funktion A_nx beschränkt ist, gilt offensichtlich

$$\int_0^1 W_{M,N}(t) N\left[\frac{2(A_nx)^{**}(t)}{k}\right]\frac{dt}{t} < \infty.$$

Damit folgt der erste Teil der Behauptung aus der Konvexität der Youngfunktion N. Gelte umgekehrt (13) für alle k>0. Dann gibt es für $\varepsilon>0$ eine natürliche Zahl n_o derart, daß für $n\geq n_o$

$$\int_0^1 W_{M,N}(t)N\left[\frac{(x-A_n x)^{**}(t)}{\varepsilon}\right]\frac{dt}{t} = \int_0^{\lambda_x(n)} W_{M,N}(t)N\left[\frac{x^{**}(t)}{\varepsilon}\right]\frac{dt}{t} \leq 1$$

ist, da $\lambda_x(n) \to 0$ gilt für $n\to\infty$. Damit ist $\|x-A_n x\|_{M,N}\leq\varepsilon$ für $n\geq n_o$, und die Behauptung folgt aus (1) und der Abgeschlossenheit des Unterraumes $L^o_{M,N}$. □

Folgerung 1. *Erfüllt* N *eine* Δ_2*-Bedingung, so ist* $L_{M,N}$ *regulär.*

Beweis. Die Δ_2-Bedingung bedeutet, daß $\rho(N;a)<\infty$ ist für alle $a>0$. Ist nun $x\in L_{M,N}$ und gilt (13) für ein $k_o>0$, so gilt auch für $0<k<k_o$

$$\int_0^1 W_{M,N}(t)N\left[\frac{x^{**}(t)}{k}\right]\frac{dt}{t} \leq \rho(N;k_o/k) \int_0^1 W_{M,N}(t)N\left[\frac{x^{**}(t)}{k_o}\right]\frac{dt}{t} < \infty. \ \Box$$

Uns ist nicht bekannt, ob die Δ_2-Bedingung für N auch *notwendig* ist für die Regularität des Raumes $L_{M,N}$.

Definition 2. Sei M eine Youngfunktion. Wir setzen

$$|x|_{M,1} = \int_0^1 \frac{x^*(t)}{M^{-1}(1/t)}\frac{dt}{t} \tag{14}$$

und

$$\|x\|_{M,1} = \int_0^1 \frac{x^{**}(t)}{M^{-1}(1/t)}\frac{dt}{t}, \tag{15}$$

und bezeichnen mit $L_{M,1}$ die Menge aller meßbaren Funktionen x mit $\|x\|_{M,1}<\infty$; diese Menge (mit der Norm (15)) ist ein regulärer symmetrischer idealer Raum. □

Definition 3. Sei M eine Youngfunktion. Wir setzen

$$|x|_{M,\infty} = \sup_{t>0} \frac{x^*(t)}{M^{-1}(1/t)} \tag{16}$$

und

(17) $$\|x\|_{M,\infty} = \sup_{t>0} \frac{x^{**}(t)}{M^{-1}(1/t)},$$

und bezeichnen mit $L_{M,\infty}$ die Menge aller meßbaren Funktionen x mit $\|x\|_{M,\infty}<\infty$; diese Menge (mit der Norm (17)) ist ein symmetrischer idealer Raum. Außer (16) und (17) betrachten wir noch das Funktional

(18) $$|x|_{M,w} = \inf \{k: k>0, \sup_{h>0} M(h)\lambda_x(hk) \le 1\},$$

und schreiben

(a) $x\in L_{M,w}$, falls $\lambda_x(hk) = O(1/M(h))$ ist für ein $k>0$,

(b) $x\in L_{M,w,o}$, falls $\lambda_x(hk) = o(1/M(h))$ ist für ein $k>0$,

(c) $x\in L_{M,\infty,o}$, falls $\lim\limits_{t\to 0} x^{**}(t)/M^{-1}(1/t) = 0$ gilt. □

Satz 1. *Sei* $M\in\Delta_2$. *Dann gilt* $|x|_{M,w} = |x|_{M,\infty} \sim \|x\|_{M,\infty}$ *und folglich*

(i) $$L_{M,\infty} = L_{M,w},$$

(ii) $$L^o_{M,\infty} = L_{M,\infty,o} = L_{M,w,o}.$$

Beweis. Die Gleichheit $|x|_{M,w} = |x|_{M,\infty}$ folgt unmittelbar aus der Definition der Umordnung x^*. Weiter ist offensichtlich $|x|_{M,\infty} \le \|x\|_{M,\infty}$, da x^* monoton fällt und damit $x^* \le x^{**}$ ist. Andererseits sind $|x|_{M,\infty}$ und $\|x\|_{M,\infty}$ sogar äquivalent, falls

(19) $$\int_0^u M^{-1}(1/t)dt \sim u\, M^{-1}(1/u)$$

gilt; dies ist aber gerade das Beispiel (5). Damit stimmen die Räume $L_{M,\infty}$ und $L_{M,w}$ überein. Die Behauptung (ii) folgt aus der Gleichheitskette

$$L^o_{M,w} = \{x: M(x/k)\in L^o_{1,w} \text{ für ein } k>0\} =$$
$$= \{x: M(x/k)\in L_{1,w,o} \text{ für ein } k>0\} = L_{M,w,o},$$

wobei wir mit $L_{1,w}$ {bzw. $L_{1,w,o}$} die Menge aller meßbaren Funktionen x mit $\lambda_x(h) = O(1/h)$ {bzw. $\lambda_x(h) = o(1/h)$} bezeichnet haben. Damit ist Satz 1 bewiesen. □

Wir bemerken noch, daß das Funktional (18) schon in der Arbeit [8] untersucht wurde; dort sind auch Bedingungen dafür angegeben, daß $L_{M,w} \subseteq L_{N,w}$ für zwei Youngfunktionen M und N gilt oder daß der Raum $L_{M,w}$ mit einem Marcinkiewiczraum M_ϕ übereinstimmt. Dem Zusammenhang der Räume $L_{M,1}$ und $L_{M,\infty}$ mit anderen Funktionenräumen ist der folgende Abschnitt gewidmet.

3. Die Räume Λ_ϕ und M_ϕ. Eine positive Funktion ϕ auf $(0,\infty)$ heißt *quasikonkav*, falls sowohl ϕ als auch die durch

$$\phi^*(t) := \frac{t}{\phi(t)}$$

definierte (zu ϕ *konjugierte*) Funktion ϕ^* monoton wachsen und $\phi(0+) = \phi^*(0+) = 0$ gilt. Eine Funktion ϕ ist genau dann quasikonvex, wenn sie Fundamentalfunktion ϕ_X eines symmetrischen Raumes X ist [3, Theorem 4.7]; außerdem kann man in jedem symmetrischen Raum X eine äquivalente Norm einführen derart, daß der Raum symmetrisch bleibt und die Fundamentalfunktion bezüglich der neuen Norm sogar konkav ist [3, Theorem 5.8].

Sei ϕ eine quasikonkave Funktion. Der *Marcinkiewiczraum* M_ϕ besteht aus allen meßbaren Funktionen x, für die die Norm

$$(20) \qquad \|x\|_{M_\phi} = \sup_{D\subseteq(0,1)} \frac{\phi(\mu D)}{\mu D} \int_D |x(t)|dt = \sup_{t>0} \frac{\phi(t)}{t} \int_0^t x^*(s)ds$$

endlich ist. Der *Lorentzraum* Λ_ϕ besteht aus allen meßbaren Funktionen x, für die die Norm

$$(21) \qquad \|x\|_{\Lambda_\phi} = \sup \{\int_0^1 x(t)y(t)dt\colon \|y\|_{M_{\phi^*}} \le 1\}$$

endlich ist. Eine meßbare Funktion x gehört zu Λ_ϕ genau dann, wenn

$$(22) \qquad [x]_{\Lambda_\phi} = \int_0^\infty \phi(\lambda_x(h))dh = \int_0^1 x^*(t)d\phi(t) < \infty$$

ist. Hierbei gilt stets

$$\|x\|_{\Lambda_\phi} \le [x]_{\Lambda_\phi} \le 2\|x\|_{\Lambda_\phi},$$

und insbesondere $\|x\|_{\Lambda_\phi} = [x]_{\Lambda_\phi}$, falls ϕ konkav ist [4,5,15].

Sei nun M eine Youngfunktion. Die durch die Gleichung

$$M^{-1}(t)\phi(t^{-1}) = 1 \tag{23}$$

definierte Funktion ϕ ist dann offenbar quasikonkav. Ist beispielsweise $M_p(u) = \frac{1}{p}|u|^p$ $(1<p<\infty)$, so ist $\phi_p(t) = p^{-1/p}t^{1/p}$; weiter gilt für die konjugierte Youngfunktion

$$M_p^*(u) = \sup_{v>0} \{|u|v - M_p(v)\} = \frac{1}{p^*}|u|^{p^*} = M_{p^*}(u)$$

$(p^{-1}+p^{*-1}=1)$, und für die zu ϕ_p konjugierte quasikonkave Funktion

$$(p^*)^{1/p^*}\phi_p^*(t) = (p^*)^{1/p^*}t/\phi_p(t) = p^{1/p}t^{1/p^*} = p^{1/p}\phi_{p^*}(t),$$

d. h. ϕ_p^* und ϕ_{p^*} stimmen bis auf einen konstanten Faktor überein.

Allgemein gilt das folgende

Lemma 3. *Seien* M *und* N *zwei Youngfunktionen, und seien* ϕ *und* ψ *durch* $M^{-1}(t)\phi(t^{-1}) = N^{-1}(t)\psi(t^{-1}) = 1$ *definiert. Dann gilt*

(i) $N = M^* \Rightarrow \psi \sim \phi^*$,

(ii) $\psi = \phi^* \Rightarrow N \sim M^*$.

Beweis. Sei $N = M^*$. Die Funktion

$$\sigma(v) := \frac{v}{u}\,\frac{M(u)}{M(u)+M(v)}$$

ist nach oben beschränkt auf $(0,\infty)$, da $\sigma(v)\to 0$ (für $v\to 0$ und $v\to\infty$, gleichmäßig bzgl. u) gilt; sei $1/c$ eine obere Schranke. Für $t = 1/M(u)$ gilt nun

$$\frac{v}{M^{-1}(1/t)}\,\frac{1}{1+tM(v)} \le \frac{1}{c} \qquad (v>0),$$

also

$$\frac{1}{t} \ge \sup_{v>0}\left\{\frac{cv}{tM^{-1}(1/t)} - M(v)\right\} = N\left[\frac{c}{tM^{-1}(1/t)}\right].$$

Folglich ist $\phi^*(t) = tM^{-1}(1/t) \geq c/N^{-1}(1/t) = c\psi(t)$. Für $u = M^{-1}(1/t)$ gilt umgekehrt

$$N\left[\frac{2}{tM^{-1}(1/t)}\right] = \sup_{u>0}\left\{\frac{2u}{tM^{-1}(1/t)} - M(u)\right\} \geq$$

$$\geq \frac{2M^{-1}(1/t)}{tM^{-1}(1/t)} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}.$$

Folglich ist $\phi^*(t) = tM^{-1}(1/t) \leq 2/N^{-1}(1/t) = 2\psi(t)$.
Die Behauptung (ii) wird in analoger Weise bewiesen. □

Wir bemerken, daß Lemma 3 auch mit Hilfe allgemeiner Resultate über symmetrische Räume bewiesen werden kann (vgl. [3,11]). Zum Beispiel folgt (i) aus der Tatsache, daß ϕ wegen (23) die Fundamentalfunktion des Orliczraumes L_M (mit der Luxemburgnorm) ist und allgemein die konjugierte Fundamentalfunktion eines symmetrischen Raumes X mit der Fundamentalfunktion des konjugierten Raumes

$$X' := \{y: \int_0^1 x(t)y(t)dt<\infty \text{ für alle } x\in X\}$$

(d. h. in diesem Fall des Orliczraumes L_{M*} mit der Amemiyanorm) übereinstimmt.

Satz 2. *Gelte* (23) *mit* $M\in\Delta_2$. *Dann gilt*

(i) $L_{M,1} = \Lambda_\phi$,

(ii) $L_{M,\infty} = M_\phi$,

(iii) $L_{M,\infty,o} = M_{\phi,o}$,

wo $M_{\phi,o}$ *den Raum aller meßbaren Funktionen* x *bezeichne, für die*

$$\overline{\lim_{\mu D\to 0}} \frac{\phi(\mu D)}{\mu D}\int_D |x(t)|dt = 0$$

ist.

Beweis. Wegen Beispiel (6) ist

$$\frac{1}{M^{-1}(1/u)} \sim \int_0^u \frac{dt}{tM^{-1}(1/t)},$$

also

$$\|x\|_{\Lambda_\phi} \sim [x]_{\Lambda_\phi} \sim |x|_{M,1} \leq \|x\|_{M,1},$$

mithin $L_{M,1} \subseteq \Lambda_\phi$. Andererseits ist wegen Beispiel (7) auch

$$\frac{1}{uM^{-1}(1/u)} \sim \int_u^\infty \frac{dt}{t^2M^{-1}(1/t)} .$$

Hieraus folgt für jedes $D \subseteq (0,1)$ mit $\mu D=\delta$

$$\phi_{L_{M,1}}(\delta) = \|\chi_D\|_{M,1} = \int_0^\delta \frac{dt}{tM^{-1}(1/t)} + \delta\int_\delta^\infty \frac{dt}{t^2M^{-1}(1/t)} \sim$$

$$\sim \frac{1}{M^{-1}(1/\delta)} = \phi(\delta),$$

d. h. die Fundamentalfunktion des Raums $L_{M,1}$ ist äquivalent zur Funktion ϕ; aus [3, Theorem 5.5] erhalten wir damit $\Lambda_\phi \subseteq L_{M,1}$. Die Behauptung (ii) folgt unmittelbar aus (17), (20) und der Definition der Funktion x^{**}.
In analoger Weise wird die Behauptung (iii) bewiesen. □

4. Einbettungen und Dualitäten. Im Spezialfall $M(u) = \frac{1}{p}|u|^p$ und $N(u) = \frac{1}{q}|u|^q$ $(1<p,q<\infty)$ stimmen die Räume $L_{M,N}$, $L_{M,1}$, $L_{M,\infty}$ und $L_{M,w}$ mit den klassischen Räumen $L_{p,q}$, $L_{p,1} = \Lambda_p$, $L_{p,\infty} = M_p$ und $L_{p,w}$ überein. Für diese letzteren Räume ist eine Reihe von Einbettungssätzen bekannt, z. B. ist Λ_p stetig (aber nicht absolutstetig) eingebettet in M_p, und M_p seinerseits absolutstetig in Λ_q für $q<p$. Der folgende Satz verallgemeinert diese beiden Resultate:

Satz 3. *Seien* M *und* N *zwei Youngfunktionen. Dann gilt*

(i) $L_{M,1} \subseteq L_{M,\infty}$ *(stetige Einbettung),*

(ii) $L_{M,\infty} \subseteq L_{N,1}$ *(absolutstetige Einbettung) genau dann wenn*

$$\int_0^c \frac{M^{-1}(1/t)}{N^{-1}(1/t)}\frac{dt}{t} < \infty \tag{24}$$

für ein $c>0$ *gilt.*

Beweis. Aus der Monotonie von x^{**} und wegen der für jede Youngfunktion gültigen Abschätzung $M(u) \leq uM'(u)$ erhalten wir (mit der Substitution $s = 1/M(u)$)

$$\|x\|_{M,1} \geq x^{**}(t) \int_0^t \frac{ds}{sM^{-1}(1/s)} =$$

$$= x^{**}(t) \int_{M^{-1}(1/t)}^{\infty} \frac{M'(u)M(u)}{uM(u)^2} du \geq$$

$$\geq x^{**}(t) \int_{M^{-1}(1/t)}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{x^{**}(t)}{M^{-1}(1/t)},$$

d. h. $\|x\|_{M,\infty} \leq \|x\|_{M,1}$. (Wir bemerken, daß auch (i) mit Hilfe allgemeiner Einbettungssätze für symmetrische Räume erhalten werden kann [3,11].)

Gelte nun (24), und sei $x \in L_{M,\infty}$. Dann ist

$$\int_0^\infty \frac{x^{**}(t)}{tN^{-1}(1/t)} dt \leq \|x\|_{M,\infty} \int_0^\infty \frac{M^{-1}(1/t)}{N^{-1}(1/t)} \frac{dt}{t} < \infty,$$

wobei die Einbettungskonstante (d. h. hier ein Integral über dem Intervall $(0,\delta)$) mit δ gegen Null strebt.

Schließlich zeigen wir die Notwendigkeit der Bedingung (24) für die Einbettung $L_{M,\infty} \subseteq L_{N,1}$. Die durch $x_0(t) = M^{-1}(1/t)$ definierte Funktion x_0 gehört zu $L_{M,\infty}$, da stets

$$x_0^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t M^{-1}(1/s) ds \sim \frac{1}{t} tM^{-1}(1/t)$$

gilt. Nach Voraussetzung ist also $x_0 \in L_{N,1}$, mithin

$$\int_0^\infty \frac{M^{-1}(1/t)}{N^{-1}(1/t)} \frac{dt}{t} = |x|_{N,1} < \infty. \square$$

Sei X ein symmetrischer idealer Raum. Die Menge aller meßbaren Funktionen y, für die die Norm

$$\|y\| = \sup \{\int_0^1 x(t)y(t)dt: x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

endlich ist, nennt man den zu X konjugierten Raum X' (vgl. die Bemerkung nach Lemma 3). Dieser Raum ist ein (möglicherweise echter) Teilraum des Dualraums X*; genauer ist stets eine Zerlegung $X^* = X' + X^\wedge$ möglich, wo

$$X^\wedge = \{y: y \in X^*, \langle x,y\rangle = 0 \text{ für alle } x \in X^o\}$$

und

$$X^o = \{x: x \in X, \langle x,y\rangle = 0 \text{ für alle } y \in X^\wedge\}$$

ist (siehe z. B. [16, Theorem 29]). Insbesondere folgt hieraus, daß X' mit X* übereinstimmt dann und nur dann, wenn X mit X^o übereinstimmt, d. h. X regulär ist. Beispielsweise gilt (nach Definition der Norm (21))

$$\Lambda_\phi' = \Lambda_\phi^* = M_{\phi^*}$$

und (siehe [10])

$$M_{\phi,o}' = M_{\phi,o}^* = \Lambda_{\phi^*}.$$

Daraus erhalten wir unmittelbar die

Folgerung 2. *Sei* $M \in \Delta_2$. *Dann gilt*

(i) $L_{M,1}' = L_{M,1}^* = L_{M^*,\infty}$,

(ii) $L_{M,\infty,o}' = L_{M,\infty,o}^* = L_{M^*,1}$.

Beweis. Nach Lemma 3 und wegen der Regularität von $L_{M,1}$ ist

$$L_{M,1}^* = L_{M,1}' = \Lambda_\phi' = M_{\phi^*} = L_{M^*,\infty}.$$

Die Inklusion $L_{M,\infty,o}^* \subseteq L_{M^*,1}$ folgt aus dem Satz von Radon-Nikodym und der Tatsache, daß die beschränkten Funktionen in $L_{M,\infty,o}$ bzgl. der Norm (17) dicht liegen (vgl. (1) und Satz 1 (ii)). Zum Beweis der umgekehrten Inklusion $L_{M^*,1} \subseteq L_{M,\infty,o}^*$ genügt es die Abschätzung

$$\int_0^1 x(t)y(t)dt \leq C\|x\|_{M,\infty} \|y\|_{M^*,1}$$

für charakteristische Funktionen $x = \chi_D$ zu betrachten, d. h.

$$\int_0^u y^*(t)dt \le \frac{C}{M^{-1}(1/u)} \int_0^u \frac{y^*(t)dt}{tM^{*-1}(1/t)} .$$

Nun folgt aus $\phi(t)\phi^*(t) = t$ wegen Lemma 3 die Äquivalenz

$$M^{-1}(1/t)M^{*-1}(1/t) \sim \frac{1}{t},$$

siehe auch [2,9], also

$$M^{-1}(1/u) \int_0^u y^*(t)dt \le \int_0^u M^{-1}(1/t)y^*(t)dt \sim$$

$$\sim \int_0^u \frac{y^*(t)dt}{tM^{*-1}(1/t)} . \quad \square$$

5. Ein Interpolationssatz. Die Räume $L_{p,q}$ spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der Interpolationsräume. Bekanntlich wird ein Paar $(X;Y)$ idealer Räume *Interpolationspaar* für zwei Paare $(X_o;Y_o)$ und $(X_1;Y_1)$ idealer Räume genannt, falls jeder stetige lineare Operator aus X_o in Y_o und aus X_1 in Y_1 auch stetig ist zwischen X und Y. Beispielsweise ist nach dem bekannten Interpolationstheorem von Riesz-Thorin das Paar $(L_{p_\tau};L_{q_\tau})$ ein Interpolationspaar für die Paare $(L_{p_o};L_{q_o})$ und $(L_{p_1};L_{q_1})$, wenn

$$\frac{1}{p_\tau} = \frac{1-\tau}{p_o} + \frac{\tau}{p_1} , \quad \frac{1}{q_\tau} = \frac{1-\tau}{q_o} + \frac{\tau}{q_1} \qquad (0\le\tau\le 1)$$

gewählt wird.

Es gibt inzwischen weitaus allgemeinere Interpolationstheoreme als dieses (siehe z. B. [3,12,13]). Wir erhalten als Folgerung des Theorems von Lorentz-Shimogaki [14] den folgenden

Satz 4. *Gelte* $M, M_o, M_1, N, N_o, N_1 \in \Delta_2$. *Dann ist* $(L_{M,1};L_{N,1})$ *Interpolationspaar für die Paare* $(L_{M_o,1};L_{N_o,1})$ *und* $(L_{M_1,1};L_{N_1,1})$ *dann und nur dann, wenn für eine Konstante* $A>0$ *die Abschätzung gilt:*

$$\frac{M^{-1}(u)}{N^{-1}(v)} \leq A \max\left[\frac{M_0^{-1}(u)}{N_0^{-1}(v)}, \frac{M_1^{-1}(u)}{N_1^{-1}(v)}\right] \qquad (u,v>0).$$

Beweis. Wir setzen

$$\phi(s) := 1/sM^{-1}(1/s), \; \ldots\ldots, \; \psi_1(t) := 1/tN_1^{-1}(1/t);$$

wegen (6) gilt dann

$$\Phi(s) = \int_0^s \phi(\sigma)d\sigma \sim \frac{1}{M^{-1}(1/s)}, \; \ldots, \; \Psi_1(t) = \int_0^t \psi_1(\tau)d\tau \sim$$

$$\sim \frac{1}{N_1^{-1}(1/t)}.$$

Die Behauptung folgt nun aus der notwendigen und hinreichenden Bedingung (*) in [14]. □

6. Der Hardy-Littlewood-Operator. In diesem Abschnitt betrachten wir den Hardy-Littlewood-Operator

$$\text{(25)} \qquad Hz(t) = \frac{1}{t}\int_0^t z(s)ds \qquad (0<t<\infty),$$

der in der Theorie singulärer Gleichungen auftritt, im Raum $L_{M,N}$ über $(0,\infty)$. Dieser Operator bildet allgemein einen symmetrischen Raum X genau dann stetig in sich ab, wenn in diesem Raum

$$\text{(26)} \qquad \|\sigma_\tau\| = o(\tau) \qquad (\tau\to\infty)$$

gilt [3, Theorem 6.6].

Satz 5. *Sei $W_{M,N}$ wie in Definition 1 erklärt. Es existiere eine positive Funktion ω derart, daß*

$$\rho(N;\omega(\tau))\rho(W_{M,N};\tau) \leq 1$$

ist. Dann gilt $\|\sigma_\tau\| \leq 1/\omega(\tau)$ im Raum $L_{M,N}$.

Beweis. Für $k > \|x\|_{M,N}$ ist

$$\int_0^1 W_{M,N}(t)N\left[\frac{\omega(\tau)x^{**}(t/\tau)}{k}\right]\frac{dt}{t} = \int_0^1 W_{M,N}(s\tau)N\left[\frac{\omega(\tau)x^{**}(s)}{k}\right]\frac{ds}{s} \leq$$

$$\leq \rho(W_{M,N};\tau)\rho(N;\omega(\tau))\int_0^1 W_{M,N}(s)N\left[\frac{x^{**}(s)}{k}\right]\frac{ds}{s} \leq 1,$$

also $\|\sigma_\tau x\|_{M,N} \leq k/\omega(\tau)$. □

Unter den Voraussetzungen von Satz 5 ist der Operator H also beschränkt in $L_{M,N}$, falls

(27) $\qquad \tau\omega(\tau) \to \infty \qquad\qquad (\tau \to \infty)$

gilt; wir betrachten zwei einfache Beispiele. Im Raum $X = L_{p,q}$ kann für $1<p<\infty$ einfach $\omega(\tau) = \tau^{-1/p}$ gewählt werden, und (27) ist erfüllt. Ist allgemein M eine Youngfunktion, für die $M(uv) \geq M(u)M(v)$ (d. h. eine "umgekehrte Δ'-Bedingung") gilt, so kann man $\omega(\tau) = 1/\rho(M^{-1};\tau)$ wählen und erhält die Beschränktheit von H im Raum $X = L_{M,1}$.

In analoger Weise wie in Satz 5 kann man durch Betrachtung des asymptotischen Verhaltens von $\|\sigma_\tau\|$(für $\tau\to 0$ oder $\tau\to\infty$) Kriterien für die Beschränktheit des adjungierten Hardy-Littlewood-Operators

$$H^*z(t) = \int_t^\infty \frac{z(s)}{s}ds \qquad (0<t<\infty)$$

und des Hilbert-Operators

$$\Gamma z(t) = \int_0^\infty \frac{z(s)}{s+t}ds \qquad (0<t<\infty)$$

im Raum $L_{M,N}$ herleiten.

Der Autor dankt Professor Je. M. Semjonov (Voronezh) für die Diskussion der in dieser Arbeit zusammengestellten Ergebnisse.

L i t e r a t u r

[1] ANDRIENKO V. A.: Einbettungssätze für Funktionen einer Veränderlichen (Russisch), Itogi Nauki Mat. Anal. (1970), 203-262

[2] KRASNOSEL'SKIJ M. A., RUTITSKIJ Ja. B.: Konvexe Funktionen und Orliczräume (Russisch), Fizmatgiz, Moskau 1958

[3] KREJN S. G., PETUNIN Ju. I., SEMJONOV Je. M.: Interpolation linearer Operatoren (Russisch), Nauka, Moskau 1978

[4] LORENTZ G. G.: Some new functional spaces, Ann. Math. 51, 1 (1950), 37-55

[5] LORENTZ G. G.: On the theory of the spaces Λ, Pacific J. Math. 1 (1951), 411-429

[6] O'NEIL R.: Convolution operators and L(p,q) spaces, Duke Math. J. 30, 1 (1963), 129-142

[7] O'NEIL R.: Integral transforms and tensor products on Orlicz spaces and L(p,q) spaces, J. Anal. Math. 21 (1968), 1-276

[8] RUTITSKIJ Ja. B.: Neue Kriterien für die Stetigkeit und Vollstetigkeit von Integraloperatoren in Orliczräumen (Russisch), Izvestija VUZov Mat. 5 (1962), 87-100

[9] SALEHOV D. V., SEMJONOV Je. M.: Über die Konvergenz einer Familie von Funktionalen in Orliczräumen (Russisch), Studia Math. 32 (1969), 285-293

[10] SEMJONOV Je. M.: Über eine Skala von Interpolationsräumen (Russisch), Dokl. Akad. Nauk SSSR 148, 5 (1963), 1038-1041

[11] SEMJONOV Je. M.: Einbettungssätze für Banachräume meßbarer Funktionen (Russisch), Dokl. Akad. Nauk. SSSR 156, 6 (1964), 1292-1295

[12] SEMJONOV Je. M.: Interpolation linearer Operatoren in symmetrischen Räumen (Russisch), Dokl. Akad. Nauk SSSR 164, 4 (1965), 746-749

[13] SEMJONOV Je. M.: Über eine Methode Interpolationssätze in symmetrischen Räumen zu erhalten (Russisch), Dokl. Akad. Nauk SSSR 185, 6 (1969), 1243-1246

[14] SHARPLEY R.: Interpolation of operators for Λ-spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 80, 2 (1974), 259-261

[15] ZABREJKO P. P.: Nichtlineare Integraloperatoren (Russisch), Trudy Sem. Funk. Anal. Voronezh. Univ. 8 (1966), 1-148

[16] ZABREJKO P. P.: Ideale Funktionenräume I (Russisch), Vestnik Jaroslav. Univ. 8 (1974), 12-52

Università della Calabria
Dipartimento di Matematica
I-87036 Arcavacata/Rende (CS)
Italia

(Oblatum 14.5. 1984)