Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Jacques Bair

Quelques questions soulevées par le cône barrière d'un convexe

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 24 (1983), No. 4, 731--740

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106270

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
24,4 (1983)

QUELQUES QUESTIONS SOULEVÉES PAR LE CÔNE BARRIÈRE D'UN CONVEXE

Jacques BAIR

Résumé. Après avoir étudié quand le cône barrière $\mathbb{B}(A)$ d'un convexe A est fermé [II], ou bien quand $\mathbb{B}(A)\setminus\{0\}$ est ouvert [I] dans un espace euclidien, nous nous proposons de répondre à de nouvelles questions soulevées par ce cône. Ainsi, nous donnons quelques caractérisations nouvelles de l'adhérence $\overline{\mathbb{B}}(A)$ en faisant appel à la structure asymptotique de A et à des propriétés de polarité. Nous décrivons les ensembles convexes dont le cône barrière est un sous-espace vectoriel, ce qui nous amène à introduire et analyser les ensembles qualifiés de "laminés". Nous obtenons également une condition (nécessaire et suffisante) pour que $\mathbb{B}(A)\setminus\{0\}$ soit algébriquement ouvert, c'est-à-dire ouvert dans son enveloppe spatiale (sans que celle-ci ne coïncide nécessairement avec tout l'espace), améliorant de la sorte des résultats de [I]. Enfin, nous étudions quelque peu le cône prépolaire d'un convexe non nécessairement conique, généralisant par la même occasion certains énoncés donnés par Brøndsted [V].

Mots clefs : ensemble convexe, cône barrière, polarité.

Classification : 52 A 20.

Bien que la notion de cône barrière puisse être étudiée avec profit dans un espace vectoriel quelconque (de dimension même infinie) et sur des ensembles quelconques (non nécessairement convexes) [VIII], nous adopterons la solution de facilité qui consiste à travailler sur des ensembles convexes de l'espace euclidien R^n (avec $n > 0$); même si certains de nos résultats peuvent être aisément généralisés pour des ensembles quelconques dans des espaces vectoriels arbitraires, il nous a paru opportun de travailler dans ce cadre restreint afin de mieux mettre en évidence la portée de nos travaux.

La terminologie et les notations utilisées sont reprises, pour la plupart, de la très substantielle étude de Jongmans sur les cônes [VIII]. Pour la bonne compréhension du texte, rappelons néanmoins les principales notations; nous aurons recours, pour un convexe A de R^n, à son intérieur $\mathring{A}$ (pour la topologie usuelle de R^n), son internat ou intérieur relatif ${}^iA$, son adhérence ou enveloppe algébrique ${}^-A$, sa marge (ou frontière relative) ${}^mA=\bar{A}\setminus{}^iA$, son enveloppe linéaire ${}^lA$, son sous-espace vectoriel parallèle ${}^tA={}^lA-{}^lA$, son enveloppe spatiale ${}^sA$, son profil ou ensemble des points extrêmes ${}^pA$ et à l'ensemble expA de ses points exposés. Pour un cône C de sommet O, nous appellerons crête l'ensemble de ses sommets; nous dirons que C est épointé (resp. pointé) lorsqu'il est privé de (resp. lorsqu'il contient) son sommet O. Nous exploiterons de plus certains cônes associés à A, à savoir le polaire ${}^{\star}A=\{x\in R^n : \langle x;y\rangle \leqslant 0, \forall y\in A\}$ où $\langle x,y\rangle$ désigne le produit scalaire traditionnel, le prépolaire ${}^{\times}A=\{0\}\cup\{x\in R^n : \langle x,y\rangle < 0, \forall y\in A\setminus\{0\}\}$ le cône d'infinitude $\mathbb{I}(A) = \bigcup_{a\in A} (\bigcap_{\lambda>0} \lambda(A-a)) = \{x\in R^n : \exists y\in A, \forall \lambda\geqslant 0, y+\lambda x\in A\}$, le sous-espace caractéristique $\mathbb{E}(A) = \mathbb{I}(A) \cap - \mathbb{I}(A)$, l'enveloppe conique de sommet a $\mathbb{C}(A,a) = \{a\} \cup (a+]0,\infty[.(A-a))$ et son centralisé $\mathbb{C}_o(A,a) = \mathbb{C}(A,a)-a$, avec en particulier $\mathbb{C}(A) = \mathbb{C}(A,0)$, le cône normal $\mathbb{N}(A,a) = \{x\in R^n : \langle y-a,x\rangle \leqslant 0, \forall y\in A\} = {}^{\star}(A-a)$, et l'ouverture interne $\mathbb{O}(A) = \{0\}\cup\{x\in R^n : \forall y\in {}^{1}A, \exists \lambda>0, y+\lambda x\in A\}$.

Rappelons que le cône barrière $\mathbb{B}(A)$ d'un ensemble A est le cône composé des formes linéaires sur R^n qui sont majorées sur A; en termes équivalents, $\mathbb{B}(A) = \{x\in R^n : \sup_{y\in A} \langle x,y\rangle < +\infty\}$. On conviendra de plus que $\mathbb{B}(\emptyset)=R^n$.

1. Caractérisations de l'adhérence du cône barrière

Sauf pour les ensembles hyperboliques, c'est-à-dire les convexes non bornés A pour lesquels il existe un ensemble borné B tel que $A\subset B + \mathbb{I}(A)$, le cône barrière n'est pas fermé [II; proposition 5]. Le problème se pose dès lors de caractériser l'adhérence de la barrière, ce que nous allons réaliser en utilisant le cône d'infinitude et de certains cônes normaux. Le premier de ces énoncés, ainsi que son corollaire, est dû à Jongmans.

1.1. *Pour tout convexe* A, ${}^{-}\mathbb{B}(A) = {}^{\star}\mathbb{I}(A)$ *et* ${}^{s}\mathbb{B}(A) = {}^{\star}\mathbb{E}(A)$.

Preuve. La première égalité s'obtient en polarisant les deux membres de l'égalité ${}^{\star}\mathbb{B}(A) = \mathbb{I}(A)$ [VIII ; 6.19, p. 340] et en utilisant le théorème des bipolaires [VIII; 6.4, p. 336] . Ensuite, ${}^{s}\mathbb{B}(A) = {}^{s-}\mathbb{B}(A) = {}^{s\star}\mathbb{I}(A) = {}^{\star}\mathbb{E}\,\mathbb{I}(A) = {}^{\star}\mathbb{E}(A)$ en recourant à la propriété 6.17 de [VIII; 339].

1.2. Corollaire. *Si* A *est un convexe de pointure* π *dans* R^n *, la dimension de* $\mathbb{B}(A)$ *vaut* $n-\pi$ *(la pointure* π *désignant la dimension de* $\mathbb{E}(A)$*)*

1.3. *Si* A *est convexe fermé non vide,* ${}^{-}\mathbb{B}(A) = \overline{\sum}_{a\in V} \mathbb{N}(A,a)$, *où* V *désigne un ensemble qui rencontre toutes les variétés extrêmes de* A *; en particulier, si* A *ne contient aucune droite,* ${}^{-}\mathbb{B}(A) = \overline{\sum}_{a\in P_A} \mathbb{N}(A,a)$.

Preuve. On sait que $\mathbb{I}(A) = \bigcap_{a\in V} \mathbb{C}_o(A,a) = \bigcap_{a\in V} {}^{-}\mathbb{C}_o(A,a) = {}^{\star}\sum_{a\in V} {}^{\star}\mathbb{C}_o(A,a)$ en vertu, respectivement, des résultats 4 de [IX; p.11], 2.8 de [IV; p. 78] et 6.7 de

[VIII; p. 336] . Comme ${}^{\star}\mathbb{C}_o(A,a) = \mathbb{N}(A,a)$, on obtient, par polarité, ${}^{\star}\mathbb{I}(A) = {}^{\star\star}\sum_{a\in V} \mathbb{N}(A,a)$, c'est-à-dire $\bar{\mathbb{B}}(A) = \bar{\sum}_{a\in V} \mathbb{N}(A,a)$, grâce à la proposition 1.1 ci-dessus et au théorème des bipolaires (attendu que $\sum_{a\in V} \mathbb{N}(A,a)$ se confond avec l'enveloppe convexe de $\bigcup_{a\in V} \mathbb{N}(A,a)$).

En corollaire, on peut caractériser le cône barrière d'un polyèdre convexe, retrouvant la même occasion un résultat d'Epelman [VII; p. 372] et de Jongmans [IX; p. 11].

1.4. Corollaire. *Si* A *est un polyèdre convexe non vide,*
$\mathbb{B}(A) = {}^{\star}\mathbb{I}(A) = \sum_{a\in V} \mathbb{N}(A,a)$ *où* V *désigne un ensemble qui rencontre toutes les variétés extrêmes de* A.

Preuve. Comme un polyèdre convexe A est la somme d'un borné B et de son cône d'infinitude $\mathbb{I}(A)$, qui est lui-même un cône polyédral,
$\mathbb{B}(A) = \mathbb{B}(B+\mathbb{I}(A)) = \mathbb{B}(B) \cap \mathbb{B}\,\mathbb{I}(A)$ [VIII; 6.18, p. 340], d'où
$\mathbb{B}(A) = R^n \cap \mathbb{B}\,\mathbb{I}(A) = {}^{\star}\mathbb{I}(A)$ [VIII; 6.18; p. 340]. Par ailleurs, les cônes normaux sont les polaires des enveloppes coniques centralisées de A [VIII; 6.8', p.339] et sont de ce fait des cônes polyédraux [VIII; p. 338] . On arrive à la conclusion en remarquant que le nombre de variétés extrêmes d'un polyèdre convexe est fini, ce qui garantit le caractère fermé de la somme des cônes normaux considérés.

1.5. *Si le convexe fermé non vide* A *ne contient aucune droite,*
$$\bar{\mathbb{B}}(A) = \bar{\sum_{a\in \exp A}} \mathbb{N}(A,a).$$

Preuve. La démarche est la même qu'en 1.3, en s'appuyant cette fois sur une belle caractérisation de $\mathbb{I}(A)$ donnée par De Wilde, à savoir
$\mathbb{I}(A) = \bigcap_{a\in \exp A} \mathbb{C}_o(A,a)$ [VI].

2. Propriétés du cône prépolaire

L'obtention de nouvelles propriétés de la barrière se réalise grâce à des notions apparentées à la polarité. C'est pourquoi, le moment est venu d'approfondir l'étude du prépolaire entreprise par Brøndsted pour des cônes convexes [V], puis poursuivie par Jongmans dans un cadre plus large [VIII].

L'intuition fait pressentir l'existence de liens étroits entre le polaire d'un convexe A et le prépolaire de ${}^{i}A$. Avant de donner des précisions à ce propos, constatons que si A coïncide avec ϕ, $\{0\}$ ou R^n, on a bien sûr ${}^{\star}A = {}^{\times i}A$; cette remarque nous autorise à ne travailler que sur des ensembles que nous qualifions de *vrais* en ce sens qu'ils ne rentrent pas dans l'un des trois cas précités.

2.1. *Pour un vrai convexe* A, ${}^{\times i}A=\{0\}\cup({}^{\star}A\setminus{}^{\star s}A)=\{0\}\cup({}^{\star}A\setminus \mathbb{E}({}^{\star}A))$; *de plus, l'égalité* ${}^{\times i}A={}^{\star}A$ *équivaut à la condition* ${}^{s}A=R^{n}$ *, ou encore au caractère saillant de* ${}^{\star}A$.

Preuve. Visiblement, ${}^{\times i}A\cap{}^{\star s}A=\{0\}$, de sorte que ${}^{\times s}A\subset\{0\}\cup({}^{\star}A\setminus{}^{\star s}A)$.
Inversement, un point $x^{\star}$ de ${}^{\star}A\setminus{}^{\star s}A$ donne $\langle x,x^{\star}\rangle\neq 0$ en un point x convenable de ${}^{1}A$; si $\langle a,x^{\star}\rangle$ était nul pour un point de a de ${}^{i}A$, on parviendrait à deux points $a+\alpha(x-a)$ et $a-\alpha(x-a)$ de A pour un réel α positif, points en lesquels $x^{\star}$ prendrait des valeurs de signe contraire, ce qui est absurde.
Le dernier membre de la première égalité s'obtient ensuite en observant que ${}^{\star s}A=\mathbb{E}({}^{\star}A)$ [VIII; 6.17, p. 339] .
Des lignes précédentes, il ressort que l'égalité entre ${}^{\times i}A$ et ${}^{\star}A$ a lieu si et seulement si ${}^{\star s}A=\mathbb{E}({}^{\star}A)=\{0\}$, c'est-à-dire ${}^{s}A=R^{n}$ ou encore ${}^{\star}A$ est saillant.

Il est à noter que ce résultat généralise la première partie d'un lemme donné par Brøndsted [V; Lemma, p. 336] (énoncé dans lequel l'hypothèse int $A\neq\emptyset$ semble d'ailleurs faire défaut).

Une autre question vient naturellement à l'esprit quand on se penche sur la prépolarité: pour quels ensembles (convexes) A le prépolaire ${}^{\times}A$ se confond-il avec le polaire ${}^{\star}A$? Cela revient à chercher quand ${}^{\times}\mathbb{C}(A)$ coïncide avec ${}^{\star}\mathbb{C}(A)$; ce problème a été réglé par Brøndsted: il faut et il suffit que $\mathbb{C}(A)\setminus\{0\}$ soit ouvert [V; Prop. (e), p.337] . Voici néanmoins quelques informations plus précises sur ce sujet.

2.2. *Soit* A *un vrai convexe. Si* A *est algébriquement ouvert et* ${}^{s}A=R^{n}$ *, alors* ${}^{\times}A={}^{\star}A$. *Inversement, si* ${}^{\times}A={}^{\star}A$, ${}^{s}A=R^{n}$ *et* $\mathbb{C}(A)\setminus\{0\}$ *est convexe à moins que* $0\in\overset{\circ}{A}$

Preuve. La première partie se déduit directement de l'énoncé 2.1 puisque les hypothèses donnent ${}^{i}A=A$ et ${}^{\star s}A={}^{\star}R^{n}=\{0\}$.
Réciproquement, supposons ${}^{\times}A={}^{\star}A$. Si ${}^{s}A\neq R^{n}$, on obtient, par polarité, ${}^{\star s}A\neq\{0\}$: il est dès lors possible de trouver un point $x^{\star}$ non nul appartenant à ${}^{\star s}A$, donc à ${}^{\star}A$, mais pas à ${}^{\times}A$. Enfin, pour autant que l'origine n'appartienne pas à $\overset{\circ}{A}$, $\mathbb{C}(A)$ doit être un cône distinct de R^{n}, donc inclus dans un demi-espace fermé; pour deux points arbitraires a,b de $\mathbb{C}(A)\setminus\{0\}$, le segment]a:b[est inclus dans $\mathbb{C}(A)$ en vertu de la convexité de $\mathbb{C}(A)$, tandis que la droite (a:b) ne peut être homogène, sinon elle serait située dans la crête de $\mathbb{C}(A)$, ce que l'égalité ${}^{\times}A={}^{\star}A$ rend impossible.

Poursuivons notre étude comparative des polaire et prépolaire d'un convexe. Il apparaît clairement, au vu de quelques exemples élémentaires, que l'internat du polaire est relié d'une façon ou d'une autre à la notion de prépolaire. Voici, dans cette direction, un résultat qui précise (en le rectifiant) un énoncé de Jongmans [VIII; 6.22, p. 342] et de Brøndsted [V; Lemma (c) , p. 336].

2.3. *Pour tout convexe* A, $\{0\}\cup{}^{i\star}A = {}^{\times}(\bar{\mathbb{C}}(A)\setminus \mathbb{E}\,\mathbb{C}(A))$ *si et seulement si* $0 \notin {}^{i}A$ *ou* $A \subset \{0\}$.

<u>Preuve</u>. Si $A \subset \{0\}$, c'est-à-dire si $A=\emptyset$ ou $A=\{0\}$, l'égalité se vérifie. Supposons que $0\notin{}^{i}A$ et $A\not\subset\{0\}$. L'ensemble $B=\bar{\mathbb{C}}(A)$ ne peut être un sous-espace de sorte que ${}^{\star}B$ n'en est pas un non plus. Soit $y \in {}^{i\star}A = {}^{i\star}B$. Pour tout x de $B\setminus \mathbb{E}(B)=B\setminus{}^{\star s\star}A=B\setminus{}^{\star s\star}B$ [VIII; 6.17, p. 339], il existe $u\in{}^{s\star}B$ tel que $\langle x,u\rangle > 0$, puis $\alpha>0$ tel que $y+\alpha u\in{}^{\star}B$. En conséquence, $\langle x,y\rangle < \langle x,y+\alpha u\rangle \leqslant 0$ et $y \in {}^{\times}(B\setminus \mathbb{E}(B))$. Inversement, si y non nul n'appartient pas à ${}^{i\star}A = {}^{i\star}B$, les cônes $[0:y)$ et ${}^{\star}B$, tous deux distincts d'un sous-espace et dont l'intersection vaut $\{0\}$, peuvent être séparés par un hyperplan homogène H qui ne contient ni l'un, ni l'autre (sauf en $\{0\}$) [III; Théor. 3, p. 208]; H est forcément disjoint de ${}^{i\star}B$, de sorte qu'il existe x non nul tel que, pour tout z de ${}^{i\star}B$, $\langle x,z\rangle < 0 \leqslant \langle x,y\rangle$: ainsi, x appartient à ${}^{\star i\star}B$ sans être orthogonal à ${}^{si\star}B$; dès lors, $x \in{}^{\star\star}B\setminus{}^{\star si\star}B=B\setminus{}^{\star s\star}B=B\setminus \mathbb{E}(B)$ et $y \notin {}^{\times}(B\setminus \mathbb{E}(B))$. Prouvons maintenant la nécessité. Si l'origine est interne à A, $\mathbb{C}(A)$ est un sous-espace et l'égalité de l'énoncé entraîne $\{0\} \cup {}^{i\star}A = {}^{\times}\emptyset = R^{n}$, d'où, pour $n>0$, ${}^{\star}A=R^{n}$ et A coïncide avec $\emptyset$ ou $\{0\}$.

Ce dernier résultat admet un corollaire intéressant lorsque le cône engendré $\mathbb{C}(A)$ est fermé, en particulier lorsque l'ensemble A est *continu* au sens de Gale-Klee [X ; p. 380] (c'est-à-dire lorsque A est un convexe fermé dont la fonction d'appui, définie sur la sphère unitaire et pouvant prendre les valeurs $\pm\infty$, est continue).

2.4. *Soit* A *un convexe qui ne contient pas l'origine. Si* $\mathbb{C}(A)$ *est fermé, en particulier si* A *est continu,* $\{0\}\cup{}^{i\star}A={}^{\times}A$.

<u>Preuve</u>. L'espace caractéristique de $\mathbb{C}(A)$ se réduit forcément à l'origine; en effet, si une droite homogène $(0:x)$ est contenue dans $\mathbb{E}\,\mathbb{C}(A)$, on peut trouver deux réels $\lambda>0$ et $\mu<0$ tels que $\{\lambda x,\mu x\}\subset A$, ce qui entraîne, par convexité, l'absurdité $0\in A$. Dès lors, $\bar{\mathbb{C}}(A)\setminus\mathbb{E}\mathbb{C}(A)\setminus\{0\}$, puisque $\mathbb{C}(A)$ est fermé. Une application de l'énoncé précédent permet de conclure, vu que ${}^{\times}A={}^{\times}\mathbb{C}(A)={}^{\times}(\mathbb{C}(A)\setminus\{0\})$ [VIII; p. 342].

Le sort des ensembles continus est réglé par un théorème de Gale-Klee [X; 1.3, p. 381].

L'utilité des hypothèses peut être mise en évidence par quelques exemples simples du plan; ainsi, les ensembles $\{(x,y):-1\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$ et $\{(x,y):x>0,xy\geqslant 1\}$ ne vérifient pas l'égalité proposée bien que le premier possède une enveloppe conique fermée (mais il renferme l'origine) et que le second ne contient pas l'origine (mais son enveloppe conique n'est pas fermée)

3. Ensembles laminés

Il est clair que la barrière d'un convexe A coïncide avec tout l'espace si et seulement si A est borné. Plus généralement se pose la question de savoir quand $\mathbb{B}(A)$ est un sous-espace vectoriel.

Constatons avant tout que le sous-espace vectoriel ${}^{\star t}A$ intervient de façon décisive dans l'étude du cône barrière de A; ${}^{\star t}A$ est facile à interpréter: il s'agit de l'ensemble des formes linéaires nulles sur ${}^{t}A$, c'est-à-dire des formes constantes sur A. Les rapports entre ${}^{\star t}A$ et $\mathbb{B}(A)$ sont précisés dans l'énoncé ci-dessous où sont utilisées deux notions dérivées assez naturellement de la barrière: $\mathbb{B}'(A) = \mathbb{B}(A)\setminus {}^{\star t}A$ qui représente l'ensemble des formes linéaires majorées mais non constantes sur A et $\hat{\mathbb{B}}(A) = \{x \in {}^{l}A: \sup_{y\in A} \langle x,y\rangle < +\infty\}$ qui est en réalité la "barrière relative" de A, c'est-à-dire la barrière de A au sein de ${}^{l}A$.

3.1. *Soit* A *un convexe non vide. La crête de* $\mathbb{B}(A)$ *contient* ${}^{\star t}A$; $\mathbb{B}(A) = \hat{\mathbb{B}}(A) + {}^{\star t}A$; $\hat{\mathbb{B}}(A) = \mathbb{B}(A) \cap {}^{l}A$ *est un cône convexe pointé;* $\mathbb{B}'(A)$ *est un cône épointé qui n'est généralement ni convexe, ni fermé;* $\mathbb{B}(A) = {}^{\star t}A$ *si et seulement si* A *est une variété linéaire.*

Preuve. Seule la dernière partie de l'énoncé mérite quelques commentaires. Si A est une variété linéaire contenant le point a, $\mathbb{B}(A) = \mathbb{B}({}^{l}A) = \mathbb{B}({}^{l}A - a) = \mathbb{B}({}^{l}A - {}^{l}A) = \mathbb{B}({}^{t}A) = {}^{\star t}A$ [VIII; 6.18, p. 340] .
Inversement, si $\mathbb{B}(A) = {}^{\star t}A$, on obtient par polarité, ${}^{\star}\mathbb{B}(A) = {}^{\star\star t}A$ ou $\mathbb{I}(A) = {}^{t}A$ en vertu des propositions 6.19 et 6.4 de [VIII; p. 336 et 340] , ce qui entraîne ${}^{l}A = A + {}^{t}A = A + \mathbb{I}(A) \subset \bar{A}$, soit ${}^{l}A = \bar{A}$. Ainsi, $\bar{A}$ est une variété linéaire, ce qui doit aussi être le cas pour A lui-même.

Nous abordons maintenant le problème de la caractérisation des convexes dont la barrière est un sous-espace vectoriel distinct de tout l'espace R^n. A cet effet, nous disons qu'un ensemble *laminé* est un convexe non borné A de R^n pour lequel existe un borné B tel que $A \subset B + \mathbb{E}(A)$. Il est clair que la pointure d'un ensemble laminé A n'est pas nulle puisque $\mathbb{E}(A) \neq \{0\}$; par ailleurs, il est licite de remplacer B par son enveloppe convexe et même par l'adhérence de celle-ci, ce qui permet de supposer B convexe et même compact de surplus. Comme exemples d'ensembles laminés, citons les cylindres circulaires, les dalles, et aussi les variétés linéaires avec, pour ces dernières, B réduit à un point; réciproquement, tout ensemble laminé pour lequel B est un singlet coïncide avec une variété linéaire, puisque $B + \mathbb{E}(A) = b + \mathbb{E}(A)$ ne change pas quand on remplace b par un point a interne à A, ce qui donne $a + \mathbb{E}(A) \subset a + \mathbb{I}(A) \subset A$. Si A est laminé, $\bar{A}$ et ${}^{i}A$ le sont aussi car $\mathbb{E}(A) = \mathbb{E}(\bar{A}) = \mathbb{E}({}^{i}A)$ et $B + \mathbb{E}(A)$ est fermé lorsque B est compact; ceci nous autorise à nous limiter éventuellement à la considération de laminés fermés

3.2. *Un convexe fermé non borné* A *est laminé si et seulement s'il existe un borné* B *tel que* $A=B+\mathbb{E}(A)$.

Preuve. La suffisance est évidente. Inversement, supposons A inclus dans $B'+\mathbb{E}(A)$ pour un borné B' et considérons le borné $B=A\cap B'$. Il est clair que A coïncide avec $B+\mathbb{E}(A)$.

Nous en arrivons maintenant au résultat escompté.

3.3. *Pour un convexe* A *de* R^n *les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) A *est laminé;*

b) $\bar{A}$ *est la somme d'un borné non vide et d'un sous-espace vectoriel de dimension non nulle;*

c) $\mathbb{I}(A)$ *est un sous-espace vectoriel de dimension non nulle;*

d) $\mathbb{B}(A)$ *est un sous-espace vectoriel de dimension inférieure à* n*;*

e) ${}^{\star}\mathbf{I}(A)$ *est un sous-espace vectoriel de dimension inférieure à* n.

Preuve. a) $\Rightarrow$ b) grâce à 3.2.

b) $\Rightarrow$ c). En effet, si $\bar{A}=B+L$, où B est un borné et L un sous-espace, on a visiblement $\mathbf{I}(\bar{A})\subset L$, d'où $\mathbf{I}(A)=\mathbb{I}(\bar{A})=L$.

c) $\Rightarrow$ a). Si $\mathbb{I}(A)$ est un sous-espace, on peut constater que $\mathbf{I}(A)=\mathbb{E}(A)$. En appelant B l'intersection, forcément bornée, de $\bar{A}$ et d'un supplémentaire de $\mathbb{E}(A)$, on obtient l'égalité $\bar{A}=B+\mathbb{E}(A)$, d'où $\bar{A}$ est laminé et A de même.

Enfin, les affirmations c), d) et e) sont équivalentes en vertu des formules $\mathbf{I}(A)={}^{\star}\mathbb{B}(A)$ et ${}^{-}\mathbb{B}(A)={}^{\star}\mathbf{I}(A)$.

Les ensembles laminés interviennent de façon déterminante dans l'étude de la structure asymptotique des convexes. Voici deux résultats dans cette direction, le premier de ceux-ci précisant nettement la proposition 2 de [II].

3.4. *Si* A *est un vrai sous-ensemble convexe de* R^n ,
$\{0\}\cup{}^{i}\,\mathbb{I}(A)={}^{\times}[\,{}^{-}\mathbb{B}(A)\setminus\mathbb{E}\,\mathbb{B}(A)$ *si et seulement si* A *n'est ni laminé, ni borné.*

Preuve. Si A est borné ou laminé, le second membre de l'égalité se réduit à ${}^{\times}\emptyset=R^n$; l'égalité devient alors $\mathbb{I}(A)=R^n$, soit $A=R^n$, situation rejetée par l'énoncé. Inversement, si A n'est ni borné, ni laminé, l'énoncé précédent (3.3) assure que le cône $\mathbb{B}(A)$ non réduit à l'origine, n'est pas un sous-espace, ce qui garantit $0\notin{}^{i}\mathbb{B}(A)$; dès lors, $\mathbb{B}(A)$ peut jouer le rôle de l'énoncé 2.3, en tenant compte du fait que $\mathbb{B}(A)$ est convexe et que $\mathbb{E}({}^{-}\mathbb{B}(A))=\mathbb{E}\,\mathbb{B}(A)$.

A noter que l'égalité de ce dernier énoncé se maintient pour l'ensemble laminé particulier R^n.

3.5. *Pour tout convexe non laminé* A*,* $\{0\}\cup{}^{i}\mathbb{B}(A)={}^{\times}(\mathbb{I}(A)\setminus\mathbb{E}(A))$.

Preuve. En dehors du cas trivial où A est borné, le cône convexe fermé $\mathbb{I}(A)$ n'est pas un sous-espace, vu l'énoncé 3.3, d'où $0\notin{}^{i}\mathbb{I}(A)$ et le résultat 2.3 peut à nouveau être appliqué à $\mathbb{I}(A)$ cette fois.

4. Caractère algébriquement ouvert

Nous avons naguère caractérisé les corps convexes A pour lesquels $\mathbb{B}(A)\setminus\{0\}$ est ouvert [I; Theorem 2, p. 238] : il s'agit des ensembles continus, ou de façon équivalente, des ensembles *paraboliques* au sens de Bourbaki [II] (c'est-à-dire des convexes fermés A tels que, pour tout z n'appartenant pas à A, $z+\mathbb{I}(A)$ rencontre A).

Nous allons à présent décrire les circonstances dans lesquelles $\mathbb{B}(A)\setminus\{0\}$ est algébriquement ouvert, c'est-à-dire ouvert dans son enveloppe spatiale qui coïncide avec ${}^{\star}\mathbb{E}(A)$ en vertu de 1.1; cette étude englobe bien entendu les résultats rappelés ci-dessus (où les ensembles considérés ne pouvaient contenir aucune droite).

Grâce à 3.1, on peut analyser le problème dans l'enveloppe linéaire ${}^{1}A$ de A, puisque $\mathbb{B}(A)\setminus\{0\}$, qui est la somme de $\hat{\mathbb{B}}(A)\setminus\{0\}$ et de ${}^{\star t}A$, est de ce fait algébriquement ouvert en même temps que $\hat{\mathbb{B}}(A)\setminus\{0\}$. Nous nous attarderons donc en premier lieu sur des corps convexes, et exploiterons la technique classique qui consiste à décomposer un convexe fermé en la somme directe du sous-espace caractéristique $\mathbb{E}(A)$ et d'une "section transversale" $A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A)$; donnons quelques propriétés de cette opération.

4.1. *Pour un corps convexe fermé* A *de* R^n *, on a les propriétés suivantes :*
a) $A = (A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A)) + \mathbb{E}(A)$; b) $\mathring{A} = {}^{i}(A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A)) + \mathbb{E}(A) = (\mathring{A}\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A)) + \mathbb{E}(A)$;
c) $\mathbb{I}(A) = \mathbb{I}(A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A)) + \mathbb{E}(A)$, avec $\mathbb{I}(A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A)) = \mathbb{I}(A)\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A)$;
d) $\mathbb{B}(A) = \mathbb{B}(A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A))\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A)$, *où* $\mathbb{B}(A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A)) = \mathbb{B}(A) + \mathbb{E}(A)$ *est de dimension* n;
e) $\mathbb{O}(A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A)) = \mathbb{O}(A)\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A) = \{0\} \cup \{x\in{}^{\star}\mathbb{E}(A)\setminus\{0\} : \forall y\in{}^{\star}\mathbb{E}(A), \exists\lambda > 0,$ $y+\lambda x\in A\}$; *si* $A\neq R^n$, $\mathbb{O}(A)\cap\mathbb{E}(A) = \{0\}$, *et* $\mathbb{O}(A)$ *est strictement inclus* $\mathbb{O}(A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A) + \mathbb{E}(A)$ *quand la pointure de* A *n'est pas nulle.*

Preuve. Seule la partie e) mérite quelques explications.
Si $y \in \mathbb{O}(A)\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A)$ et $y\neq 0$, pour tout point x de ${}^{1}(A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A)) = {}^{\star}\mathbb{E}(A)$, il existe un réel positif λ pour lequel $x+\lambda y \in A$, de sorte que $x+\lambda y\in A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A)$.
Inversement, si $y \in \mathbb{O}(A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A))\setminus\{0\}$, un point arbitraire x de R^n se décompose en $x=a+b$, avec $a\in{}^{\star}\mathbb{E}(A) = {}^{1}(A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A))$, $b \in \mathbb{E}(A)$ et $a+\lambda y\in A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A)$ pour un réel positif λ , d'où $x+\lambda y\in A$.
On obtient ainsi la première égalité de e); le troisième membre constitue une autre façon d'écrire $\mathbb{O}(A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A))$, en tenant compte de $\mathbb{O}(A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A))\subset{}^{t}(A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A)) = {}^{\star}\mathbb{E}(A)$ et de l'appartenance de $x+\lambda y$ à ${}^{\star}\mathbb{E}(A)$ quand x et y lui appartiennent.
Si $A\neq R^n$, un point x de CA peut être séparé fortement de A; $\mathbb{E}(A)$ est évidemment parallèle à cet hyperplan séparant et $x+\mathbb{E}(A)$ est disjoint de A, de sorte que $\mathbb{E}(A)\cap\mathbb{O}(A) = \{0\}$. En outre, un point y de $\mathbb{O}(A)\setminus\{0\}$ donne $y = u+v$, avec $u\in{}^{\star}\mathbb{E}(A)$ et $v\in\mathbb{E}(A)$; pour tout x de ${}^{\star}\mathbb{E}(A)$, il existe un réel positif λ tel que $x+\lambda y\in A$, soit $x+\lambda u \in A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A)$ et $\lambda v \in \mathbb{E}(A)$, de sorte que $u \in \mathbb{O}(A\cap{}^{\star}\mathbb{E}(A))$;

l'inclusion de $\mathbb{C}(A)$ dans $\mathbb{C}(A\cap {}^{\star}\mathbb{E}(A)) + \mathbb{E}(A)$ ainsi obtenue est stricte lorsque la pointure de A n'est pas nulle puisque $\mathbb{C}(A)$ ne rencontre $\mathbb{E}(A)$ qu'en l'origine.

Le résultat escompté est maintenant à notre portée. Pour plus de commodité, nous faisonsencore appel à une notion supplémentaire: un convexe fermé A de R^n sera dit *relativement continu* lorsqu'il est continu dans son enveloppe linéaire (il s'agit en réalité des convexes fermés qui ne contiennent aucune demi-droite asymptote ou contenue dans la marge de A [I; p. 239]). Notons qu'un ensemble relativement continu est toujours de pointure nulle et que tout convexe compact est forcément relativement continu.

4.2. *Soit* A *un convexe fermé non vide.* $\mathbb{B}(A)\setminus\{0\}$ *est algébriquement ouvert si et seulement si* A *est la somme directe d'un ensemble relativement continu et d'un sous-espace vectoriel.*

Preuve. Conformément avec ce qui a été dit avant l'énoncé 4.1, il est licite de supposer que A est un corps convexe. En dehors du cas trivial $A=R^n$, pour lequel l'ensemble relativement continu considéré se réduit à $\{0\}$, le caractère algébriquement ouvert de $\mathbb{B}(A)\setminus\{0\}$ revient à dire que $\mathbb{B}(A)\setminus\{0\}$ est ouvert dans son enveloppe linéaire ${}^{\star}\mathbb{E}(A)$, de dimension non nulle. En vertu des énoncés 4.1 et 3.1, $\mathbb{B}(A)$, coïncide avec $\hat{\mathbb{B}}(A\cap {}^{\star}\mathbb{E}(A))$, c'est-à-dire avec la barrière de $A\cap {}^{\star}\mathbb{E}(A)$ étudiée au sein de son enveloppe linéaire ${}^{\star}\mathbb{E}(A)$, de sorte que la propriété formulée pour $\mathbb{B}(A)\setminus\{0\}$ équivaut encore à dire que $A\cap {}^{\star}\mathbb{E}(A)$ est continu dans ${}^{\star}\mathbb{E}(A)$ [I: Theorem 2, p. 238] , ou que $A\cap {}^{\star}\mathbb{E}(A)$ est relativement continu, ou encore que A est la somme directe du relativement continu $A\cap {}^{\star}\mathbb{E}(A)$ et du sous-espace $\mathbb{E}(A)$. Il est encore équivalent de dire que A est la somme directe d'un ensemble relativement continu B et d'un sous-espace vectoriel C (en sous-entendant par là que B est contenu dans un sous-espace supplémentaire de C); en effet, C ne peut alors différer de $\mathbb{E}(A)$, de sorte que B est l'intersection de A avec un supplémentaire de $\mathbb{E}(A)$, et son caractère relativement continu va de pair avec celui de $A\cap {}^{\star}\mathbb{E}(A)$, intersection de A et du sous-espace orthogonal à $\mathbb{E}(A)$.

4.3. Corollaire. *Pour tout ensemble laminé* A, $\mathbb{B}(A)\setminus\{0\}$ *est algébriquement ouvert.*

Preuve. $\bar{A}$ est laminé en même temps que A; en vertu de 3.2, il existe un convexe compact B tel que $\bar{A}=B+\mathbb{E}(A)=B'+\mathbb{E}(A)$, où B' désigne la projection orthogonale de B sur ${}^{\star}\mathbb{E}(A)$. On aboutit à la conclusion en utilisant 4.2, après avoir remarqué que B' est relativement continu en même temps que B et que $\mathbb{B}(\bar{A}) = \mathbb{B}(A)$ grâce à 6.18 de [VIII; p. 340].

Bibliographie

[I] J. BAIR, A geometric description of the inner aperture of a convex set, Acta Math. Ac. Sc. Hungaricae 38(1981), 237-240.

[II] J. BAIR, Liens entre le cône d'ouverture interne et l'internat du cône asymptotique d'un convexe, en voie de publication dans Bull. Soc. Math. de Belgique, série B, 1983.

[III] J. BAIR - J. GWINNER, Sur la séparation vraie de cônes convexes; Arkiv för Mat 16(1978), 207-212.

[IV] J. BAIR - F. JONGMANS, Du bon usage des cônes dans l'aménagement de la tour de Babel, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège 51(1982), 74-81.

[V] A. BRØNDSTED, The inner aperture of a convex set, Pacific J. Math. 72(1977) 335-340.

[VI] M. DE WILDE, Some properties of the exposed points of finite dimensional convex sets, en voie de publication.

[VII] EPELMAN, On a property of polyhedral sets, Math. Programming North-Holland 16(1979), 371-373.

[VIII] F. JONGMANS, Cris et chuchotements des cônes, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, 49(1980), 312-346.

[IX] F. JONGMANS, Contribution aux fondements de la calvitie mathématique, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège 50(1981), 8-15.

[X] D. GALE - V. KLEE, Continuous convex sets, Math. Scand. 7(1959), 379-391.

Institut de Mathématique
Université de Liège
Avenue des Tilleuls, 15
B-4000 Liège (Belgique)

(Oblatum 10.2. 1983)