Dmitrii B. Shakhmatov

Вложения в топологические поля и построение поля, пространство которого не нормально

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 24 (1983), No. 3, 525--540

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106252`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

24,3 (1983)

ВЛОЖЕНИЯ В ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОЛЯ И ПОСТРОЕНИЕ ПОЛЯ, ПРОСТРАНСТВО КОТОРОГО НЕ НОРМАЛЬНО

Д.Б.ШАХМАТОВ

Abstract: If there exists a one-to-one continuous mapping of a topological space X onto a metrizable space (compact metrizable space) then X is embeddable as a subspace (closed subspace) into connected field of arbitrary characteristic. With the help of this proposition we construct two examples: a topological field P_1 the space of which is not normal and a topological field P_2 the space of which is normal (even Lindenlöf) but is not hereditarily normal.

Ключевые слова: топологическое поле, верхняя грань семейства топологий.

Classification: 54H13, 54D15.

Каждое тихоновское пространство можно вложить в качестве замкнутого подпространства в топологическую группу, кольцо, линейное топологическое пространство над полем $\mathbb{R}$ [5,6]. Однако далеко не каждое тихоновское пространство можно вложить в качестве подпространства /хотя бы и не замкнутого/ в некоторое топологическое поле [9]. В работе приводится достаточное условие для возможности такого вложения /теорема I/ и вводится широкий класс пространств, в пределах которого это условие является также необходимым /теорема 2/. На основе теоремы I строятся топологическое поле P_1, пространство которого не нормально, топологическое поле P_2, пространство которого нормально /даже линделефово/, но не является наследственно нормальным, а также топологические поля с различными комбинациями кардинальных инвариантов.

Обозначения и терминология те же, что в [2,3]. Все пространства предполагаются тихоновскими. Через $\mathcal{N}$ обозначается множество натуральных чисел, через $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел. Символы $|\cdot|$, w, nw, ψ, l, d обозначают соответственно мощность, вес, сетевой вес, псевдохарактер, число Линделефа и плотность пространства [2]. Уплотнением называется непрерывное взаимно однозначное отображение "на".

§ I. Вложения тихоновских пространств в топологические поля.

§ I целиком посвящен доказательству следующего основного результата:

Теорема I. I/ Пусть X уплотняется на метрическое пространство. Тогда X вкладывается в качестве подпространства в связное топологическое поле P произвольной характеристики. При этом $w(P)=w(X)$.

2/ Если X уплотняется на метризуемый компакт, то X вкладывается в поле P в качестве замкнутого подпространства.

Пусть X – множество, K – произвольное поле, $R = K[x : x\in X]$ – кольцо многочленов от /коммутирующих между собой и с элементами поля K/ независимых переменных $\{x : x\in X\}$ с коэффициентами из поля K, P – поле частных кольца R. Через 0 и 1 обозначим соответственно ноль и единицу поля K. Без ограничения общности можем считать, что $0,1\notin X$. Положим $Y=X\cup\{0,1\}$. В этих обозначениях имеет место

Предложение I. Пусть ρ – произвольная метрика на множестве X, удовлетворяющая для любых $x,y\in X$ условию $\rho(x,y)\leqslant 1$. Тогда на поле P существует метрика d, превращающая P в топологическое поле и удовлетворяющая условию $d(x,y)=\rho(x,y)$ для любых $x,y\in X$.

Доказательство предложения I. Модифицируем построения из [4, 7]. Введем метрику ρ^* на Y следующим образом. Пусть $\rho^*(x,y)=\rho(x,y)$, $\rho^*(0,1)=1$, $\rho^*(0,x)=\rho^*(1,x)=1$ при всех $x,y\in X$.

Через $(x_1-y_1,\dots,x_n-y_n)$ будем обозначать идеал кольца R, порожденный многочленами $x_1-y_1,\dots,x_n-y_n$ $(x_i,y_i\in Y,\ i=1,\dots,n)$. Очевидно $f\in(x_1-y_1,\dots,x_n-y_n)$, если и только если существуют $\theta_i \in R$ $(i=1,\dots,n)$ такие, что $f=\sum_{i=1}^{n}\theta_i\cdot(x_i-y_i)$. Для любого $\varepsilon>0$ через U_ε обозначим объединение идеалов $(x_1-y_1,\dots,x_n-y_n)$ по всем конечным наборам $x_1,\dots,x_n;\ y_1,\dots,y_n$ /произвольной длины n / элементов из Y таким, что $\sum_{i=1}^{n}\rho^*(x_i,y_i)<\varepsilon$.

Для любого $f\in R$ положим $|f|=\inf\{\varepsilon: f\in U_\varepsilon\}$. Перечислим основные свойства функции $|\cdot|: R\to \mathbb{R}$.

Свойство I. $|f|\leqslant 1$ для любого $f\in R$.

Свойство 2. $|f|=|-f|$ при любом $f\in R$.

Свойство 3. Если $f\neq 0$, то $|f|>0$.

Свойство 4. $|f+g|\leqslant|f|+|g|$ для любых $f,g\in R$.

Свойство 5. $|f\cdot g|=\min(|f|,|g|)$ для любых $f,g\in R$.

Свойство 6. $|0|=0$ и $|1|=1$.

Так как $f\in(1-0)$ для любого $f\in R$, то $|f|\leqslant\rho^*(0,1)=1$ и свойство I установлено. Многочлены f и $(-f)$ принадлежат или не принадлежат идеалу $(x_1-y_1,\dots,x_n-y_n)$ одновременно, откуда следует свойство 2.

Пусть $f\in R$, $f\neq 0$. Положим $Sp^*(f)=\{x: x\in X$ и $f\notin K[y: y\in X\setminus\{x\}]\}$. $Sp^*(f)$ - это набор тех переменных, которые входят в несократимую запись многочлена f. Например $Sp^*(x^3+y\cdot z)=\{x,y,z\}$. Пусть $Sp(f)=Sp^*(f)\cup\{0,1\}$.

<u>Лемма I</u>. Пусть $f\in R$, $f\neq 0$ и $f\in(x_1-y_1,\dots,x_n-y_n)$. Тогда существуют $z,z'\in Y$ такие, что:

1/ $z\neq z'$;

2/ $z,z'\in Sp(f)$;

3/ $z\sim z'$ при отношении эквивалентности $\sim$ на Y, которое порождается условиями $x_1\sim y_1,\dots,x_n\sim y_n$.

<u>Доказательство</u> леммы I проведем индукцией по n.

Пусть $n=1$ и $f\in(x_1-y_1)$. Если $\{x_1,y_1\}=\{0,1\}$, то доказывать нечего, так как по определению $\{0,1\}\subset Sp(f)$.

Пусть $\{x_1,y_1\}\neq\{0,1\}$. Пусть, например, $x_1\neq 0$ и $x_1\neq 1$. Так как $f\in(x_1-y_1)$, то существует $g\in R$ такое, что $f=g\cdot(x_1-y_1)$. Возьмем в g одночлен m максимальной степени по переменной x_1. Тогда в $f=g\cdot(x_1-y_1)$ есть одночлен вида $m\cdot x_1$, то есть $x_1\in Sp^*(f)\subset Sp(f)$. Если $y_1\neq 0$ и $y_1\neq 1$, то аналогично показывается, что $y_1\in Sp(f)$. Если же

$y_1=0$ или $y_1=1$, то $y_1\in Sp(f)$ по определению. В любом случае условия I/ – 3/ выполняются. Лемма I при $n=1$ доказана.

Пусть лемма I доказана при всех $n<m$. Докажем ее для $n=m$. Пусть $f\in(x_1-y_1,\ldots,x_m-y_m)$.

Среди x_i и y_i $(i=1,\ldots,m)$ x_m может повторяться. Без ограничения общности можем считать, что $x_i=x_m$ при $t\leqslant i\leqslant\leqslant m$, $x_i\neq x_m$ при $1\leqslant i<t$ и $x_m\neq y_i$ при $1\leqslant i\leqslant m$ /иначе переобозначим x_i и y_i /. Рассмотрим идеал $I=(x_1-y_1,\ldots,x_{t-1}-y_{t-1},y_m-y_t,y_m-y_{t+1},\ldots,y_m-y_{m-1},x_m-y_m)$. Поскольку при $t\leqslant p<m$ $x_p=x_m$, $x_p-y_p=1\cdot(x_m-y_m)+ +1\cdot(y_m-y_p)\in I$, то $f\in(x_1-y_1,\ldots,x_m-y_m)\subset I$. Обозначим через $\approx$ отношение эквивалентности на Y, которое порождается условиями $x_1\approx y_1,\ldots,x_{t-1}\approx y_{t-1},y_m\approx y_t,y_m\approx y_{t+1},\ldots,y_m\approx y_{m-1},x_m\approx y_m$. Поскольку при $t\leqslant p<m$ $x_p=x_m\approx y_m\approx\approx y_p$, то из $z\approx z'$ следует $z\sim z'$. Это рассуждение показывает, что в дальнейшем без ограничения общности мы можем предполагать выполненным следующее условие:

$$x_m\notin\{x_1,\ldots,x_{m-1},y_1,\ldots,y_m\}. \qquad /I/$$

Если $x_m,y_m\in Sp(f)$, то условия I/ – 3/ очевидно выполняются и доказывать нечего.

Пусть теперь $x_m\notin Sp(f)$. Тогда, во-первых, $x_m\notin\{0,1\}$ и, во-вторых, многочлен f от переменной x_m не зависит. Так как $f\in(x_1-y_1,\ldots,x_m-y_m)$, то существуют $g,h\in R$ такие, что:

$$f=g-h\cdot(x_m-y_m), \qquad /2/$$

$$g\in I_{m-1}=(x_1-y_1,\ldots,x_{m-1}-y_{m-1}). \qquad /3/$$

Разложим многочлены g и h по степеням переменной x_m:

$$g=x_m^k\cdot g_k+x_m^{k-1}\cdot g_{k-1}+\ldots+x_m\cdot g_1+g_0,$$
$$h=x_m^\ell\cdot h_\ell+x_m^{\ell-1}\cdot h_{\ell-1}+\ldots+x_m\cdot h_1+h_0.$$

Здесь $g_k,\ldots,g_0,h_\ell,\ldots,h_0\in R$ и не зависят от переменной x_m. Так как f не зависит от x_m, то $k=\ell+1$ и из /2/ следует

$$\left.\begin{aligned} &g_{\ell+1}=h_\ell,\\ &g_\ell=h_{\ell-1}-y_m\cdot h_\ell,\\ &g_{\ell-1}=h_{\ell-2}-y_m\cdot h_{\ell-1},\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{aligned} &h_{\ell-1}=g_\ell+y_m\cdot g_{\ell+1},\\ &h_{\ell-2}=g_{\ell-1}+y_m\cdot g_\ell+y_m^2\cdot g_{\ell+1},\end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdots\cdots \\ g_1 = h_0 - y_m h_1, \\ f = g_0 + y_m h_0. \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cdots\cdots \\ h_0 = g_1 + y_m\cdot g_2 + \ldots + y_m^{\ell}\cdot g_{\ell+1}, \\ f = g_0 + y_m\cdot g_1 + \ldots + y_m^{\ell+1}\cdot g_{\ell+1}. \end{array}\right.$$

Ввиду /3/ существуют $\theta_i \in R\ (i=1,\ldots,m-1)$ такие, что $g = \sum_{i=1}^{m-1} \theta_i\cdot(x_i - y_i)$. Из /I/ следует, что $g_0 \in I_{m-1},\ldots,$ $g_{\ell+1} \in I_{m-1}$. Поскольку I_{m-1} идеал, то $f = g_0 + y_m g_1 + \ldots + y_m^{\ell+1}\cdot g_{\ell+1} \in I_{m-1}$. По индуктивному предположению найдутся $z, z' \in Y$ такие, что: I/ $z \neq z'$; 2/ $z, z' \in Sp(f)$; 3/ $z \simeq z'$ при отношении эквивалентности $\simeq$ на Y, порождаемом условиями $x_1 \simeq y_1, \ldots, x_{m-1} \simeq y_{m-1}$/и тем более $z \sim z'$ при отношении эквивалентности $\sim$ на Y, порождаемом условиями $x_1 \sim y_1, \ldots, x_m \sim y_m$ /. Лемма I доказана.

Доказательство свойства 3. Пусть $f \in R$, $f \neq 0$, $f \in (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$ и z, z' те же, что в лемме I. Тогда $\rho^*(z, z') \leq \sum_{i=1}^{n} \rho^*(x_i, y_i)$, так как от z к z' можно дотянуться цепочкой, состоящей из звеньев вида (x_i, y_i) $(i=1,\ldots,n)$. Поскольку множество $Sp(f)$ конечно, то $|f| \geq \min\{\rho^*(z, z') : z, z' \in Sp(f)$ и $z \neq z'\} > 0$, что и доказывает свойство 3.

Доказательство свойства 4. Из включения $U_{\varepsilon_1} + U_{\varepsilon_2} \subset U_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$ и определения $|f| = \inf\{\varepsilon : f \in U_\varepsilon\}$ следует, что $|f+g| \leq |f| + |g|$.

Доказательство свойства 5. Если $f\cdot g \in U_\varepsilon$, то существуют $x_1,\ldots,x_n; y_1,\ldots,y_n \in Y$ такие, что $f\cdot g \in (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) = I$ и $\sum_{i=1}^{n} \rho^*(x_i, y_i) < \varepsilon$. Но идеал I простой, то есть фактор-кольцо R/I не имеет делителей нуля. Иными словами, $f\cdot g \in I$ в том и только в том случае, когда либо $f \in I$, либо $g \in I$. Поэтому $f\cdot g \in U_\varepsilon$ эквивалентно тому, что либо $f \in U_\varepsilon$, либо $g \in U_\varepsilon$, откуда $|f\cdot g| = \min(|f|, |g|)$.

Положим $\tilde\rho(f,g) = |f-g|$ для любых $f, g \in R$. Из свойств 2 – 5 вытекает, что $\tilde\rho$ метрика на R , превращающая R в отделимое топологическое кольцо.

Свойство 7. Пространство (X, ρ) изометрично вложено в $(R, \tilde\rho)$.

Доказательство свойства 7. Пусть $x, y \in X$. Тогда $\tilde\rho(x,y) = |x-y| \leq \rho^*(x,y) = \rho(x,y)$, так как двучлен $x - y$ лежит в идеале $(x-y)$. Установим обратное неравенство.

Пусть $x - y \in (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$. Для многочлена $f = (x-y)$ выберем $z, z' \in Y$, удовлетворяющие условиям I/ – 3/ леммы I.

Ввиду условия 3/ леммы I существует цепочка $z_0, \dots, z_\kappa$ такая, что $z_0 = z$, $z_\kappa = z'$ и при всех $i = 1, \dots, \kappa$ найдется $m \leq$ $\leq n$ такое, что $\{z_{i-1}, z_i\} = \{x_m, y_m\}$. Можно считать, что цепочка не содержит циклов.

Случай I. $z = z_0 = x$, $z' = z_\kappa = y$. Тогда $\rho^*(x,y) \leq$ $\leq \sum_{i=1}^{\kappa} \rho^*(z_{i-1}, z_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \rho^*(x_i, y_i)$.

Случай 2. Пусть, например, $z = z_0 \in \{0,1\}$. Тогда $z_1 \in Y \setminus \{z\}$. Поскольку при любом $z_1 \in Y \setminus \{z\}$ $\rho^*(z, z_1) = \rho^*(z_0, z_1) = 1$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \rho^*(x_i, y_i) \geq \sum_{j=1}^{\kappa} \rho^*(z_{j-1}, z_j) \geq \rho^*(z_0, z_1) = 1 \geq \rho^*(x,y).$$

Итак, всегда $\rho(x,y) = \rho^*(x,y) \leq \sum_{i=1}^{n} \rho^*(x_i, y_i)$, то есть $\rho(x,y) \leq \tilde{\rho}(x,y)$, что и требовалось.

Доказательство свойства 6 проводится аналогично.

Определим теперь функцию $\|\cdot\| : P \to \mathbb{R}$. Для любого $h \in P$ через $\|h\|$ обозначим нижнюю грань чисел $\sum_{i=1}^{n} |f_i| / |g_i|$ по всевозможным записям $h = \sum_{i=1}^{n} f_i / g_i$, где $f_i, g_i \in R$, $g_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$ и n произвольно. Ввиду свойства 3 определение корректно. Установим следующие свойства функции $\|\cdot\| : P \to \mathbb{R}$:

Свойство 8. $\|f\| = \|-f\|$ для любого $f \in P$.

Свойство 9. $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ для любых $f, g \in P$.

Свойство IO. $\|f \cdot g\| \leq \|f\| + \|g\|$ для любых $f, g \in P$.

Свойство II. $\|f \cdot g\| \leq C_f \cdot \|g\|$ для любых $f, g \in P$. Здесь постоянная C_f зависит только от f и не зависит от g.

Свойство I2. $\|f\| = |f|$ для любого $f \in R$.

Свойство I3. $\|f\| > 0$ при $f \neq 0$.

Свойство 8 следует из свойства 2. Свойство 9 очевидно.

Доказательство свойства IO. Пусть $f = \sum_{i \in I} \frac{a_i}{b_i}$, $g = \sum_{j \in J} \frac{a_j}{b_j}$; $a_i, b_i \in R$ при $i \in I \cup J$ и $I \cap J = \varnothing$. Упорядочим $I \cup J$ отношением $>$ так, чтобы из $i > j$ следовало $|b_i| \geq |b_j|$. Тогда

$$f \cdot g = \sum_{i \in I} \frac{a_i}{b_i} \cdot \sum_{j \in J} \frac{a_j}{b_j} = \sum_{i \in I} \left(\frac{a_i}{b_i} \cdot \sum_{\{j \in J : j > i\}} \frac{a_j}{b_j} \right) + \sum_{j \in J} \left(\frac{a_j}{b_j} \cdot \right.$$

$$\cdot \sum_{\{i\in I:\, i>j\}} \frac{a_i}{b_i}\Bigg) = \sum_{i\in I} \frac{a_i}{b_i}\cdot \frac{m_i}{\prod\limits_{\{j\in J:\, j\geq i\}} b_j} + \sum_{j\in J} \frac{a_j}{b_j}\cdot \frac{\ell_j}{\prod\limits_{\{i\in I:\, i>j\}} b_i},$$

где суммы внутри скобок приведены к общему знаменателю. Кроме того, если $\{i\in I : i>j\}=\varnothing$, то $\sum\limits_{\{i\in I:\, i>j\}} \frac{a_i}{b_i} = 1$. Тогда

$$\|f\cdot g\| \leqslant \sum_{i\in I} \frac{|m_i\cdot a_i|}{\left|b_i\cdot \prod\limits_{\{j\in J:\, j\geq i\}} b_j\right|} + \sum_{j\in J} \frac{|a_j\cdot \ell_j|}{\left|b_j\cdot \prod\limits_{\{i\in I:\, i>j\}} b_i\right|} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i\in I} \frac{|a_i|}{|b_i|} + \sum_{j\in J} \frac{|a_j|}{|b_j|} \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

Доказательство свойства II. Пусть $f = \frac{a}{b}$ - несократимая запись $f\in P$, $a, b\in R$ и $g=\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}$, $a_i, b_i\in R$, $i=1,\dots,n$. Используя свойства I,3,5, получаем $\|f\cdot g\| = \|\frac{a}{b}\cdot g\| \leqslant$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{|a\cdot a_i|}{|b\cdot b_i|} = \sum_{\{i:\,|b|\leq|b_i|\}} \frac{|a\cdot a_i|}{|b|} + \sum_{\{i:\,|b|>|b_i|\}} \frac{|a\cdot a_i|}{|b_i|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|b|}\cdot\left(\sum_{\{i:\,|b|\leq|b_i|\}} \frac{|a_i|}{|b_i|} + \sum_{\{i:\,|b|>|b_i|\}} \frac{|a_i|}{|b_i|}\right) = \frac{1}{|b|}\cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|}{|b_i|}$$

откуда $\|f\cdot g\| \leq C_f\cdot\|g\|$, где постоянная $C_f = \frac{1}{|b|}$ зависит только от f и не зависит от g.

Лемма 2. Пусть $e\in R$, $e=\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f_i}{g_i}$, где $f_i, g_i\in R$, $i=1,\dots,n$. Тогда $|e|\leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{|f_i|}{|g_i|}$.

Доказательство леммы 2 /от противного/. Среди всех контрпримеров к лемме 2 выберем контрпример $e^*=\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f_i}{g_i}$ с минимальным n. Поскольку $\frac{|f_i|}{|g_i|} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{|f_i|}{|g_i|} < |e^*| \leqslant 1$, по свойству 5 $\frac{|f_i\cdot h|}{|g_i\cdot h|} = \frac{\min(|f_i|,|h|)}{\min(|g_i|,|h|)} \geqslant \frac{|f_i|}{|g_i|}$. Поэтому мы можем счи тать все дроби $\frac{f_i}{g_i}$ $(i=1,\dots,n)$ несократимыми. Отсюда также следует, что $n>1$.

Пусть $|g_1|\geqslant|g_2|\geqslant\dots\geqslant|g_n|$. Из $e^*=\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{g_i}$ следует, что существует такое $m\in R$, что $f_n\cdot g_1\cdot\dots\cdot g_{n-1}=m\cdot g_n$. Так как кольцо R факториально и дробь f_n/g_n несократима, то g_n делит произведение $g_1\cdot\dots\cdot g_{n-1}$. По свойству 5 $|g_n|\geqslant$ $\geqslant|g_1\cdot\dots\cdot g_{n-1}|=\min(|g_1|,\dots,|g_{n-1}|)=|g_{n-1}|$. Значит, $|g_n|=|g_{n-1}|$.

$$\frac{f_{n-1}}{g_{n-1}}+\frac{f_n}{g_n}=\frac{f_{n-1}g_n+f_n g_{n-1}}{g_{n-1}g_n}\ \text{и}\ \frac{|f_{n-1}g_n+f_n g_{n-1}|}{|g_{n-1}g_n|}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|f_{n-1}g_n|}{|g_{n-1}g_n|}+\frac{|f_n g_{n-1}|}{|g_{n-1}g_n|}\leqslant\frac{|f_{n-1}|}{|g_{n-1}|}+\frac{|f_n|}{|g_n|}.$$

Значит, $e^*=\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{g_i}+\frac{f_{n-1}g_n+f_n g_{n-1}}{g_{n-1}g_n}$ и $|e^*|>\sum_{i=1}^{n}\frac{|f_i|}{|g_i|}\geqslant$ $\geqslant\sum_{i=1}^{n-2}\frac{|f_i|}{|g_i|}+\frac{|f_{n-1}g_n+f_n g_{n-1}|}{|g_{n-1}g_n|}$, что противоречит выбору n. Лемма 2 доказана.

Доказательство свойства I2. Пусть $f\in R$. Так как $f=\frac{f}{1}$, то $\|f\|\leqslant\frac{|f|}{|1|}=|f|$. Обратное неравенство $\|f\|\geqslant|f|$ следует из леммы 2.

Доказательство свойства I3. Из свойств 8 – II вытекает, что $I=\{f\in P:\|f\|=0\}$ идеал в P. Поскольку $\|1\|=|1|=1$, то $1\notin I$, а так как в поле P нет нетривиальных идеалов, то $I=\{0\}$, что и требовалось.

Положим $d(f,g)=\|f-g\|$ для любых $f,g\in P$. Из свойств 8 – – II, I3 следует, что d – метрика на P, превращающая P в отделимое топологическое кольцо, а из свойства I2 следует, что пространство $(R,\tilde{\rho})$ /а ввиду свойства 7 и (X,ρ)/ изометрично вложено в пространство (P,d). Осталось доказать непрерывность операции $x\mapsto x^{-1}$ в пространстве $(P\setminus\{0\},d)$.

Пусть $f\in P$, $\varepsilon,\delta\in\mathbb{R}$. Положим $f\in W_\delta$ в том и только в том случае, если f допускает представление в виде $f=$ $=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{a_i}{b_i}\right)$, где $a_i,b_i\in R$ $(i=1,\dots,n)$ и $\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|}{|b_i|}<\delta$.

Пусть $V_\varepsilon = \{ f \in P : \| f \| < \varepsilon \}$.

Лемма 3. Базисы $\{ W_\delta : \delta \in \mathbb{R} \}$ и $\{ 1 + V_\varepsilon : \varepsilon \in \mathbb{R} \}$ порождают один и тот же фильтр в P.

Доказательство леммы 3. Пусть $\varepsilon < 1$, $f \in 1 + V_\varepsilon$, $f = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}$, $a_i, b_i \in R$, $i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|}{|b_i|} < \varepsilon$ и

$$|b_1| \geq |b_2| \geq \dots \geq |b_n|. \tag{4}$$

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1 + \sum_{i=1}^{j} \frac{a_i}{b_i}}{1 + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{a_i}{b_i}} \right) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{\frac{a_j}{b_j}}{1 + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{a_i}{b_i}} \right). \tag{5}$$

Покажем, что $1 + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{a_i}{b_i} = \frac{h_j}{b_1 \cdot \ldots \cdot b_{j-1}} \neq 0$ при всех $j \leq n$.

Из $\frac{h_j}{b_1 \cdot \ldots \cdot b_{j-1}} + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(-a_i)}{b_i} = 1$ и леммы 2 следует, что

$$\frac{|h_j|}{|b_1 \cdot \ldots \cdot b_{j-1}|} \geq 1 - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{|-a_i|}{|b_i|} \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|}{|b_i|} > 1 - \varepsilon > 0. \tag{6}$$

Следовательно, $h_j \neq 0$ и все наши тождественные преобразования законны. Приведем /5/ к виду

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} = \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{a_j \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot b_{j-1}}{b_j \cdot h_j} \right).$$

Ввиду /4/ и /6/ $\sum_{j=1}^{n} \frac{|a_j \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot b_{j-1}|}{|b_j \cdot h_j|} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\min(|a_j|, |b_1 \cdot \ldots \cdot b_{j-1}|)}{\min(|b_j|, |h_j|)} \leq$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\min(|a_j|, |b_1 \cdot \ldots \cdot b_{j-1}|)}{\min(|b_j|, (1-\varepsilon) \cdot |b_1 \cdot \ldots \cdot b_{j-1}|)} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\min(|a_j|, |b_{j-1}|)}{\min(|b_j|, |b_{j-1}|)} \leq$$

$\leq \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_j|}{|b_j|}$, откуда $1 + V_\varepsilon \subset W_{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}$.

Обратно, пусть $f = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{a_i}{b_i} \right) \in W_\delta$, $a_i, b_i \in R$, $i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|}{|b_i|} < \delta$ и выполнено /4/.

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{a_i}{b_i} \right) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{j} \left(1 + \frac{a_i}{b_i} \right) - \prod_{i=1}^{j-1} \left(1 + \frac{a_i}{b_i} \right) \right) =$$

$$=1+\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{b_j}\cdot\prod_{i=1}^{j-1}\left(1+\frac{a_i}{b_i}\right)=1+\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{k_j}$$, где $m_j, k_j\in R$, m_j делится на a_j, $k_j=b_1\cdot\ldots\cdot b_j$. Тогда $\sum_{j=1}^{n}\frac{|m_j|}{|k_j|}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{|a_j|}{|b_1\cdot\ldots\cdot b_j|}=$ $=\sum_{j=1}^{n}\frac{|a_j|}{|b_j|}<\delta$, то есть $W_\delta\subset 1+V_\delta$. Лемма 3 доказана.

В силу леммы 3 для доказательства непрерывности операции $x\mapsto x^{-1}$ в поле (P,d) достаточно доказать ее непрерывность в 1 по отношению к фильтру окрестностей 1, задаваемому базисом $\{W_\delta:\delta\in\mathbb{R}\}$.

Пусть $\frac{|a|}{|b|}\leqslant\varepsilon<\frac{1}{2}$; $\frac{1}{1+a/b}=1+\frac{(-a)}{a+b}$. Покажем, что $\frac{|-a|}{|a+b|}\leqslant 2\varepsilon$. Для этого установим, что $|b|\leqslant 2\cdot|a+b|$. Действительно, иначе $\frac{|b|}{2}>|a+b|\geqslant|b|-|a|$, откуда $|a|>\frac{|b|}{2}$ и $\frac{|a|}{|b|}>\frac{1}{2}>\varepsilon$, противоречие. Теперь $\frac{|-a|}{|a+b|}=\frac{|a|}{|a+b|}\leqslant$ $\leqslant\frac{\varepsilon\cdot|b|}{|a+b|}\leqslant 2\varepsilon$, что и требовалось.

Пусть теперь $f=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{a_i}{b_i}\right)\in W_\delta$, $a_i, b_i\in R$, $i=1,\ldots,n$, $\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|}{|b_i|}<\delta<\frac{1}{2}$. Тогда $f^{-1}=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{a_i}{b_i}\right)^{-1}=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{(-a_i)}{a_i+b_i}\right)$ и по доказанному $\sum_{i=1}^{n}\frac{|-a_i|}{|a_i+b_i|}\leqslant 2\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|}{|b_i|}<2\delta$, то есть $W_\delta^{-1}\subset W_{2\delta}$. Непрерывность операции $x\mapsto x^{-1}$, а с ней и предложение I полностью доказаны.

Пусть $\{\mathcal{T}_\alpha:\alpha\in A\}$ – семейство топологий на множестве X. Через $\vee\{\mathcal{T}_\alpha:\alpha\in A\}$ будем обозначать верхнюю грань семейства топологий $\{\mathcal{T}_\alpha:\alpha\in A\}$ – топологию, предбазу которой образует семейство всех подмножеств множества X, открытых хотя бы в одной топологии семейства $\{\mathcal{T}_\alpha:\alpha\in A\}$ [3].

<u>Лемма 4</u>. Пусть пространство $(X,\mathcal{T})$ уплотняется на метрическое пространство $(X,\mathcal{T}^*)$. Тогда $\mathcal{T}=\vee\{\mathcal{T}_\alpha:\alpha\in A\}$, где все топологии $\mathcal{T}_\alpha$ метризуемы и $|A|\leqslant w(X,\mathcal{T})$.

<u>Доказательство</u> леммы 4. Зафиксируем такую базу $\mathcal{B}$ топологии $\mathcal{T}$, что $|\mathcal{B}|\leqslant w(X,\mathcal{T})$. Положим $\mathcal{E}=\{(U,V)\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}:U\subset V$ и существует непрерывная функция $\varphi_{(U,V)}:(X,\mathcal{T})\to[0,1]$ такая, что $U\subset\varphi^{-1}_{(U,V)}(0)$ и $X\setminus V\subset\varphi^{-1}_{(U,V)}(1)\}$. Для всех $(U,V)\in\mathcal{E}$

зафиксируем функцию $\varphi_{(U,V)}$, участвующую в определении множества $\mathcal{E}$. Поскольку пространство $(X,\mathcal{T})$ тихоновское, то семейство функций $\{\varphi_{(U,V)}:(U,V)\in\mathcal{E}\}$ разделяет точки от замкнутых множеств [3].

Пусть пространство $(X,\mathcal{T}^*)$ метризуемо метрикой ρ. Для каждой пары $(U,V)\in\mathcal{E}$ определим метрику $d_{(U,V)}$ на X по правилу $d_{(U,V)}(x,y)=\rho(x,y)+|\varphi_{(U,V)}(x)-\varphi_{(U,V)}(y)|$. Через $\mathcal{T}_{(U,V)}$ обозначим топологию на X, порождаемую метрикой $d_{(U,V)}$. Тогда $\mathcal{T}=\vee\{\mathcal{T}_{(U,V)}:(U,V)\in\mathcal{E}\}$ и $|\mathcal{E}|\leq w(X,\mathcal{T})$.

Доказательство теоремы I. 1/ Пусть пространство $(Y,\mathcal{T})$ уплотняется на метрическое пространство. Обозначим через $(X,\mathcal{T}_0)=(Y,\mathcal{T})\oplus I$ дизъюнктную сумму пространства $(Y,\mathcal{T})$ и отрезка $I=[0,1]$ в обычной топологии [3]. Тогда $(X,\mathcal{T}_0)$ также уплотняется на метрическое пространство и по лемме 4 существует семейство $\{\mathcal{T}_\alpha:\alpha\in A\}$ метризуемых топологий на множестве X такое, что $\mathcal{T}_0=\vee\{\mathcal{T}_\alpha:\alpha\in A\}$ и $|A|\leq w(X,\mathcal{T}_0)\leq \leq w(Y,\mathcal{T})+\aleph_0\leq w(Y,\mathcal{T})$. Пусть поле P то же, что и в предложении I. Пользуясь предложением I, для каждого $\alpha\in A$ строим метризуемую полевую топологию $\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha$ на P такую, что $\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha|_X=\mathcal{T}_\alpha$. Тогда $\widetilde{\mathcal{T}}_0=\vee\{\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha:\alpha\in A\}$ - полевая топология на P и $\widetilde{\mathcal{T}}_0|_X=\vee\{\mathcal{T}_\alpha:\alpha\in A\}=\mathcal{T}_0$.

2/ Пусть теперь $(Y,\mathcal{T})$ уплотняется на метризуемый компакт. Тогда $(X,\mathcal{T}_0)=(Y,\mathcal{T})\oplus I$ также уплотняется на метризуемый компакт $(X,\mathcal{T}^*)$. Пользуясь пунктом 1/, строим полевую топологию $\widetilde{\mathcal{T}}$ на P такую, что $\widetilde{\mathcal{T}}|_X=\mathcal{T}_0$. Используя предложение I, определим метризуемую полевую топологию $\widetilde{\mathcal{T}^*}$ на P такую, что $\widetilde{\mathcal{T}^*}|_X=\mathcal{T}^*$. Пусть $\widetilde{\mathcal{T}}_0=\vee\{\widetilde{\mathcal{T}},\widetilde{\mathcal{T}^*}\}$. Тогда $\widetilde{\mathcal{T}}_0$ - полевая топология на P и $\widetilde{\mathcal{T}}_0|_X=\vee\{\mathcal{T}_0,\mathcal{T}^*\}=\mathcal{T}_0$. Так как $(X,\mathcal{T}^*)$ - компакт, то множество X замкнуто в пространстве $(P,\widetilde{\mathcal{T}^*})$ и тем более замкнуто в пространстве $(P,\widetilde{\mathcal{T}}_0)$ с более сильной топологией $\widetilde{\mathcal{T}}_0$. Так как $(Y,\mathcal{T})$ замкнуто в $(X,\mathcal{T}_0)$, то множество Y замкнуто также и в пространстве $(P,\widetilde{\mathcal{T}}_0)$.

3/ Поскольку выбор поля K в предложении I в наших руках, то выбирая в качестве K поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел или поле $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ вычетов по модулю p /для простых p /, мы можем изменять характеристику поля P по нашему усмотрению.

По построению в пунктах I/ - 2/ $\widetilde{\mathcal{T}_0} = \vee\{\widetilde{\mathcal{T}_\alpha} : \alpha \in A\}$, где все топологии $\widetilde{\mathcal{T}_\alpha}$ метризуемы и $|A| \leq w(Y,\mathcal{T})$. Поэтому $w(P,\widetilde{\mathcal{T}_\alpha}) = nw(P,\widetilde{\mathcal{T}_\alpha}) \leq nw(X,\mathcal{T}_0)\cdot|K| \leq nw(Y,\mathcal{T})\cdot\aleph_0 = nw(Y,\mathcal{T})$ и $w(P,\widetilde{\mathcal{T}_0}) \leq |A|\cdot\sup\{w(P,\widetilde{\mathcal{T}_\alpha}) : \alpha\in A\} \leq |A|\cdot w(Y,\mathcal{T}) \leq w(Y,\mathcal{T})$ и, следовательно, $w(P,\widetilde{\mathcal{T}_0}) = w(Y,\mathcal{T})$. Поскольку поле $(P,\widetilde{\mathcal{T}_0})$ содержит связное неодноточечное множество I, то оно само связно. Теорема I полностью доказана.

§ 2. Следствия из теоремы о вложении.

Из предложения I непосредственно вытекает

Следствие I. Пусть (X,ρ) - метрическое пространство и метрика ρ ограничена. Тогда пространство (X,ρ) изометрично вкладывается в связное метризуемое /метрикой d / топологическое поле (P,d) любой характеристики.

Следствие I усиливает теорему В.В.Успенского: всякое метрическое пространство вкладывается в качестве подпространства в метризуемое поле бесконечной характеристики.

Поскольку любое пространство со счетной сетью уплотняется на пространство со счетной базой /и, следовательно, метризуемое/ [3] , то из теоремы I вытекает

Следствие 2. Каждое пространство со счетной сетью /в частности, любое счетное пространство/ вкладывается в связное топологическое поле P любой характеристики. При этом поле P также будет иметь счетную сеть.

Паракомпакт с диагональю G_δ уплотняется на метрическое пространство [3] , откуда получаем

Следствие 3. Паракомпактное пространство с диагональю G_δ вкладывается в качестве подпространства в связное топологическое поле любой характеристики.

Бикомпактное /и даже псевдокомпактное/ подпространство топологического поля всегда метризуемо [9] . Для локально бикомпактных пространств это не верно, как показывает

Следствие 4. Локально бикомпактное подпространство топологического поля не обязано быть металинделефовым /и тем более не обязано быть ни паракомпактным, ни метризуемым/.

Доказательство. Пусть Q - множество рациональных чисел из отрезка $I=[0,1]$. Для каждой точки $a \in I \setminus Q$ зафиксируем какую-либо последовательность $\{\xi_n(a): n \in \mathcal{N}\} \subset Q$, сходящуюся к точке a в обычной топологии $\mathcal{T}^*$ отрезка. Определим топологию $\mathcal{T}$ на множестве I следующим образом. Все точки множества Q объявим изолированными в $\mathcal{T}$, а за базу системы окрестностей точки $a \in I \setminus Q$ в топологии $\mathcal{T}$ примем систему $\{U_n(a): n \in \mathcal{N}\}$, где $U_n(a) = \bigcup\{\xi_i(a): i \geq n\} \cup \{a\}$. Пространство $(I, \mathcal{T})$ локально бикомпактно, сепарабельно и не имеет счетной базы. В частности, $(I, \mathcal{T})$ не метризуемо. Поскольку металинделефово локально метризуемое пространство метризуемо [3] , а $(I, \mathcal{T})$ - локально метризуемо, то $(I, \mathcal{T})$ не является металинделефовым. Наконец, пространство $(I, \mathcal{T})$ уплотняется на метризуемый компакт $(I, \mathcal{T}^*)$ и по теореме I $(I, \mathcal{T})$ вкладывается в качестве замкнутого подпространства в некоторое топологическое поле P . Следствие 4 доказано.

Введем класс пространств $\mathcal{K}$. Положим $X \in \mathcal{K}$ в том и только в том случае, когда в пространстве X есть хоть одно счетное незамкнутое подмножество. Из теоремы I и предложения I.7.10 из [I] вытекает

Теорема 2. Для пространства X из класса $\mathcal{K}$ следующие условия равносильны:

I/ X уплотняется на метрическое пространство.

2/ X вкладывается в качестве подпространства в некоторое топологическое поле.

Отметим, что теорема 2 остается справедливой для более широкого класса пространств /см. теорему 9 из [9] /.

Все паракомпактные p-пространства /см. [3] / принадлежат классу $\mathcal{K}$. Если паракомпактное p-пространство уплотняется на метрическое , то оно само метризуемо [3] .

Поэтому из теоремы 2 получаем

Следствие 5. Паракомпактное ρ-пространство вкладывается в некоторое топологическое поле в качестве подпространства тогда и только тогда, когда оно метризуемо.

Поскольку любой бикомпакт является паракомпактным ρ-пространством [3], то из следствия 5 непосредственно получаем

Следствие 6. Бикомпакт метризуем в том и только в том случае, когда он вкладывается в качестве подпространства в некоторое топологическое поле.

Теорема 3. Пусть пространство X таково, что: I/ $\ell(X^n)=\aleph_0$ для любого $n\in\mathcal{N}$; 2/ X уплотняется на метрическое пространство /на метризуемый компакт/. Тогда X вкладывается в качестве подпространства /в качестве замкнутого подпространства/ в такое топологическое поле P, что $\ell(P^n)=\aleph_0$ для любого $n\in\mathcal{N}$.

Доказательство. Пользуясь 2/ и теоремой I, вложим X в топологическое поле P в качестве подпространства /в качестве замкнутого подпространства/. Рассмотрим непрерывные отображения $\varphi^+: P\times P\to P$, $\varphi^-: P\to P$, $\varphi^\times: P\times P\to P$, $\varphi^{-1}: P\setminus\{0\}\to P\setminus\{0\}$, определяемые по правилам $\varphi^+(x,y)=x+y$, $\varphi^-(x)=-x$, $\varphi^\times(x,y)=x\cdot y$, $\varphi^{-1}(x)=x^{-1}$. Положим $X_1=X$. Если X_n уже определено, то пусть $X_{n+1}=\varphi^+(X_n\times X_n)\cup\varphi^-(X_n)\cup\varphi^\times(X_n\times X_n)\cup\varphi^{-1}(X_n\setminus\{0\})$. Положим $P^*=\bigcup\{X_n: n\in\mathcal{N}\}$. Тогда P^* - искомое топологическое поле. Покажем, что $\ell((P^*)^k)=\aleph_0$ для любого $k\in\mathcal{N}$. Поскольку $(P^*)^k=\bigcup\{(X_n)^k: n\in\mathcal{N}\}$, то достаточно показать, что при всех $k,n\in\mathcal{N}$ $\ell((X_n)^k)=\aleph_0$. Докажем это индукцией по n.

Ввиду I/ $\ell((X_1)^k)=\ell(X^k)=\aleph_0$ для любого $k\in\mathcal{N}$. Пусть $\sup\{\ell((X_n)^k): k\in\mathcal{N}\}=\aleph_0$. Докажем, что $\sup\{\ell((X_{n+1})^k): k\in\mathcal{N}\}=\aleph_0$. Из построения теоремы I вытекает, что $\psi(P)=\aleph_0$, поэтому $X_n\setminus\{0\}=\bigcup\{F_{n,m}: m\in\mathcal{N}\}$, где все $F_{n,m}$ замкнуты в X_n. Значит, $(X_{n+1})^k=M^k\cup\bigcup\{M^s\times\Phi_{n,m_1}\times\ldots\times\Phi_{n,m_{k-s}}: 0<s<k, (m_1,\ldots,m_{k-s})\in\mathcal{N}^{k-s}\}\cup\bigcup\{\Phi_{n,m_1}\times\ldots\times\Phi_{n,m_k}:$

$(m_1,\dots,m_k)\in\mathcal{N}^k\}$, где $M=\varphi^+(X_n\times X_n)\cup\varphi^-(X_n)\cup\varphi^\times(X_n\times X_n)$, $\Phi_{n,m}=\varphi^{-1}(F_{n;m})$. Все множества вида M^k, $M^S\times\Phi_{n,m_1}\times\dots\times\Phi_{n,m_{k-s}}(0<S<K)$, $\Phi_{n,m_1}\times\dots\times\Phi_{n,m_k}$ суть непрерывные образы замкнутых подмножеств конечных степеней X_n и из индуктивного предположения вытекает, что все указанные множества линделефовы. Так как $(X_{n+1})^k$ есть объединение счетного числа множеств такого вида, то $\ell((X_{n+1})^k)=\aleph_0$ для любого $k\in\mathcal{N}$.

Следствие 7. Существуют: I/ топологическое поле P, для которого $d(P)=\aleph_0$, но $nw(P)=\ell(P)=|P|=2^{\aleph_0}$; 2/ топологическое поле P такое, что $\ell(P^n)=\aleph_0$ при всех $n\in\mathcal{N}$, но $\ell(P^{\aleph_0})>\aleph_0$ /в частности, P не имеет счетной сети/.

Доказательство. Для доказательства I/ достаточно вложить плоскость Немыцкого Z в топологическое поле P' в качестве замкнутого подпространства и взять наименьшее подполе P поля P', содержащее Z. Поле P будет искомым.

2/ В [8] построено пространство X со следующими свойствами: а/ X уплотняется на метризуемый компакт; б/ $\ell(X^n)=\aleph_0$ при всех $n\in\mathcal{N}$; в/ $\ell(X^{\aleph_0})>\aleph_0$. Пользуясь теоремой 3, вложим X в качестве замкнутого подпространства в топологическое поле P такое, что $\ell(P^n)=\aleph_0$ при всех $n\in\mathcal{N}$. Так как $X^{\aleph_0}$ замкнуто в $P^{\aleph_0}$, то $nw(P)\geqslant\ell(P^{\aleph_0})\geqslant\ell(X^{\aleph_0})>\aleph_0$.

§ 3. Аксиомы отделимости в топологических полях.

Плоскость Немыцкого /см. [3] / уплотняется на метризуемый компакт и ввиду теоремы I она вкладывается в качестве замкнутого подпространства в топологическое поле P /произвольной характеристики/. Так как плоскость Немыцкого не является нормальным пространством и нормальность наследуется замкнутыми подпространствами, то отсюда, в частности, вытекает

Теорема 4. Существует топологическое поле /произвольной характеристики/, пространство которого не нормально.

Теорема 4 является решением проблемы I.3.6 из [I].

Теорема 5. Существует топологическое поле, пространство которого нормально /даже линделефово/, но не является наследственно нормальным.

Доказательство. Возьмем пространство X со следующими свойствами: I/ $l(X^n)=\aleph_0$ для всех $n\in\mathcal{N}$; 2/ X уплотняется на метрическое пространство; 3/ X не является наследственно нормальным /такое пространство можно получить, например, с помощью конструкции в [8] /. Применим теорему 3 и вложим X в качестве подпространства в линделефово топологическое поле P, которое не будет наследственно нормальным ввиду 3/. Теорема 5 доказана.

Автор искренне благодарен профессору А.В.Архангельскому за полезные обсуждения и постоянное внимание к работе.

Литература

[I] АРНАУТОВ В.И., ВОДИНЧАР М.И., МИХАЛЕВ А.В. Введение в теорию топологических колец и модулей. Кишинев, изд. "Штиинца", I98I.

[2] АРХАНГЕЛЬСКИЙ А.В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты. - Успехи математических наук, I978, т. 33, № 6, с. 29 - 84.

[3] АРХАНГЕЛЬСКИЙ А.В., ПОНОМАРЕВ В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. Москва, "Наука", I974.

[4] BERGMAN G.M., WATERMAN A.G. Connected fields of arbitrary characteristic. - Journal of mathematic of Kyoto University, 1966, v. 5, N 2, p. 177 - 184.

[5] МАЛЬЦЕВ А.И. Свободные топологические алгебры. - Известия Академии наук СССР, сер. матем., I957, т. 2I, № 2, с. I7I - I98.

[6] МАРКОВ А.А. О свободных топологических группах. - Доклады Академии наук СССР, I94I, т. 3I, № 4, с. 299-30I.

[7] МУТЫЛИН А.Ф. О вложении дискретных полей в связные. - Доклады Академии наук СССР, I966, т. I68, № 5, с. I005 - I008.

[8] PRZYMUSIŃSKI T. Normality and paracompactness of finite and countable cartesian products. - Fundamenta mathematicae, 1980, v. 105, N 2, p. 87 - 104.

[9] ШАХМАТОВ Д.Б. Кардинальные инварианты топологических полей. - Доклады Академии наук СССР, I983 /в печати/.

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет
Ленинские горы, II7234, Москва, СССР

(Oblatum 29.6. 1983)