Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

Об арифметической сложности дифференцирования в конструктивной математике

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 24 (1983), No. 2, 301--316

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106228

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

24,2 (1983)

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В КОНСТРУКТИВНОЙ МАТЕМАТИКЕ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH)

Содержание: В заметке изучается арифметическая сложность дифференцирования всюду определенных [0]-конструктивных функций действительной переменной ([0]- КФДП) на арифметических действительных числах (АДЧ). Исследуется, каким способом эта сложность меняется, если мы исключим из рассмотрения

а) [0]-КФДП, которые не являются эффективно (соотв. классически) равномерно непрерывными, и (соотв. или)

б) множества АДЧ малой меры.

Ключевые слова: Конструктивные функции действительной переменной, арифметические действительные числа, верхние и нижние псевдопроизводные, арифметическая сложность.

Классификация: 03F65, 26A24, 03D30

На основании результатов из [8] в заметке доказан для всюду определенных [0]-конструктивных функций действительной переменной и арифметических действительных чисел аналог теоремы Данжуа о производных числах. На этой основе и на основе теоремы 1 из [6] исследуется арифметическая сложность основных задач, связанных с псевдодифференцируемостью (т.е. дифференцируемостью в классическом смысле). На примерах показано, что полученные результаты нельзя улучшить.

В следующем мы пользуемся без дальнейших ссылок определениями и обозначениями из [7] и [8] - в частности - перечисленными там переменными. Определения основных понятий конструктивного математического анализа содержатся, например, в [1].

Для всякого натурального числа (НЧ) n $D^{[n]}$-множество всех $[n]$-конструктивных действительных чисел ($[n]$-КДЧ), т.е. кодов действительных чисел рекурсивных относительно $\emptyset^{(n)}$, $D^{[n]} \subseteq D^{[n+1]}$, ${}^{*}D^{[n]}$ -обозначает $D^{[n]}$ расширенное на $-\infty$ и $+\infty$, а $\mathcal{A}$ - множество всех АДЧ - равно $\bigcup\limits_{m} D^{[m]}$.

$[n]$-отображениями мы называем отображения (слов в слова) эффективные относительно $\emptyset^{(n)}$ (см. [1], стр. 33).

Множество АДЧ $\mathfrak{M}$ мы назовем правильным, если верно

$\forall XY\,(X = Y \supset (X \in \mathfrak{M} \equiv Y \in \mathfrak{M}))$.

В следующем, когда мы говорим о множествах АДЧ, мы имеем в виду правильные множества.

Как мы отметили в [7], релятивизацией результатов из [3] мы получаем для любого НЧ n понятия $[n]$-измеримости (правильных) множеств АДЧ и $[n]$-меры (т.е. измеримости и меры эффективных относительно $\emptyset^{(n)}$). Для всяких НЧ n, $[n]$-КДЧ ϑ и $[n]$-измеримого множества АДЧ $\mathfrak{M}$ $[n]$-меры меньшей чем ϑ существует (т.е. можно построить) НЧ t такое, что $\mathfrak{M} \subseteq [W_t^{[n]}]$ и $[W_t^{[n]}]$ $[n]$-измеримое множество $[n]$-меры меньшей чем ϑ.

Для любых НЧ n и m, $n \leq m$, существует $\emptyset^{(m)}$-частично рекурсивный словарный предикат R такой, что

$$\forall x^{[m]} t\,(R(x^{[m]} \square t) \equiv x^{[m]} \in [W_t^{[n]}])$$

(см. теорему 2.3 и предикат $Less_m$ из [1]).

[0]-функциями мы называем всюду определенные [0]-КФДП, т.е. [0]-операторы типа $(D^{[0]} \longrightarrow D^{[0]})$ (см. [1], стр. 33), которые являются постоянными на $\wedge x^{[0]}\,(x^{[0]} \leq 0)$ и на $\wedge x^{[0]}\,(1 \leq x^{[0]})$.

Следует напомнить, что а) всякая монотонная [0]-функция является [0]-равномерно непрерывной ([0]-РН) и б) функция является псевдоравномерно непрерывной, т.е. РН в классическом смысле, тогда и только тогда когда она [1]-РН.

Замечание 1. Пусть $\mathcal{F}$ всюду определенная [0]-КФДП и X и У АДЧ.

1) Согласно теореме 2.8 из [1] и лемме 1.3 из [2] существуют $\emptyset^{(\omega)}$-операторы $\underline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}]$ и $\overline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}]$ и для всякого НЧ m $[m+3]$-операторы $\underline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}; 0, m]$ и $\overline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}; 0, m]$ типа $(\mathrm{D}^{[m]} \longrightarrow {}^*\mathrm{D}^{[m+2]})$ такие, что для любого НЧ m $\underline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}]$ и $\overline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}]$ являются операторами типа $(\mathrm{D}^{[m]} \longrightarrow {}^*\mathrm{D}^{[m+2]})$ и для всякого $[m]$-КДЧ $x^{[m]}$

$$\underline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}](x^{[m]}) \text{ и } \underline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}; 0, m](x^{[m]})$$

(соотв. $\overline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}](x^{[m]})$ и $\overline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}; 0, m](x^{[m]})$) являются значениями нижней (соотв. верхней) псевдопроизводной [0]-КФДП $\mathcal{F}$ в (точке) $x^{[m]}$.

2) Пусть $v \triangle w$ [0]-сегмент и ℓ, m, n, p и q НЧ. Мы определим $\triangle(\mathcal{F}, v \triangle w) \rightleftharpoons (\mathcal{F}(w) - \mathcal{F}(v))$,

$$\mathcal{Q}(\mathcal{F}, \ell) \rightleftharpoons (\triangle(\mathcal{F}, \mathcal{L}(\ell)) / |\mathcal{L}(\ell)|),$$

$$\mathfrak{D}(\mathcal{F}, X, m, p) \rightleftharpoons \forall t_0 t_1 (X \in \mathcal{L}^0(t_0) \,\&\, X \in \mathcal{L}^0(t_1) \,\&\, |\mathcal{L}(t_0)| < 2^{-p} \,\&\, |\mathcal{L}(t_1)| < 2^{-p} \supset |\mathcal{Q}(\mathcal{F}, t_0) - \mathcal{Q}(\mathcal{F}, t_1)| \leq 2^{-m}),$$

$$\overline{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}, X, n, q) \rightleftharpoons \forall k (!\langle q \rangle^{[n]}(k) \,\&\, \mathfrak{D}(\mathcal{F}, X, k, \langle q \rangle^{[n]}(k)))$$

(т.е. $\overline{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}, X, n, q)$ значит: $[n]$-ОРФ $\langle q \rangle^{[n]}$ является регулятором дифференцируемости $\mathcal{F}$ в X).

3) Пусть m и n НЧ. а) Мы определим

$$\mathrm{D}_{\text{кл}}(\mathcal{F}, X) \rightleftharpoons (-\infty < \underline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}](X) = \overline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}](X) < +\infty),$$

$$\mathrm{D}_{\text{кл}}(Y, \mathcal{F}, X) \rightleftharpoons (\mathrm{D}_{\text{кл}}(\mathcal{F}, X) \,\&\, \underline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}](X) = Y),$$

$\mathcal{D}^{[m]}(\mathcal{F}, X) \rightleftharpoons \exists q\, \overline{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}, X, n, q)$ и

$\mathcal{D}^{[m]}(Y, \mathcal{F}, X) \rightleftharpoons (\mathcal{D}^{[m]}(\mathcal{F}, X) \,\&\, \underline{\mathcal{D}}[\mathcal{F}](X) = Y)$.

Если верно $\mathcal{D}_{Кл}(\mathcal{F}, X)$ (соотв. $\mathcal{D}^{[m]}(\mathcal{F}, X)$), то мы скажем, что $\mathcal{F}$ является (конечно) псевдодифференцируемой (соотв. $[m]$-дифференцируемой) в X.

Выполнено $\mathcal{D}_{Кл}(\mathcal{F}, X) \equiv \forall k \neg\neg \exists p\, \mathfrak{D}(\mathcal{F}, X, k, p)$ и

$\forall x^{[m]}(\mathcal{D}^{[m]}(\mathcal{F}, x^{[m]}) \supset$

$\supset \exists y^{[max(n,m)]}\mathcal{D}^{[m]}(y^{[max(n,m)]}, \mathcal{F}, x^{[m]}))$.

б) Существует $[0]$-отображение $\widehat{\mathcal{E}}_m$ типа $(\mathcal{D}^{[m]} \longrightarrow N)$ такое, что для всякого $[m]$-КДЧ $x^{[m]}$ верно

$\forall k(\langle \widehat{\mathcal{E}}_m(x^{[m]})\rangle^{[m+1]}(k) \simeq \mu t\, \mathfrak{D}(\mathcal{F}, x^{[m]}, k, t))$

и, следовательно, $\mathcal{D}_{Кл}(\mathcal{F}, x^{[m]}) \supset \overline{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}, x^{[m]}, m+1, \widehat{\mathcal{E}}_m(x^{[m]}))\,\&$ $\exists y^{[m+1]}\mathcal{D}^{[m+1]}(y^{[m+1]}, \mathcal{F}, x^{[m]})$.

4) Можно построить НЧ $\hat{t}$ такое, что для всякого НЧ k

$W_{s_1^1(\hat{t},k)} = \{\ell \mid |\mathcal{L}(\ell)| \le 2^{-k} \,\&\, Q(\mathcal{F}, \ell) > 2^{k}\}$

и, следовательно, $W_{s_1^1(\hat{t},k+1)} \subseteq W_{s_1^1(\hat{t},k)}$,

(1) $\forall X(\overline{\mathcal{D}}[\mathcal{F}](X) = +\infty \equiv X \in \bigcap_s [W_{s_1^1(\hat{t},s)}])$

и, если $\mathcal{F}$ $[0]$-функция, то $\forall s([W_{s_1^1(\hat{t},s)}] \subseteq -2^{-s} \triangledown (1+2^{-s}))$

и $\bigcap_s [W_{s_1^1(\hat{t},s)}]$ $[2]$-измеримое множество АДЧ.

<u>Замечание 2</u>. 1) Согласно замечанию 1 из [7] $\langle z\rangle$ ОРФ, для всякого НЧ k $[1]$-мера $[W_{\langle z\rangle(k)}]$ меньше чем 2^{-k}, $\mathcal{A}_1$, т.е. $\bigcap_s [W_{\langle z\rangle(s)}]$, множество АДЧ типа $G_\delta^{[0]}$ $[1]$-меры нуль, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_1$.

2) В следующем мы будем - без дальнейших ссылок - пользоваться обозначениями из теоремы 6 из [8]. Мы напомним, что

$\overline{\varphi}$ [1]-ОРФ, для всякого НЧ p $\mathcal{T}_{\psi_p}$ [1]-измеримое [1]-открытое множество [1]-меры не большей чем 2^{-p},

$D^{[0]} \subseteq [W_{\langle z\rangle(p+2)}] \subseteq \mathcal{T}_{\psi_p} \& \mathcal{T}_{\psi_{p+1}} \subseteq \mathcal{T}_{\psi_p}$, $\mathcal{T}_{\psi} = \bigcap_k \mathcal{T}_{\psi_k}$

и, следовательно, $\mathcal{T}_{\psi}$ [1]-измеримое множество АДЧ типа $G_{\sigma}^{[1]}$ [1]-меры нуль.

3) Пусть $\overline{g}$ [1]-ОРФ такая, что

$$\forall t k (\overline{g}(t,k) \simeq g_2(f_1(t,k), f_1(t,k))),$$

где g_2 [1]-ОРФ и f_1 ОРФ из доказательства теоремы 6 из [8]. На основании этого доказательства ясно, что для всяких НЧ t, p, k и ℓ, где $p \leq k$, и АДЧ X выполнено

а) $$[\mathcal{D}_{\overline{g}(t,k)}]_c \subseteq [W_t] \cap (-2^{f_1(t,k)+1} \nabla 2^{f_1(t,k)+1}) \subseteq [\mathcal{D}_{\overline{g}(t,k)}]_c \hat{\cup} \mathcal{T}_{\psi_p},$$

б) если верно $|X| \leq 2^k \& X \in \mathcal{L}(\ell) \& |\mathcal{L}(\ell)| < 2^{-\overline{\varphi}(t,k)} \& \& \neg(X \in \mathcal{T}_{\psi_p})$, то

$$X \in [W_t] \equiv \mathcal{L}(\ell) \cap [\mathcal{D}_{\overline{g}(t,k)}]_c \neq \emptyset \equiv \mathcal{L}(\ell) \subseteq [\mathcal{D}_{\overline{g}(t,k)}].$$

<u>Замечание 3</u>. 1) Для всякого НЧ t мы определим $\mathcal{P}_t \rightleftharpoons \bigcap_k [W_{s_1^1(t,k)}]$. Согласно рассуждениям, приведенным в начале [8], и релятивизации результатов из [3] $\{\mathcal{P}_t\}_t$ является пересчетом всех множеств АДЧ типа $G_{\sigma}^{[0]}$, для всяких НЧ t и q $\mathcal{P}_t \cap (-2^q \triangle 2^q)$ [2]-измеримое множество АДЧ и существуют ОРФ $\hat{\rho}$ (см. s-m-n-теорему) и [2]-ОРФ $\overline{\rho}$ для которых для любого НЧ p выполнено

а) $[W^{[2]}_{\hat{\rho}(p)}]$ [2]-измеримое множество АДЧ [2]-меры меньшей чем 2^{-p} и

$$\mathcal{T}_{\psi} \subseteq \mathcal{T}_{\psi_{p+1}} \cup D^{[1]} \subseteq [W^{[2]}_{\hat{\rho}(p)}] \subseteq [W^{[2]}_{\hat{\rho}(p \dot{-} 1)}],$$

б) для всяких НЧ t и АДЧ X, где
$|X| \le 2^{p} \& \neg (X \in [W^{[2]}_{\hat{p}(p)}])$, верно
$X \in \mathcal{P}_t \equiv X \in \bigcap_{0 \le k \le \hat{p}(p,t)} [W_{s_1^1(t,k)}]$.

2) На основании 1) и теоремы 6 из [8] можно для любых НЧ p и m построить $[m+2]$-отображение ${}^1\mathcal{R}_m$ и $[m]$-отображение ${}^3\mathcal{R}_{m,p}$ (оба) типа $(\mathcal{D}^{[m]} \sqcap N \to N)$ и $[m+1]$-отображение ${}^2\mathcal{R}_m$ типа $(\mathcal{D}^{[m]} \sqcap N \underset{P}{\to} N)$ такие, что для всяких $[m]$-КДЧ $x^{[m]}$ и НЧ t верно ${}^1\mathcal{R}_m(x^{[m]} \sqcap t) > 0 \equiv x^{[m]} \in \mathcal{P}_t$,

$1 \le m \& \neg (x^{[m]} \in \mathcal{C}_{\psi}) \supset !\,{}^2\mathcal{R}_m(x^{[m]} \sqcap t) \& ({}^2\mathcal{R}_m(x^{[m]} \sqcap t) > 0 \equiv x^{[m]} \in \mathcal{P}_t)$,

$2 \le m \& \neg (x^{[m]} \in [W^{[2]}_{\hat{p}(p)}]) \supset ({}^3\mathcal{R}_{m,p}(x^{[m]} \sqcap t) > 0 \equiv x^{[m]} \in \mathcal{P}_t)$.

<u>Замечание 4</u>. Согласно теореме 1 из [6] и лемме 1 из [7] для любых [0]-РН [0]-функции $\mathcal{F}$ и АДЧ X из $\mathcal{A}_2$ выполнено

$$\neg\neg(\underline{D}[\mathcal{F}](X) = -\infty \,\&\, \overline{D}[\mathcal{F}](X) = +\infty \vee D_{кл}(\mathcal{F}, X))$$

и, следовательно, $D_{кл}(\mathcal{F}, X) \equiv \neg(\overline{D}[\mathcal{F}](X) = +\infty) \equiv \neg(X \in \mathcal{P}_{\hat{t}})$, где $\hat{t}$ НЧ, для которого верно (1).

<u>Определения</u>. Пусть $\mathcal{F}$ [0]-функция, $\mathcal{M}$ множество АДЧ и m НЧ.

1) Посредством $\mathrm{Compl}(\mathcal{F}, \mathcal{M}, m)$ мы обозначим наименьшее НЧ m такое, что существует $[m]$-отображение $\overline{\mathcal{R}}$ типа $(\mathcal{D}^{[m]} \underset{P}{\to} N)$, для которого верно $\forall x^{[m]}(\neg(x^{[m]} \in \mathcal{M}) \supset$
$\supset !\,\overline{\mathcal{R}}(x^{[m]}) \& (\overline{\mathcal{R}}(x^{[m]}) = 0 \equiv D_{кл}(\mathcal{F}, x^{[m]})))$.

2) Посредством $\mathrm{Compl}_0(\mathcal{M}, m)$ (соотв. $\mathrm{Compl}_1(\mathcal{M}, m)$, соотв. $\mathrm{Compl}_2(\mathcal{M}, m)$) мы обозначим наибольшее из натуральных чисел $\mathrm{Compl}(\mathcal{G}, \mathcal{M}, m)$, где $\mathcal{G}$ пробегает все [0]-РН [0]-функции (соотв. все [1]-РН [0]-функции, соотв. все [0]-функции).

3) Для любых НЧ i, $0 \le i \le 1$, и множества НЧ B мы по-

средством $\mathrm{Red}\,(i, \mathcal{F}, \mathfrak{M}, m, B)$ обозначим: для любой $[m]$-последовательности $[m]$-КДЧ $\{z_k\}_k^{[m]}$ можно построить $[0]$-последовательность $[m]$-КДЧ $\{y_q\}_q^{[0]}$, для которой для всякого НЧ q верно

$$\neg(y_q \in \mathfrak{M}) \,\&\, \neg \exists k\,(y_q = z_k) \,\&\, (D_{K\mathcal{R}}(\mathcal{F}, y_q) \equiv q \in B) \,\&$$
$$(i = 1 \supset -\infty < \underline{D}[\mathcal{F}](y_q) \leq \overline{D}[\mathcal{F}](y_q) < +\infty).$$

Теорема 1. Пусть m НЧ. Тогда

1) для любого $[0]$-измеримого множества АДЧ $\mathfrak{M}$ $[0]$-меры меньшей чем 2^{-1} верно $\mathrm{Compl}_0(\mathfrak{M}, m) = \mathrm{Compl}_2(\emptyset, m) = m + 3$;

2) для $m \geq 1$ и любого $[0]$-открытого $[1]$-измеримого множества АДЧ $\mathfrak{M}$ $[1]$-меры меньшей чем 2^{-1} имеет место

$\mathrm{Compl}_0(\mathcal{A}_1, m) = \mathrm{Compl}_0(\mathfrak{M} \hat{\cup} \mathcal{A}_1, m) =$

$$= m + 2 \,\&\, \mathrm{Compl}_1(\mathfrak{M} \hat{\cup} \mathcal{A}_1, m) = m + 3\ ;$$

3) для $m \geq 1$ и любых $[1]$-измеримого множества АДЧ $\mathfrak{M}$ $[1]$-меры меньшей чем 2^{-1}, $[m]$-измеримого множества АДЧ $\mathfrak{N}$ $[m]$-меры нуль и НЧ i, $0 \leq i \leq 2$, верно $\mathrm{Compl}_i(\mathcal{V}_y, m) = \mathrm{Compl}_i(\mathfrak{M} \hat{\cup} \mathcal{V}_y, m) = \mathrm{Compl}_i(\mathfrak{N} \hat{\cup} \mathcal{V}_y, m) = m + 1$;

4) для $m \geq 2$ и любых $[m]$-измеримого множества АДЧ $\mathfrak{M}$ $[m]$-меры меньшей чем 2^{-1} и НЧ p и i, $0 \leq i \leq 2$, выполнено $\mathrm{Compl}_i([W^{[2]}_{\partial(p)}], m) = m \leq \mathrm{Compl}_i(\mathfrak{M}, m)$.

Пример 1. Существует $[0]$-функция $\mathcal{F}$ удовлетворяющая условию Липшица и такая, что для любых $[0]$-измеримого множества $\mathfrak{M}$ $[0]$-меры меньшей чем 2^{-1} и НЧ m верно

$\mathrm{Red}\,(1, \mathcal{F}, \mathfrak{M}, m, \setminus \emptyset^{(m+3)})$.

Пример 2. Существуют возрастающая на $0 \triangle 1$ $[0]$-функция $\mathcal{F}$, $[0]$-РН $[0]$-функция $\mathcal{G}$ и $[1]$-РН $[0]$-функция $\mathcal{J}$ такие, что для всяких НЧ t и m, где $1 \leq m$ и $[1]$-мера $[W_t]$ меньше чем 2^{-1}, верно $\mathrm{Red}\,(0, \mathcal{G}, [W_t] \hat{\cup} \mathcal{A}_1, m, \emptyset^{(m+2)})$,

$$\mathrm{Red}\,(1, \mathcal{J}, [W_t] \mathbin{\hat{\cup}} \mathcal{A}_1, m, \setminus \emptyset^{(m+3)})$$

и для любой $[m]$-последовательности $[m]$-КДЧ $\{x_k\}_k^{[m]}$ существует $[m]$-КДЧ v такое, что $\neg(v \in [W_t] \mathbin{\hat{\cup}} \mathcal{A}_1) \,\&\, \neg \exists k\, (v = x_k) \,\&$ $D_{\text{кл}}(\mathcal{F}, v) \,\&\, \neg \exists y^{[m]} D_{\text{кл}}(y^{[m]}, \mathcal{F}, v)$

и, следовательно, $\neg D^{[m]}(\mathcal{F}, v) \,\&\, D^{[m+1]}(\mathcal{F}, v)$.

Доказательство частей 1 и 2 теоремы 1. Пусть m НЧ. Ввиду замечаний 1, 3 и 4 и примеров 1 и 2 достаточно отметить, что согласно [1], стр. 38, существует $\emptyset^{(m+3)}$-общерекурсивный словарный предикат P такой, что

$$\forall y^{[m+2]} x^{[m+2]} (P(y^{[m+2]} \square x^{[m+2]}) \equiv y^{[m+2]} = x^{[m+2]}).$$

Как мы видим, для наших целей полезно доказать для класса всех [0]-функций результат аналогичный утверждению приведенному в замечании 4.

Замечание 5. 1) Согласно [5], стр. 584, и свойствам ОРФ φ_0 из [7], стр. 455, для любого НЧ t выражение $\mathcal{H}(W_t)$ значит: сегменты $\mathcal{L}(\ell)$, $\ell \in W_t$, не перекрываются и содержатся в $0 \triangle 1$ и существует ОРФ f такая, что

$$\forall k \ell\, (\ell \in W_t \setminus \mathcal{D}_{\varphi_0(t, f(k))} \supset |\mathcal{L}(\ell)| < 2^{-k}).$$

2) Теорема 7 из [4], которая является конструктивным аналогом теоремы Д. Витали, нам понадобится в следующем. В связи с этим мы введем следующее обозначение. Пусть $\mathcal{V}$ свойство рациональных сегментов и t НЧ. Тогда мы посредством $\mathrm{Vit}\,(\mathcal{V}, t)$ обозначим

$$\mathcal{H}(W_t) \,\&\, \forall \ell\, (\ell \in W_t \supset \mathcal{V}(\mathcal{L}(\ell)) \,\&\, \mathcal{L}(\ell) \subseteq 0 \triangledown 1) \,\&$$
$$\forall \ell (\mathcal{L}(\ell) \subseteq 0 \triangledown 1 \,\&\, \mathcal{V}(\mathcal{L}(\ell)) \supset \exists s\, (s \in W_t \,\&\, \tfrac{1}{2} \cdot |\mathcal{L}(\ell)| \leq |\mathcal{L}(s)| \,\&$$
$$\mathcal{L}(\ell) \cap \mathcal{L}(s) \neq \emptyset)).$$

3) Мы используем [1]-ОРФ $\overline{\varphi}$ из теоремы 6 из [8] и построим

[1]-ОРФ $\overline{v}$, для которой для всяких НЧ p и t верно
$\overline{v}(t,p) \geq \overline{\varphi}(t,p+3)+2 \,\&\, \forall \ell((0 \in \mathcal{L}(\ell) \vee 1 \in \mathcal{L}(\ell)) \,\&$
$|\mathcal{L}(\ell)| \leq 2^{-\overline{v}(t,p)+2} \supset \mathcal{L}(\ell) \subseteq [W_{\langle z \rangle (p+2)}] \subseteq \mathcal{I}_{\psi_p})$.

Пусть $\mathcal{V}$ свойство рациональных сегментов, t , p и ℓ НЧ и X АДЧ, для которых верно $\mathrm{Vit}(\mathcal{V},t) \,\&\, X \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg(X \in \mathcal{I}_{\psi_p}) \,\&$
$X \in \mathcal{L}(\ell) \,\&\, |\mathcal{L}(\ell)| \leq 2^{-\overline{v}(t,p)}$.

Тогда на основании теоремы 6 из [8] и части 3 замечания 2 выполнено $\mathcal{V}(\mathcal{L}(\ell)) \supset X \in [W_t]$ и

$$X \in [W_t] \supset \exists s (s \in W_t \,\&\, \mathcal{L}(\ell) \subseteq \mathcal{L}^o(s)) .$$

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\mathcal{G}$ возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция. Тогда существует ОРФ f такая, что для всякого НЧ p верно

$$\forall X (\neg (X \in \mathcal{I}_{\psi_p}) \supset \overline{\mathcal{D}}(\mathcal{G}, X, 1, f(p))) ,$$

т.е. $\mathcal{G}$ является равномерно [1]- дифференцируемой на $\mathcal{A} \setminus \mathcal{I}_{\psi_p}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть t_0 и ℓ_0 НЧ такие, что $\Delta(\mathcal{G}, 0\triangle 1) < 2^{t_0} - 1$ и $\mathcal{L}(\ell_0) \eqsim 0 \triangle 1$. Согласно лемме 3 из [5] существует [0]-последовательность [0]-КДЧ $\{z_k\}_k^{[0]}$, для которой выполнено $\mathcal{Z}^{D}(\mathcal{G}, \{z_k\}_k^{[0]})$. Мы построим [0]-последовательность [0]-КДЧ $\{y_t\}_t^{[0]}$ и ОРФ $\overline{w}_0$ такие, что для любого НЧ t выполнено

$$\neg \exists k (y_t = z_k) \,\&\, 2^{-t-1} - 2^{-3t-3-t_0} < y_t < 2^{-t-1}$$

и $W_{\overline{w}_0(t)} = \{\ell \,|\, \mathcal{L}(\ell) \subseteq 0 \triangle 1 \,\&\, Q(\mathcal{G}, \ell) > y_t \cdot 2^{3t+3}\}$.
Следовательно, имеет место $\neg \exists \ell t m \, (Q(\mathcal{G}, \ell) = m \cdot y_t)$.
Ввиду замечания 6 из [8] верно

$$\forall t (\hat{\mu}_1(\overline{w}_0(t)) < 2.(2^{t_0} - 1) . 2^{-3t-3} . y_t^{-1} < 2^{t_0 - 2t - 1}) .$$

Мы используем теорему 7 из [4] и лемму 3 из [5] и построим последовательность свойств рациональных сегментов и ОРФ $\overline{w}_1$ такие, что для всяких НЧ t , k и s , где $1 \leq k \leq 2^{3t+3}$, выполнено $W_{\overline{w}_1(t,k,0)} = \{\ell_0\}$,

$$\forall \ell\,(V_{t,k,2s+1}(\mathcal{L}(\ell)) \equiv \exists q\,(q \in W_{\overline{w}_1(t,k,2s)} \,\&\, \mathcal{L}(\ell) \subseteq \mathcal{L}^0(q) \,\&\, Q(G,\ell) < k\cdot y_t)),$$

$$\mathrm{Vit}\,(V_{t,k,2s+1}, \overline{w}_1(t,k,2s+1)),$$

$$\forall \ell\,(V_{t,k,2s+2}(\mathcal{L}(\ell)) \equiv \exists q\,(q \in W_{\overline{w}_1(t,k,2s+1)} \,\&\, \mathcal{L}(\ell) \subseteq \mathcal{L}^0(q) \,\&\, Q(G,\ell) > (k+1)\cdot y_t)) \text{ и}$$

$$\mathrm{Vit}\,(V_{t,k,2s+2})\, \overline{w}_1(t,k,2s+2))$$

и, следовательно, ввиду монотонности G имеет место

$$\hat{\mu}_1(\overline{w}_1(t,k,2s)) \le \left(\frac{k}{k+1}\right)^s \le 2^{-s\cdot 2^{-3t-4}}.$$

Пусть $\overline{w}_2$ ОРФ такая, что для всякого НЧ q верно

$$W_{\overline{w}_2(q)} = W_{\overline{w}_0(q)} \cup \bigcup_{q \le t} \bigcup_{1 \le k \le 2^{3t+3}} W_{\overline{w}_1(t,k,2^{4t+8})}$$

и, следовательно, $W_{\overline{w}_2(q+1)} \subseteq W_{\overline{w}_2(q)}$ и $\hat{\mu}_1(\overline{w}_2(q)) < 2^{-q-1}\cdot(2^{t_0-q}+1)$.

Пусть p НЧ. Согласно замечанию 1 из [7] можно построить НЧ t_1, $t_0 \le t_1$, для которого выполнено

(2) $$[W_{\overline{w}_2(t_1)}] \subseteq [W_{\langle z\rangle(p+2)}] \subseteq \mathcal{I}_{\psi_p}$$

Пусть t НЧ, $t_1 \le t$, и пусть

(3) $$m_t \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{2^{3t+3}} \sum_{s=1}^{2^{4t+8}} v(\overline{w}_1(t,k,s),p).$$

Пусть X АДЧ и q_0 и q_1 НЧ такие, что

(4) $$\neg(X \in \mathcal{I}_{\psi_p}) \,\&\, X \in \mathcal{L}^0(q_0) \,\&\, X \in \mathcal{L}^0(q_1) \,\&\, |\mathcal{L}(q_0)| \le 2^{-m_t} \,\&\, |\mathcal{L}(q_1)| \le 2^{-m_t}.$$

Мы допустим, что - например - $2^{-t} \le Q(G,q_1) - Q(G,q_0)$. Тогда мы ввиду (3), (4) и замечания 5 получаем $\mathcal{L}(q_0) \cup \mathcal{L}(q_1) \subseteq 0 \triangledown 1$, $X \in 0 \triangledown 1$ и $Q(G,q_1) < 2^{3t+3}\cdot y_t$ и существует НЧ $\bar{k}$, для которого верно

$$1 \le \bar{k} < 2^{3t+3} \,\&\, (\bar{k}-1)\cdot y_t < Q(\mathcal{G}, q_0) < \bar{k}\cdot y_t < (\bar{k}+1)\cdot y_t < Q(\mathcal{G}, q_1).$$

На основании этого, (3) и части 3 замечания 5 легко (индукцией по s) доказать $\forall s (0 \le s \le 2^{4t+8} \supset \exists \ell (\ell \in W_{\overline{w}_1(t,\bar{k},s)} \,\&\, \mathcal{L}(q_0) \cup \mathcal{L}(q_1) \subseteq \mathcal{L}^0(\ell)))$ и, следовательно, ввиду (2)

$$X \in [W_{\overline{w}_2(t)}] \subseteq [W_{\overline{w}_2(t_1)}] \subseteq \mathcal{T}_{\nu/p},$$

что противоречит (4).

Итак, верно $|Q(\mathcal{G}, q_0) - Q(\mathcal{G}, q_1)| < 2^{-t}$.

На основании части 3 замечания 2, теоремы 6 из [8] и рассуждений использованных в [9], стр. 120-124, можно доказать следующее утверждение.

<u>Теорема 3</u>. Пусть $\mathcal{G}$ [0]-функция и t НЧ, для которых выполнено

$$\mathcal{H}(W_t) \,\&\, \forall x^{[0]} (0 < |\mathcal{G}(x^{[0]})| \supset x^{[0]} \in [W_t]).$$

Тогда существуют НЧ τ и ОРФ $\bar{f}$ такие, что для всяких НЧ p и m и АДЧ X, $\neg(X \in [W_t]) \,\&\, \neg(X \in \mathcal{T}_{\nu/p})$, верно

$$[W_{s_1^1(\tau, m+1)}] \subseteq [W_{s_1^1(\tau, m)}],$$

$$\underline{D}[\mathcal{G}](X) = -\infty \equiv \overline{D}[\mathcal{G}](X) = +\infty \equiv X \in \mathcal{P}_\tau \quad \text{и}$$

$$\neg(X \in [W_{s_1^1(\tau,m)}]) \supset \overline{\mathcal{D}}(\mathcal{G}, X, 1, \bar{f}(p, m)) \,\&\, D^{[1]}(0, \mathcal{G}, X)$$

и, следовательно, $\underline{D}[\mathcal{G}](X) = -\infty \equiv \overline{D}[\mathcal{G}](X) = +\infty \equiv \neg D^{[1]}(0, \mathcal{G}, X)$.

<u>Теорема 4</u>. Пусть $\mathcal{F}$ [0]-функция. Тогда

1) для всякого АДЧ X, для которого выполнено $\neg(X \in \mathcal{T}_{\nu})$, и - тем более - для всякого АДЧ X из $\mathcal{A}_\beta$ верно

(5) $\neg\neg(\underline{D}[\mathcal{F}](X) = -\infty \,\&\, \overline{D}[\mathcal{F}](X) = +\infty \vee D^{[1]}(\mathcal{F}, X))$

и, следовательно, $D_{\text{кл}}(\mathcal{F}, X) \equiv \neg\neg D^{[1]}(\mathcal{F}, X)$;

2) для любых НЧ m и p, $1 \le m$,

а) выполнено $\mathrm{Compl}(\mathcal{F}, \mathcal{T}_{\nu}, m) \le m + 1$ и б) существует $[m]$-отображение $\mathcal{E}_{m,p}$ типа $(\mathcal{D}^{[m]} \xrightarrow[P]{} N)$ такое, что для всякого $[m]$-КДЧ $x^{[m]}$, $\mathcal{D}_{КЛ}(\mathcal{F}, x^{[m]})$ & & $\neg(x^{[m]} \in \mathcal{I}_{\mathcal{W}_p})$, верно

$$!\mathcal{E}_{m,p}(x^{[m]}) \,\&\, \overline{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}, x^{[m]}, 1, \mathcal{E}_{m,p}(x^{[m]}))$$

и, следовательно, $\exists y^{[m]} \mathcal{D}^{[m]}(y^{[m]}, \mathcal{F}, x^{[m]})$.

Теорема 5. Пусть $\mathcal{F}$ $[0]$-функция. Тогда можно построить $[2]$-ОРФ $\hat{e}$ такую, что для всяких НЧ p и m, $2 \le m$, верно

а) $\forall X(\neg(X \in [W^{[2]}_{\hat{\wp}(p)}]) \,\&\, \mathcal{D}_{КЛ}(\mathcal{F}, X) \supset \overline{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}, X, 1, \hat{e}(p)))$,

т.е. $[1]$-ОРФ $\langle \hat{e}(p) \rangle^{[1]}$ является регулятором дифференцируемости $\mathcal{F}$ общим для всех АДЧ из множества $\wedge X(\neg(X \in [W^{[2]}_{\hat{\wp}(p)}]) \,\&\, \mathcal{D}_{КЛ}(\mathcal{F}, X))$;

б) $Compl(\mathcal{F}, [W^{[2]}_{\hat{\wp}(p)}], m) \le m$.

Доказательство теорем 4 и 5. Мы построим $[0]$-КДЧ v, для которого выполнено $|\Delta(\mathcal{F}, 0\Delta 1)| < v \,\&\, \neg \exists i k \ell (0 \le i \le 1 \,\&\, Q(\mathcal{F}, \ell) = (-1)^i \cdot k \cdot v)$. Согласно лемме 4 из [5] существуют НЧ s_0 и s_1 и для всяких НЧ i и q, $0 \le i \le 1$, $[0]$-функция ${}^i\mathcal{G}_{0,q}$ и возрастающие на $0\Delta 1$ $[0]$-функции ${}^i\mathcal{G}_{1,q}$ и ${}^i\mathcal{G}_{2,q}$ такие, что

$$\mathcal{H}(W_{s_1^1(s_i,q)}) \,\&\, \forall \ell (\ell \in W_{s_1^1(s_i,q)} \supset |\mathcal{L}(\ell)| \le 2^{-q} \,\&\, 2^q \cdot v < (-1)^i \cdot Q(\mathcal{F}, \ell)),$$

$$\mathcal{F} = {}^i\mathcal{G}_{0,q} + {}^i\mathcal{G}_{1,q} - {}^i\mathcal{G}_{2,q},$$

$$\forall x^{[0]}(0 < |{}^i\mathcal{G}_{0,q}(x^{[0]})| \supset x^{[0]} \in [W_{s_1^1(s_i,q)}])$$

и, следовательно, $\forall X(X \in \mathcal{P}_{s_i} \supset \overline{\mathrm{D}}[(-1)^i \cdot \mathcal{F}](X) = +\infty)$.

Согласно теореме 2 существуют ОРФ $\overline{h}_1$ и $\overline{h}_2$, для которых для любых НЧ p, q, i и j, $0 \le i \le 1 \,\&\, 1 \le j \le 2$, и АДЧ X, где

(6) $\quad \neg(X \in \mathcal{I}_{\mathcal{W}_p})$,

верно $\overline{\mathfrak{D}}({}^{i}\mathcal{G}_{j,q}, X, 1, \overline{h}_j(p,q))$ и, таким образом,

(7) $(\underline{D}[\mathcal{F}](X) = -\infty \equiv \underline{D}[{}^{i}\mathcal{G}_{0,q}](X) = -\infty)\,\&$
$(\overline{D}[\mathcal{F}](X) = +\infty \equiv \overline{D}[{}^{i}\mathcal{G}_{0,q}](X) = +\infty)$.

Мы используем теорему 3 и построим ОРФ $\overline{y}$, $\overline{h}_0$ и $\overline{h}$ такие, что для всяких НЧ p, q, m и i, $0 \le i \le 1$, и АДЧ X выполнено

а) $[W_{s_1^1(\overline{y}(i,q),m+1)}] \subseteq [W_{s_1^1(\overline{y}(i,q),m)}]$;

б) если (6) и

(8) $\neg(X \in [W_{s_1^1(s_i,q)}])$,

то ввиду (7) $\underline{D}[\mathcal{F}](X) = -\infty \equiv \overline{D}[\mathcal{F}](X) = +\infty \equiv X \in \mathcal{P}_{\overline{y}(i,q)}$;

в) если (6), (8) и

(9) $\neg(X \in [W_{s_1^1(\overline{y}(i,q),m)}])$,

то $\overline{\mathfrak{D}}({}^{i}\mathcal{G}_{0,q}, X, 1, \overline{h}_0(p,q,m))\,\&\,D^{[1]}(0, {}^{i}\mathcal{G}_{0,q}, X)$;

г) для любого НЧ k верно $\langle \overline{h}(p,q,m)\rangle^{[1]}(k) \simeq \sum_{t=0}^{q}(\langle \overline{h}_0(p,t,m)\rangle^{[1]}(k+2) + \langle \overline{h}_1(p,t)\rangle^{[1]}(k+2) + \langle \overline{h}_2(p,t)\rangle^{[1]}(k+2))$
и, следовательно, если (6), (8) и (9), то
$\forall t\,(q \le t \supset \overline{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}, X, 1, \overline{h}(p,t,m)))\,\&\,D^{[1]}(\mathcal{F}, X)$.

1) Пусть X АДЧ, $\neg(X \in \mathcal{V}_{y})$. Если верно $\neg(\underline{D}[\mathcal{F}](X) = -\infty\,\&\,\overline{D}[\mathcal{F}](X) = +\infty)$, то не могут не существовать НЧ p, q, m и i, $0 \le i \le 1$, для которых выполнено (6), (8) и (9), и тогда ввиду г) имеет место $\neg\neg D^{[1]}(\mathcal{F}, X)$. Итак, согласно правилам конструктивной логики верно (5).

2) Согласно замечанию 1 существует НЧ $\hat{t}$ такое, что (1), и, следовательно, ввиду 1) выполнено $\forall X\,(\neg(X \in \mathcal{V}_{y}) \supset (D_{\text{кл}}(\mathcal{F}, X) \equiv \neg(X \in \mathcal{P}_{\hat{t}})))$. Отсюда мы на основании замечания 3 получаем $\mathrm{Compl}\,(\mathcal{F}, \mathcal{V}_{y}, m) \le m+1\,\&$
$\forall p\,(\mathrm{Compl}\,(\mathcal{F}, [W^{[2]}_{\hat{\rho}(p)}], m) \le$

3) Мы построим [2]-ОРФ $\hat{e}$, для которой для всякого НЧ p верно $\hat{e}(p) \simeq \bar{h}(p+1, \bar{\wp}(p,s_0), \sum_{q=0}^{\bar{\wp}(p,s_0)} \bar{\wp}(p, \bar{y}(0,q)))$,

где $\bar{\wp}$ [2]-ОРФ из замечания 3.

Пусть m и p НЧ и $\mathcal{U}_{m,p}$ $[m]$-отображение из теоремы 6 из [8]. Существуют $[m]$-отображения $\mathcal{C}$ и $\mathcal{E}_{m,p}$ типа $(D^{[m]} \xrightarrow[P]{} N)$ такие, что для любого $[m]$-КДЧ $x^{[m]}$ выполнено $\mathcal{C}(x^{[m]}) \simeq \mu q(\mathcal{U}_{m,p}(x^{[m]} \square s_1^1(s_0,q)) > 0)$,

$\mathcal{E}_{m,p}(x^{[m]}) \simeq$

$\bar{h}(p, \mathcal{C}(x^{[m]}), \mu m(\mathcal{U}_{m,p}(x^{[m]} \square s_1^1(\bar{y}(0, \mathcal{C}(x^{[m]})), m)) > 0))$.

Тогда $\hat{e}$ и $\mathcal{E}_{m,p}$ обладают свойствами описанными в доказуемых теоремах.

Пример 3. Существуют [0]-РН [0]-функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ такие, что для всяких НЧ m, $1 \leq m$, [1]-измеримого множества АДЧ $\mathcal{M}$ [1]-меры меньшей чем 2^{-1} и $[m]$-измеримого множества АДЧ $\mathcal{N}$ $[m]$-меры нуль

а) верно $\mathrm{Red}(0, \mathcal{F}, \mathcal{M} \hat{\cup} \mathcal{V}_y, m, \emptyset^{(m+1)})$ &
$\mathrm{Red}(0, \mathcal{F}, \mathcal{N} \hat{\cup} \mathcal{V}_y, m, \emptyset^{(m+1)})$;

б) можно построить [0]-последовательность $[m]$-КДЧ $\{v_k\}_k^{[0]}$, для которой выполнено

(10) $\forall k(\neg(v_k \in \mathcal{M}) \,\&\, D_{КЛ}(0, \mathcal{G}, v_k))$

и не существует $[m-1]$-ОРФ f такая, что

(11) $\forall k\, \mathfrak{D}(\mathcal{G}, v_k, 0, f(k))$.

<u>Замечание 6</u>. Легко построить [0]-РН [0]-функцию $\mathcal{F}$, для которой верно $\forall X(\neg D_{КЛ}(\mathcal{F}, X) \equiv 2^{-1} < X < 1)$. На основании леммы 5.5 из [1] можно доказать, что для любых НЧ m и $[m]$-измеримого множества АДЧ $\mathcal{M}$ $[m]$-меры меньшей чем

2^{-1} выполнено $\mathrm{Red}\,(0, \mathcal{F}, \mathfrak{M}, m, \emptyset^{(m)})$.

Теоремами 4 и 5, примером 3 и замечанием 6 доказательство теоремы 1 завершено. Следующие примеры свидетельствуют о том, что также утверждения о регуляторах дифференцируемости нельзя улучшить.

Пример 4. Существует [0]-последовательность [0]-РН [0]-функций $\{\mathcal{F}_k\}_k^{[0]}$ такая, что ни для каких НЧ m и $[m]$-измеримого множества АДЧ $\mathfrak{M}$ $[m]$-меры меньшей чем 2^{-1} не существует [1]-ОРФ g, для которой выполнено

$$\forall k\, X(\neg(X \in \mathfrak{M}) \,\&\, \mathcal{D}_{K\lambda}(0, \mathcal{F}_k, X) \supset \mathcal{D}(\mathcal{F}_k, X, 0, g(k))).$$

Пример 5. (Ср. [10].) Существует [0]-функция $\mathcal{F}$ удовлетворяющая условию Липшица и такая, что

$$\forall X(X \in 0 \triangle 1 \supset \mathcal{D}^{[1]}(\mathcal{F}, X) \,\&\, \neg\mathcal{D}^{[0]}(\mathcal{F}, X)).$$

Пример 6. Можно построить [0]-РН [0]-функцию $\mathcal{G}$ такую, что $\forall X \neg\neg\, \mathcal{D}^{[0]}(\mathcal{G}, X)$ и для любых НЧ m и $[m]$-измеримого множества АДЧ $\mathfrak{M}$ $[m]$-меры нуль существует [0]-последовательность $[m]$-КДЧ $\{v_k\}_k^{[0]}$, для которой верно (10), но не существует $[m]$-ОРФ f такая, что (11).

Литература

[1] ДЕМУТ О., КРЫЛ Р., КУЧЕРА А.: Об использовании теории функций частичнорекурсивных относительно числовых множеств в конструктивной математике, Acta Univ. Carolinae - Math. et Physica 19(1978), 15-60.

[2] ДЕМУТ О.: Некоторые вопросы теории конструктивных функций действительной переменной, Acta Univ. Carolinae - Math. et Physica 19(1978), 61-96.

[3] ДЕМУТ О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae

10(1969), 463-492.

[4] ДЕМУТ О.: О конструктивных псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 315-331.

[5] ДЕМУТ О.: О дифференцируемости конструктивных функций слабо ограниченной вариации на псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 583-599.

[6] ДЕМУТ О.: О конструктивном аналоге теоремы К.М. Гарга о производных числах, Comment. Math. Univ. Carolinae 21(1980), 457-472.

[7] ДЕМУТ О.: О некоторых классах арифметических действительных чисел, Comment. Math. Univ. Carolinae 23(1982), 453-465.

[8] ДЕМУТ О.: О бореловых типах некоторых классов арифметических действительных чисел, Comment. Math. Univ. Carolinae 23(1982), 593-606.

[9] ДЕМУТ О.: О конструктивном аналоге теоремы Данжуа-Янга о производных числах, Comment. Math. Univ. Carolinae 17(1976), 111-126.

[10] POUR-EL M.B., RICHARDS I.: Differentiability properties of computable functions - a summary, Acta Cybernetica 4(1978), 123-125.

Matematicko-fyzikální fakulta, Karlova Univerzita, Malostranské nám. 25, Praha 1, Czechoslovakia

(Oblatum 1.3. 1983)