Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Sergej A. Antonyan

Новое доказательство существования бикомпактного G-разширения

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 22 (1981), No. 4, 761--772

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106118`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

22,4 (1981)

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ БИКОМПАКТНОГО G-РАСШИРЕНИЯ

С.А. АНТОНЯН

Abstract: We present here a new proof of the theorem about the existence of compact G-extension in the case of compact Hausdorff group G.

Key words and phrases: G-space, equivariant, compact G-extension.

Classification: Primary 54H15
Secondary 54D35

Решая задачу классификации конечномерных G-пространств, Р. Пале [10] установил существование бикомпактного G-расширения произвольного тихоновского G-пространства в случае, когда действующая группа G является компактной группой Ли. Позже Ян де Врис [11] распространил этот результат на случай любой локально бикомпактной хаусдорфовой группы G.

В настоящей работе предлагается новое доказательство существования бикомпактного G-расширения произвольного тихоновского G-пространства в случае, когда действующая группа G бикомпактна и хаусдорфова.

Возможно, что наш способ доказательства окажется полезным и в иных ситуациях. Во всяко работы [1] и [2] существенно на него опираются.

Ниже мы будем придерживаться принятой в теории G-пространств (или топологических групп преобразований) терминологии (см., например, [1] - [4],[10],[11]). Все пространства, в том числе и действующая группа G, ниже всегда предполагаются хаусдорфовыми, и если не оговорено противное, то всегда предполагается, что G-бикомпактная группа, хотя некоторые утверждения верны и в более общих случаях.

Пусть T - бикомпакт. Через $C(T)$ будем обозначать банахову алгебру всех непрерывных вещественнозначных функций $f: T \to \mathbb{R}$, рассматриваемую в норме супремума $\|f\| = \sup_{t \in T} |f(t)|$.

<u>Лемма 1</u>. Если T бикомпактное G-пространство, то на банаховой алгебре $C(T)$ определяется непрерывное, линейное и изометрическое действие группы G согласно формуле

(1) $\quad (g, f) \to gf; \ (gf)(t) = f(g^{-1}t),$

где $\quad g \in G, \ f \in C(T), \ t \in T.$

<u>Доказательство</u> - простая проверка.

Если группу G превратим в G-пространство с помощью действия

$$(g, x) \to g * x = xg^{-1}; \quad g, x \in G,$$

то согласно лемме 1, банахова алгебра $C(G)$ превратится в G-пространство с действием $(gf)(x) = f(xg)$.

Пусть X произвольное G-пространство. Через $E^*(X)$ обозначим множество всех таких эквивалентных [1] отображений $\varphi: X \to C(G)$, что замыкание образа $\overline{\varphi(X)}$ -бикомпактно.

<u>Лемма 2</u>. Для того, чтобы тихоновское G-пространство

----

1) Эквивалентное отображение всегда предполагается непрерывным.

X обладало бикомпактным G-расширением, необходимо и достаточно, чтобы $E^*(X)$ разделяло точки и замкнутые множества из X (в том смысле, что если F замкнутое множество из X не содержащее точку $a \in X$, то $\varphi(a) \notin \overline{\varphi(F)}$ для некоторого $\varphi \in E^*(X)$.

<u>Доказательство</u>. <u>Необходимость</u>. Пусть $B \supseteq X$ некоторое бикомпактное G-расширение для G-пространства X, а точка $a \in X$ и несодержащее ее замкнутое в X множество $F \subset X$ выбраны произвольно. Пусть Φ -замыкание множества F в бикомпакте B. Ясно, что $a \in \Phi$. В силу полной регулярности бикомпакта B, существует такая непрерывная функция $f: B \to \mathbb{R}$, что $f(a) = 1$, $f(\Phi) = 0$. Положим $f^*(x)(g) = f(gx)$, для всех $x \in B$, $g \in G$.

Легко видеть (см., например, [4]), что $f^* \in E^*(B)$. Поскольку $f^*(a)(e) = f(a) \neq f(y) = f^*(y)(e)$ для всех $y \in \Phi$ и единицы e группы G, то $f^*(a) \notin \overline{f^*(\Phi)}$. Положим $\varphi = f^*|_X$ - ограничение отображения f^* на G-пространсве X. Совершенно ясно, что $\varphi \notin E^*(X)$ и $\varphi(a) \in \overline{\varphi(F)}$, чем и завершается доказательство необходимости.

<u>Достаточность</u>. Пусть $E^*(X)$ разделяет точки и замкнутые множества из X. Рассмотрим диагональное отображение

$$\alpha : X \longrightarrow \prod_{\varphi \in E^*(X)} \overline{\varphi(X)} = Q,$$

определенное семейством $E^*(X)$, т.е. $\alpha(x)(\varphi) = \varphi(x)$, для всех $x \in X$, $\varphi \in E^*(X)$.

Хорошо известно, что в нашем случае α является гомеоморфным вложением (см. [6], стр. 158). Далее, в силу эквивариантности каждого из отображений $\varphi \in E^*(X)$, все множества $\varphi(X)$, а следовательно и все множества $\overline{\varphi(X)}$ - инвариантии в $C(G)$. В силу этого очевидно, что на произведении $Q = \prod_{\varphi \in E^*(X)} \overline{\varphi(X)}$ определяется непрерывное действие группы G согласно формуле

$$(g, \{\delta_\varphi\}) \longrightarrow g\{\delta_\varphi\} = \{\eta_\varphi\}; \quad \eta_\varphi = g\delta_\varphi,$$

где $g \in G$, $\{\delta_\varphi\} \in \prod_{\varphi \in E^*(X)} \overline{\varphi(X)}$ и $\varphi \in E^*(X)$. Таким образом Q превращается в G-пространство, которое к тому же бикомпактно, как произведение бикомпактов. Из эквивариантности всех отображений $\varphi \in E^*(X)$ немедленно следует эквивариантность гомеоморфизма α. Поэтому множество $\alpha(X)$ а следовательно и его замыкание $\overline{\alpha(X)}$ в G-бикомпакте Q - инвариантны. Для завершения доказательства, остается заметить, что $\overline{\alpha(X)}$ вместе с индуцированным из Q действием группы G, является G - бикомпактом, а пара $(\overline{\alpha(X)}, \alpha)$ - бикомпактным G-расширением тихоновского G-пространства X.

Таким образом, в силу леммы 2 существование бикомпактного G-расширения у тихоновского G-пространства X, в случае бикомпактной группы G следует из следующей теоремы:

<u>Теорема</u>. Пусть G -бикомпактная группа, а X -тихоновское G-пространство. Тогда $E^*(X)$ разделяет точки и замкнутые множества из X.

Перед доказательством теоремы докажем еще несколько лемм.

<u>Лемма 3</u>. Пусть G -любая группа, X - любое G-пространство, а H - замкнутая нормальная подгруппа группы G. Тогда на пространстве орбит $X|_H$ определяется каноническое непрерывное действие группы G согласно формуле

(2) $(g, H(x)) \to gH(x) = H(gx)$ для любых $g \in G$, $H(x) \in X|_H$,

а пространства орбит $X|_G$ и $X|H|_G$ естественно гомеоморфны.

<u>Доказательство</u>. Во-первых отметим, что для любой подгруппы $H \subset G$ ограничение действия группы G на H является непрерывным действием группы H на пространстве X. Так, что запись $X|_H$ имеет смысл. Покажем, что определение действия (2) корректно. Действительно, если смежные классы $H(x)$ и $H(y)$ совпадают, то $y = hx$ для некоторого $h \in H$. Тогда $gy = ghx$. Но в силу нормальности подгруппы H, $gh = h'g$ для некоторого $h' \in H$. Значит $gy = ghx = h'gx$, и следовательно $gH(y) = H(gy) = H(h'gy) = H(gx)$. Легко проверить, что отображение $(g, H(x)) \to gH(x)$ из $G \times X|_H$ в $X|_H$ действительно является непрерывным действием. Пусть $p: X \to X|_H$, $q: X \to X|_G$ и $\pi: X|_H \to X|H|_G$ – естественные проекции.

Из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "gx"] \arrow[d, "i \times p"'] & X \arrow[d, "p"] \\ G \times X|_H \arrow[r] & X|_H \end{tikzcd}$$

с учетом непрерывности действия gx группы G на X и открытости отображений P и $i \times P$ (см. [10] стр. 2), где i – тождественное отображение группы G, непосредственно следует непрерывность действия $gH(x)$ группы G на пространстве орбит $X|_H$. Далее, поскольку $P(gx) = H(gx) = gH(x) = gP(x)$, т.е. P – эквивариантно, то согласно предложению 1.1.17 из [10] диаграмма

$$
(*)\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] \arrow[d, bend right, "q"'] & X|_H \arrow[d, bend left, "h"] \\
X|_G \arrow[r, "\tilde{p}"] & X|H|_G
\end{tikzcd}
$$

коммутативна, где $\tilde{p}$ -непрерывное отображение индуцированное отображением p согласно формуле $\tilde{p}(G(x)) = G(p(x))$, для всех $G(x) \in X|_G$.

Покажем, что $\tilde{p}$ искомый гомеоморфизм. Действительно, из коммутативности диаграммы ($*$) с учетом непрерывности и открытости всех проекций p , q , h ([10], стр. 2) следует открытость отображения $\tilde{p}$. Из того, что p является отображением "на": следует, что $\tilde{p}$ тоже является отображением "на". Остается показать взаимооднозначность $\tilde{p}$. Пусть $\tilde{p}(G(x)) = \tilde{p}(G(y))$,т.е. $G(p(x)) = G(p(y))$.Тогда $p(y) = g\,p(x)$ для некоторого $g \in G$, т.е. $H(y) = H(gx)$. Следовательно $y = hgx$ для некоторого $h \in H$, а значит $G(x) = G(y)$. Таким образом взаимооднозначность $\tilde{p}$, тем самым лемма 3 доказаны.

<u>Лемма 4</u>. Пусть L - бикомпактная группа, M - ее замкнутая подгруппа, а $\mathcal{U}$ - окрестность множества M в L . Тогда существует такая замкнутая подгруппа K группы L , что $M \subset K \subset \mathcal{U}$, а фактор пространство $L|_K$ -метризуемо.

<u>Доказательство</u>. Ясно, что группу L можно рассматривать как M -пространство с обычным групповым умножением в качестве действия группы M на пространстве L . Поэтому в окрестности $\mathcal{U}$ множества M существует M -инвариантная окрестность $W \subset \mathcal{U}$, т.е. такая окрестность W , что $M \cdot W \subset W$, где $M \cdot W = \{gx \,;\, g \in M , x \in W\}$ (см. [10], стр. 5).

В силу известной теоремы из теории топологических групп (см., например, [7], стр. 128), в окрестности W существует такой замкнутый нормальный делитель N, что фактор-группа $L|_N$ метризуема. Покажем, что произведение $K = M \cdot N$ – искомая подгруппа. Во-первых, подгруппа K замкнута в силу бикомпактности M и N. Далее $M \subset K = M \cdot N \subset M \cdot W \subset$ $\subset W \subset U$. Остается показать метризуемость фактор-пространства $L|_K$. Полагая в лемме 3 $X = L$, $G = K$, $H = N$, получим гомеоморфизм $L|_K \approx L|N|_K$. Но в силу метризуемости $L|_N$ и бикомпактности K, пространство орбит $L|N|_K$ тоже метризуемо (см. [10], стр. 4). Следовательно, $L|_K$ тоже метризуемо и лемма 4 доказана.

<u>Лемма 5</u>. Любое метризуемое бикомпактное G-пространство T можно эквиморфно (т.е. эквивариантно и гомеоморфно) вложить в банахово G-пространство $C(T)$.

<u>Доказательство</u>. Возьмем инвариантную (относительно действия группы G) метрику ρ на T, существование которое обеспечивается бикомпактностью группы G (см. [10], стр. 4) и определим отображение $i : T \longrightarrow C(T)$ формулой

$$i(t)(x) = \rho(t, x) \quad \text{для всех } t, x \in T .$$

Тогда i – искомое вложение. Действительно, i-гомеоморфизм ([5], стр. 88), а инвариантность метрики ρ в точности означает эквивариантность отображения i. Лемма 5 доказана.

<u>Лемма 6</u>. Пусть H такая замкнутая подгруппа группы G, что факторпространство $G|_H$ метризуемо. Тогда в банаховой G-алгебре $C(G)$ существует такой элемент f_0, что стационарная группа $G_{f_0} = \{ g \in G ; gf_0 = f_0 \}$ в точности

совпадает с H.

<u>Доказательство</u>. Согласно лемме 5 существует эквиморфное вложение $i: G|_H \longrightarrow C(G|_H)$ G-пространства $G|_H$ с действием (2) в банахово G-пространство $C(G|_H)$ с действием (1). Пусть $p: G \longrightarrow G|_H$ – естественная проекция. Ясно, что индуцированное им отображение $p^*: C(G|_H) \to C(G)$: $: p^*(f) = f \circ p$ – является изометрическим изоморфизмом банахова пространства $C(G|_H)$ в банахово пространство $C(G)$. Эквивариантность же отображения $p^*: C(G|_H) \longrightarrow C(G)$ следует из цепочки равенств

$$p^*(gf)(x) = (gf)(p(x)) = f(g^{-1}p(x)) = f(g^{-1}H(x)) =$$
$$= f(H(g^{-1}x)) = f(p(g^{-1}x)) = (f \circ p)(g^{-1}x) =$$
$$= [g(f \circ p)](x) = [gp^*(f)](x).$$

Взяв композицию $\dot{j} = p^* \circ i$ – мы получим эквиморфизм $\dot{j}:$ $: G|_H \longrightarrow C(G)$. Пусть $f_0 = \dot{j}(H(e))$, где $H(e)$ – смежный класс по подгруппе H единичного элемента e группы G. Ясно, что стационарная группа элемента $H(e)$ в G-пространстве $G|_H$ в точности равна H. Но поскольку стационарная группа сохраняется при эквиморфизме, то отсюда следует, что $G_{f_0} = H$, и лемма 6 доказана.

<u>Доказательство теоремы</u>. Пусть точка a и не содержащее ее замкнутое множество F в пространстве X выбраны произвольно. Пусть $\mathcal{U} = \{g \in G;\ ga \in X \setminus F\}$. Ясно, что $\mathcal{U}$ открытая окрестность стационарной группы G_a в группе G.

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\mathcal{U} = G$. Тогда орбита $G(a) = \{ga; g \in G\}$ точки a не пересекается с орбитой $G(F) = \{gx;\ g \in G,\ x \in F\}$ множества F. В силу бикомпактности группы G множество $G(F)$ замкнуто в X, а множество $G(a)$ –бикомпактно

([10], стр. 1). Ясно также, что оба эти множества инвариантны в X. Поэтому существует такая инвариантная функция $\varphi: X \longrightarrow [0,1]$, что $\varphi|_{G(F)} \equiv 0$, $\varphi|_{G(a)} \equiv 1$ (см. [10], стр. 3). Однако заметим, что каждую ограниченную инвариантную функцию $\varphi: X \longrightarrow \mathbb{R}$ можно рассматривать, как элемент пространства $E^*(X)$, ибо прямая $\mathbb{R}$ как G-пространство с тривиальным действием группы G, эквиморфно вложена в $E^*(X)$. Поэтому в случае 1) искомое отображение φ построено.

2). Пусть $\mathcal{U} \neq G$. Тогда в силу леммы 4 (стационарная группа G_a всегда замкнута в G) существует такая замкнутая подгруппа H группы G, что $G_a \subset H \subset \mathcal{U}$, а фактор пространство $G|_H$ -метризуемо. Далее в силу леммы 6 выбираем такой элемент $f_0 \in C(G)$, что $G_{f_0} = H \supset G_a$. Определим отображение $\varphi_0: G(a) \to C(G)$ по формуле $\varphi_0(ga) = gf_0$. Это определение корректно, ибо если $g_1 a = g_2 a$, то $g_2^{-1} g_1 a = a$, т.е. $g_2^{-1} g_1 \in G_a \subset H = G_{f_0}$, т.е. $g_2^{-1} g_1 f_0 = f_0$, т.е. $g_1 f_0 = g_2 f_0$, где $g_1, g_2 \in G$.

Ясно, что φ_0 -эквивариантное отображение. Из включения $G_{f_0} = H \subset \mathcal{U}$ следует, что $\varphi_0(a) \notin \varphi_0(F \cap G(a))$. Действительно, если $\varphi_0(a) = \varphi_0(ga)$, для некоторого $g \in G$, то $gf_0 = g\varphi_0(a) = f_0$, т.е. $g \in G_{f_0} = H \subset \mathcal{U}$, т.е. $ga \notin F$.

Далее, пусть V - замкнутая выпуклая оболочка орбиты $G(f_0)$ в $C(G)$. В силу линейности и непрерывности действия группы G на $C(G)$ множество V -инвариантно в $C(G)$, а в силу бикомпактности $G(f_0)$ и полноты $C(G)$, оно также и бикомпактно.

Предположим, что X вложено в свое Стоун-Чеховское расширение βX. Поскольку орбита $G(a)$ -бикомпактна, то она замнута в βX. Так как V является абсолютным экстензором для нормальных пространств [9], то существует непрерывное продолжение $\tilde{\varphi}_0 : \beta X \longrightarrow V$ отображения φ_0. Рассмотрим сужение $\varphi' = \tilde{\varphi}_0 |_X : X \longrightarrow V$. Тогда формулой $\varphi_1(x) = \int_G g^{-1}\varphi^1(gx)dg$, где $x \in X$, а dg - нормированная мера Хаара на группе G, определяется эквивариантное продолжение $\varphi_1 : X \longrightarrow V$ отображения φ_0 (см. [3],[8]). Поскольку V - бикомпакт, то $\varphi_1 \in E^*(X)$. Так как $f_0 = \varphi_1(a) = \varphi_0(a) \notin \varphi_1(F \cap G(a))$ и множество $\varphi_1(F \cap G(a))$ бикомпактно, то существуют такие открытые в $C(G)$ множества $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$, что $f_0 \in \mathcal{U}_1$, $\varphi_1(F \cap G(a)) \subset \mathcal{U}_2$ и $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$.

Но в силу изометричности действия (1) группы G на $C(G)$ имеем, что $\|f_0\| = \|g f_0\|$, для любого $g \in G$, т.е. бикомпактная орбита $G(f_0)$ расположена на сфере радиуса $\|f_0\|$ с центром в нулевой точке пространства $C(G)$. Значит точка $\varphi_1(a)$ и бикомпактное множество $\varphi_1(F \cap G(a))$, которые лежат на орбите $G(f_0)$, расположены на сфере радиуса $\|f_0\|$ с центром в нуле. Поэтому (это очевидно), открытые множества $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ можно выбрать таким образом, чтобы вдобавок ко всему, множества $\mathcal{U}_1$ и $I \cdot \mathcal{U}_2 = \{tx;\ t \in I = [0,1],\ x \in \mathcal{U}_2\}$ не пересекались. Далее, рассмотрим окрестность $\varphi_1^{-1}(\mathcal{U}_2) \cup (X \setminus F)$ инвариантного множества $G(a)$ в X. В ней содержится инвариантная окрестность W того же множества $G(a)$ ([10], стр. 5). Пусть $f : X \longrightarrow I$ такая инвариантная функция, что $f|_{G(a)} \equiv 1$, а $f|_{X \setminus W} \equiv 0$ ([10], стр. 3). Положим $\varphi(x) = f(x) \cdot \varphi_1(x)$, для любого $x \in X$, где $f(x) \cdot \varphi_1(x)$ - произведение в банаховой алгебре $C(G)$. Покажем, что φ - искомое отображение. Во-первых, как видно из определения

φ -непрерывно, а $\overline{\varphi(X)}$ будучи замкнутым подмножеством бикомпакта $I\cdot\overline{\varphi_1(X)}=\{t\cdot y; t\in I, y\in\overline{\varphi_1(X)}\}$ - само бикомпактно. Цепочка равенств $\varphi(gx)=f(gx)\cdot\varphi_1(gx)=f(x)[g\varphi_1(x)]=g[f(x)\cdot\varphi_1(x)]=g\varphi(x)$, где $g\in G$, $x\in X$, показывает эквивариантность отображения φ. Таким образом $\varphi\in E^*(X)$. Осталось показать, что $\varphi(a)\notin\overline{\varphi(F)}$. Для этого заметим, что $\varphi(F\cap(X\setminus W))=0$, а $\varphi(a)=f(a)\cdot\varphi_1(a)=f_0$. Но $f_0\neq 0$, ибо $G_{f_0}\subset\mathcal{U}\neq G=G_0$; G_0 - стационарная группа нулевого элемента банаховой G - алгебры $C(G)$. Поэтому $\varphi(a)=f_0\notin\overline{\varphi(F\cap(X\setminus W))}$. С другой стороны $\varphi(F\cap W)\subset$
$\subset\varphi(F\cap(\varphi_1^{-1}(\mathcal{U}_2)\cup(X\setminus F)]\subset\varphi(\varphi_1^{-1}(\mathcal{U}_2))\subset I\cdot\mathcal{U}_2$

Так как окрестность $\mathcal{U}_1$ точки $f_0=\varphi(a)$ не пересекается с множеством $I\cdot\mathcal{U}_2$, то точка $f_0=\varphi(a)$ не является точкой прикосновения множества $\varphi(F\cap W)$ в $C(G)$. Таким образом $\varphi(a)\notin\overline{\varphi(F)}$. Теорема доказана.

Литература

[1] С.А. АНТОНЯН: Классификация бикомпактных G-расширений с помощью колец эквивариантных отображений, Докл. Акад. Наук Арм. ССР 69(1979), 260-264.

[2] С.А. АНТОНЯН, Ю.М. СМИРНОВ: Универсальные объекты и бикомпактные расширения для топологических групп преобразований, Докл. Акад. Наук СССР 257(1981), 521-525.

[3] С.А. АНТОНЯН: Ретракты в категориях G-пространств, Изв. Акад. Наук Арм. ССР 15(1980), 365-378.

[4] Ю.М. СМИРНОВ: Об эквивариантных вложениях G-пространств, Успехи мат. наук 31(1976)(191), 137-147.

[5] К. ВОРСУК: Теория ретрактов, "Мир", М., 1871.

[6] Дж. КЕЛЛИ: Общая топология, "Наука", М., 1968.

[7] Л.С. ПОНТРЯГИН: Непрерывные группы, "Наука", М., 1972.

[8] С.А. АНТОНЯН: Ретракты в категории G-пространств, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Math., Astr., Phys., 1981 (to appear).

[9] E. MICHAEL: Some extension theorems for continuous functions, Pacif. J. Math. 3(1953), 789-806.

[10] R. PALAIS: The classification of G-spaces, Mem. Amer. Math. Soc. 36(1960).

[11] J. de VRIES: On the existence of G-compactifications, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Math. Astr., Phys. 26(1978), 275-280.

Кафедра высшей алгебры и геометрии, мех.-мат. факультет,
Ереванский государственный университет, Ереван-49, 375049,
СССР

(Oblatum 18.6. 1980, revisum 28.8. 1981)