Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Siegfried Hahn

Homöomorphieaussagen für k-verdichtende Vektorfelder

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 21 (1980), No. 3, 563--572

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106021

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

21,3 (1980)

HOMÖOMORPHIEAUSSAGEN FUR k-VERDICHTENDE VEKTORFELDER

S. HAHN

Inhalt: Ein von Petryshyn und Fitzpatrick bewiesener Surjektivitätssatz für k-verdichtende ($0 \leq k < 1$) Vektorfelder wird zur Homöomorphieaussage verschärft.

Schlüsselwörter: k-kondensierende und k-verdichtende Vektorfelder, Surjektivität, lokale und globale Homöomorphismen.

Klassifikation: 74H10

---

1. Einleitung. Sei E ein topologischer Vektorraum und $M \subset E$. Wir bezeichnen mit ∂M, $\overline{M}$, int M den Rand, die Abschliessung bzw. das Innere von M. Eine stetige Abbildung $F: M \longrightarrow E$ heisst kompakt, wenn $F(M)$ eine relativ kompakte Teilmenge von E ist; sie heisst vollstetig, wenn eine Nullumgebung V aus E existiert, so dass die Einschränkungen $F \mid (M \cap nV)$ $(n = 1,2,\dots)$ alle kompakt sind.

Sei E ein lokalkonvexer Raum, $(A, \leq)$ eine halbgeordnete Menge und $\mathfrak{M}$ ein System von Teilmengen von E, das mit jeder Menge M auch deren abgeschlossene konvexe Hülle $\overline{co}\, M$ enthält. Eine Funktion $\psi : \mathfrak{M} \longrightarrow A$ mit $\psi(\overline{co}\, M) = \psi(M)$ $(M \in \mathfrak{M})$ heisst Nichtkompaktheitsmass in E. Sei A speziell ein Kegel, $k \geq 0$ eine reelle Zahl, $\psi : \mathfrak{M} \longrightarrow A$ ein Nichtkompaktheitsmass, $D \subset E$ und $F: D \longrightarrow E$ eine stetige Abbildung. Gilt $\psi(F(M)) \leq \leq k\,\psi(M)$ $(M \subset D)$, so heisst F eine (ψ, k)-kondensierende Abbildung.

Falls eine Nullumgebung V aus E existiert, so dass $F|(D\cap nV)$ $(n = 1,2,\ldots)$ (ψ,k)-kondensierend sind, heisst F (ψ,k)-verdichtend. Offenbar ist jede (ψ,k)-kondensierende Abbildung (ψ,k)-verdichtend, für beschränkte Definitionsbereiche sind beide Begriffe äquivalent.

Sei $D\subset E$ und $F:D \longrightarrow E$ eine kompakte, vollstetige, (ψ,k)-kondensierende bzw. (ψ,k)-verdichtende Abbildung. Dann heisst die durch $f(x) = x - F(x)$ $(x \in D)$ definierte stetige Abbildung $f:D \longrightarrow E$ bekanntlich das von F erzeugte kompakte, vollstetige, (ψ,k)-kondensierte bzw. (ψ,k)-verdichtende Vektorfeld.

Sei E ein topologischer Vektorraum und $F:E \longrightarrow E$ eine stetige Abbildung. Häufig interessiert die folgende Fragestellung: Ist die Gleichung

$$(*) \qquad x - F(x) = y \qquad (x \in E)$$

für jedes $y \in E$ lösbar, eventuell sogar auf genau eine Weise lösbar? Hängt in diesem Fall die Lösung $x \in E$ stetig von y ab? Bekanntlich sind diese Eigenschaften von $(*)$ äquivalent mit der Surjektivität von $f = I - F$, Bijektivität von f bzw. mit der Tatsache, dass f ein Homöomorphismus von E auf E ist. Für den Nachweis der Surjektivität leisten oft Gebietsinvarianzsätze nützliche Dienste. Damit beschäftigten wir uns kurz im 1. Abschnitt. Im zweiten Abschnitt erhalten wir eine Homöomorphieaussage für (ψ,k)-verdichtende Vektorfelder, die bereits bekannte Ergebnisse verschärft.

1. Surjektivitätsaussagen. Das Nichtkompaktheitsmass $\psi : \mathfrak{M} \longrightarrow A$ habe folgende Eigenschaften (A sei ein Kegel):

- Aus $M'\subset M$ folgt $\psi(M') \leq \psi(M)$ $(M,M' \in \mathfrak{M})$

- $\psi(M \cup \{x\}) = \psi(M)$ $(M \in \mathfrak{M}, x \in E)$
- $\psi(M_1 \cup M_2) = \sup \{\psi(M_1), \psi(M_2)\}$ $(M_1, M_2 \in \mathfrak{M})$
- $\psi(-M) = \psi(M)$ $(M \in \mathfrak{M})$
- $\psi(tM) = t\psi(M)$ $(M \in \mathfrak{M}, t > 0)$
- $\psi(M_1 + M_2) \leq \psi(M_1) + \psi(M_2)$ $(M_1, M_2 \in \mathfrak{M})$
- $\psi(M) = 0$ gilt genau dann, wenn $M \in \mathfrak{M}$ präkompakt ist.

Beispiele für derartige Nichtkompaktheitsmasse liefern das Kuratowskische und das Hausdorffsche Nichtkompaktheitsmass (s.z.B. die Arbeit [8], in der ausführlich Nichtkompaktheitsmasse untersucht sind). Im weiteren werden wir kurz unter einer k-kondensierenden bzw. k-verdichtenden Abbildung eine (ψ, k)-kondensierende bzw. (ψ, k)-verdichtende Abbildung verstehen, bei der das Nichtkompaktheitsmass ψ die genannten Eigenschaften hat.

Ab sofort bezeichne E einen quasivollständigen, metrisierbaren lokalkonvexen Raum und D eine Teilmenge von E. Ist $k \geq 0$, $F_1 : D \rightarrow E$ eine k-kontrahierende Abbildung und $F_2 : D \rightarrow E$ eine vollstetige Abbildung, so stellt die Abbildung $F = F_1 + F_2$ ein wohlbekanntes Beispiel für eine k-verdichtende Abbildung $F : D \rightarrow E$ dar.

In [3] bewies der Verfasser folgenden Gebietsinvarianzsatz:

Satz 1: Es sei $D \subset E$ offen, $k \in [0,1)$ sowie $f : D \rightarrow E$ ein k-verdichtendes Vektorfeld. Weiter sei f lokal injektiv (d.h., zu jedem $x \in D$ existiere eine Umgebung U von x, so dass $f | U$ injektiv ist). Dann ist $f(D)$ offen.

In [3] wurde Satz 1 nur für k-kondensierende (dort "k-konzentrierende") Vektorfelder formuliert, jedoch folgt daraus unmittelbar Satz 1 (für jede offene Nullumgebung V gilt

$f(D) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(nV \cap D)$ $n = 1,2,\ldots$). Satz 1 wurde ohne Abbildungsgrad bewiesen. Für Banachräume E erhielten unter Verwendung des Abbildungsgrades Satz 1 u.a. auch Daneš [2], Nussbaum [4], Petryshyn u. Fitzpatrick [6], wobei auch allgemeinere (aber verwandte) Abbildungsklassen betrachtet wurden.

Da E ein zusammenhängender topologischer Raum ist, ergibt sich aus Satz 1 sofort

<u>Folgerung 1</u>: Es sei $k \in [0,1)$ und $f: E \longrightarrow E$ ein k-verdichtendes lokal injektives Vektorfeld. $f(E)$ sei abgeschlossen in E. Dann gilt $f(E) = E$.

Eine wohlbekannte Voraussetzung, die in Banachräumen die Abgeschlossenheit von $f(E)$ sichert (s.z.B. [5]) lautet:

(1.1) "Es existiert ein $C > 0$ mit $\|f(x) - f(y)\| \geq C \|x - y\|$ $(x, y \in E)$"

Jedoch ist (1.1) sehr hart und fordert i.a. mehr als die (globale) Injektivität. Für lineare beschränkte Abbildungen ist (1.1) bekanntlich äquivalent zur Injektivität. Andererseits hat (1.1) den Vorteil, dass daraus die Stetigkeit von f^{-1} unmittelbar folgt. Jedes k-verdichtende $(0 \leq k < 1)$ Vektorfeld $f: E \longrightarrow E$, für das (1.1) gilt, ist also ein Homöomorphismus von E auf E. Dieses Resultat wurde von Petryshyn in [5] mit Abbildungsgrad (sogar für 1-kondensierende Abbildungen) bewiesen.

Im Falle $k < 1$ ist die Menge $f(E)$ für jedes k-kondensierende Vektorfeld f abgeschlossen, nicht aber für jedes k-verdichtende Vektorfeld. Eine im Vergleich zu (1.1) relativ schwache Zusatzvoraussetzung für k-verdichtende Vektorfelder, die die Abgeschlossenheit von $f(E)$ sichert, lautet (s. [6]):

(1.2) "Aus der Konvergenz der Folge $(f(x_n))$ folgt die Beschränktheit von $(x_n) \subset E$".

<u>Folgerung 2</u>: Es sei $k \in [0,1)$ und $f: E \longrightarrow E$ ein k-verdichtendes, lokal injektives Vektorfeld, für das (1.2) erfüllt ist. Dann gilt $f(E) = E$.

<u>Beweis</u>: Sei $z \in \overline{f(E)}$ und $F = I - f$. Dann existiert eine Folge $(x_n) \subset E$ mit $x_n - F(x_n) \longrightarrow z$. Sei $A = \{x_n, n = 1,2,...\}$ und $B = \{f(x_n), n = 1,2,...\}$. Es gilt $A \subset B + F(A)$. Da B relativ kompakt ist, folgt $\psi(A) \leq \psi(F(A))$. Nach (1.2) ist A beschränkt und $F|A$ deshalb k-kondensierend. Dann folgt $\psi(A) \leq k\,\psi(A)$ und $\psi(A) = 0$. Somit ist A relativ kompakt. Es existiert also ein $x \in E$, so dass o.B.d.A. $x_n \longrightarrow x$ gilt. Daraus folgt $f(x_n) \longrightarrow f(x) = z$ und $z \in f(E)$. Folgerung 1 liefert die Behauptung.

Falls in Folgerung 2 schärfer die Injektivität von f vorausgesetzt wird, ist f natürlich sogar ein Homöomorphismus. In Banachräumen erhielten Folgerung 2 Petryshyn und Fitzpatrick [6] (Corollary 4.1, dort für mengenwertige Abbildungen formuliert). Es entsteht die Frage nach einem Beispiel für ein lokal injektives k-verdichtendes ($0 \leq k < 1$) Vektorfeld, das (1.2) erfüllt, aber nicht (global) injektiv ist. Wir werden in 2. zeigen, dass es ein solches Beispiel nicht geben kann.

Durch die Verbindung von Gebietsinvarianzsätzen mit einer klassischen Aussage von Banach und Mazur [1] erhielt Riedrich [7] unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen für vollstetige Vektorfelder Homöomorphieaussagen. Wir zeigen nun im nächsten Abschnitt, dass dieser Weg auch für k-verdichtende Vektorfelder unter der relativ schwachen Voraussetzung 1.2 erfolgreich ist. Damit lässt sich die Surjektivitätsaussage von Petryshyn und Fitzpatrick zu einer Homöomorphieaussage verschärfen.

2. Homöomorphieaussagen

__Definition__: Es seien E und F topologische Räume. Eine Abbildung $f:E \longrightarrow F$ heisse lokaler Homöomorphismus, wenn es zu jedem $x \in E$ eine Umgebung U von x gibt, die durch f auf eine Umgebung von $f(x)$ homöomorph abgebildet wird.

__Lemma__: Es sei $k \in [0,1)$ und $f:E \longrightarrow E$ ein lokal injektives, k-verdichtendes Vektorfeld. Dann ist f ein lokaler Homöomorphismus.

__Beweis__: Sei $a \in E$. Es existiert eine offene Nullumgebung V aus E derart, dass $f \mid nV$ für jedes $n = 1,2,\ldots$ jeweils k-kondensierende Vektorfelder sind. Wir wählen n_0 so, dass $a \in n_0V$ gilt. Nach Voraussetzung gibt es eine abgeschlossene Umgebung U von a mit $U \subset n_0V$ derart, dass $f \mid U$ die Menge U injektiv auf $Y = f(U)$ abbildet.

Wir zeigen zunächst, dass $(f \mid U)^{-1}:Y \longrightarrow U$ stetig ist. Sei $F = I - f$ und $(y_n) \subset Y$ mit $y_n \longrightarrow y \in Y$. Mit $A = \{y_n, n = 1,2,\ldots\}$ und $B = \{f^{-1}(y_n), n = 1,2,\ldots\}$, gilt $B \subset A + F(B)$, denn es ist $y_n = f^{-1}(y_n) - F(f^{-1}(y_n))$. Weil $\bar{A}$ kompakt und $F \mid U$ k-kondensierend ist $(k<1)$, folgt $\psi(B) = 0$. Somit ist die Folge $(f^{-1}(y_n))$ und dann auch $(F(f^{-1}(y_n)))$ kompakt. O.B.d.A. gilt daher für ein $z \in E$ die Konvergenz

$$F(f^{-1}(y_n)) \longrightarrow z. \tag{2.1}$$

Wegen $y_n \longrightarrow y$ folgt hieraus

(2.2) $$f^{-1}(y_n) \longrightarrow y + z \in U.$$

Die Stetigkeit von F liefert $F(f^{-1}(y_n)) \longrightarrow F(y + z)$ und mit (2.1) die Gleichheit $F(y + z) = z$. Folglich gilt $y = (y + z) - F(y + z) = f(y + z)$ und daher

(2.3) $$f^{-1}(y) = y + z.$$

Aus (2.2) und (2.3) folgt $f^{-1}(y_n) \longrightarrow f^{-1}(y)$ und die Stetigkeit von $(f \mid U)^{-1}$ ist bewiesen.

Schliesslich ist Y auch Umgebung von f(a), denn nach Satz 1 ist f(int U) offen in E, woraus $f(a) \in f(\text{int } U) \subset \text{int } Y$ folgt. Das Lemma ist damit bewiesen.

Es interessieren jetzt hinreichende Bedingungen, die sichern, dass ein lokaler Homöomorphismus auch ein (globaler) Homöomorphismus ist. Für unsere Situation ist der folgende Spezialfall einer diesbezüglichen Aussage von Banach und Mazur geeignet:

Lemma 2: ([1],s.a. [7], S. 147.) Es seien E ein metrischer Vektorraum, $f: E \longrightarrow E$ ein lokaler Homöomorphismus mit $f(E) = E$. Ist f eigentlich (d.h., $f^{-1}(K)$ ist für jede kompakte Teilmenge $K \subset E$ kompakt), so muss f ein Homöomorphismus sein.

Nun ergibt sich leicht das Hauptergebnis unserer Note:

Theorem: Es sei $k \in [0,1)$ und $f: E \longrightarrow E$ ein k-verdichtendes, lokal injektives Vektorfeld. Gilt Bedingung (1.2), so ist f ein Homöomorphismus mit $f(E) = E$.

Beweis: Nach Lemma 1 ist f ein lokaler Homöomorphismus. Folgerung 2 sichert $f(E) = E$. Es reicht also zu zeigen, dass f eigentlich ist. Sei $K \subset E$ kompakt und $L = f^{-1}(K) =$

$= \{x \in E : f(x) \in K\}$. L ist beschränkt, denn sonst existiert eine Nullumgebung W derart, dass es für jedes n = 1,2,... ein $x_n \in L$ mit $x_n \notin nW$ gibt. Da $(f(x_n)) \subset K$ gilt, existiert eine konvergente Teilfolge $f(x_{n_k})$. Dann ist gemäss (1.2) (x_{n_k}) beschränkt und es gilt für ein n_o stets $x_{n_k} \in n_o W$ (k = 1, 2,...). Dieser Widerspruch zeigt in der Tat die Beschränktheit von L. Aus

$$L \subset K + F(L) \text{ folgt } \psi(L) \leq \psi(F(L))$$

und - da $F \mid L$ nun k-kondensierend ist - $\psi(L) \leq k\, \psi(L)$. Wegen $k < 1$ gilt $\psi(L) = 0$ und L ist damit relativ kompakt. Die Abgeschlossenheit von L folgt aus der Stetigkeit von f.

Unser Theorem ist eine Verschärfung der Aussage von Folgerung 2, wodurch das Surjektivitätsresultat von Petryshyn und Fitzpatrick erweitert wurde. Es wird gleichzeitig sichtbar, dass für k-verdichtende ($0 \leq k < 1$) Vektorfelder $f: E \longrightarrow E$ mit Forderung (1.2) die lokale Injektivität und die (globale) Injektivität äquivalente Eigenschaften sind.

Folgerung 3: Es seien $k \in (0,1)$, $F_1 : E \longrightarrow E$ eine k-kontrahierende Abbildung, $F_2 : E \longrightarrow E$ eine vollstetige Abbildung und $f = I - F_1 - F_2$. f sei lokal injektiv. Dann sichert jede der folgenden Bedingungen, dass f ein Homöomorphismus von E auf E ist:

(i) $(F_1 + F_2)(E)$ ist beschränkt

(ii) E ist ein Banachraum und es existiert ein $C > 0$, ein $x_o \in E$, $y_o \in E$ mit

$$\| f(x) - y_o \| \geq C \| x - x_o \| \qquad (x \in E)$$

(iii) E ist ein Banachraum und es existiert ein $C > 0$ mit

$$\| f(x) - f(o) \| \geq C \| x \| \qquad (x \in E)$$

Folgerung 3 mit (iii) verallgemeinert einen Satz von Riedrich ([7], Satz 4.40), der für f vollstetige Vektorfelder betrachtet.

Literatur

[1] S. BANACH u. S. MAZUR: Uber mehrdeutige stetige Abbildungen, Studia Math. V(1934), 174-178.

[2] J. DANEŠ: On densifying and related mappings and their application in nonlinear functional analysis, in: Theory of Nonlinear Operators, Proceedings of a summer-school 1972 Neuendorf, GDR, 1974, 15-56.

[3] S. HAHN: Gebietsinvarianzsatz und Eigenwertaussagen für konzentrierende Abbildungen, Comment. Math. Univ. Carolinae 18(1977), 697-713.

[4] R. NUSSBAUM: Degree theory for local condensing maps, Journ. Math. Anal. Appl. 37(1972), 741-766.

[5] W.V. PETRYSHYN: Remarks on condensing and k-set-contractive mappings, J. Math. Anal. Appl. 39(1972), 717-741.

[6] W.V. PETRYSHYN u. P.M. FITZPATRICK: A degree theory, fixed point theorems, and mapping theorems for multivalued noncompact mappings, Transactions Amer. Math. Soc. 194(1974), 1-25.

[7] T. RIEDRICH: Vorlesungen über nichtlineare Operatorengleichungen, Teubner-Texte, Teubner-Verlag Leipzig 1976.

[8] B.N. SADOWSKI: Asymptotically compact and densifying operators, Uspechi mat. nauk 27(1972), 81-146 (russisch)

Technische Universität
Sektor Mathematik
Mommsenstr. 13
8027 Dresden
D D R

(Oblatum 4.3. 1980)