Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Ali Deaibes

Mesures uniformes maximales

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 21 (1980), No. 3, 551--562

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106020`

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1980

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

21,3 (1980)

MESURES UNIFORMES MAXIMALES

Ali DEAIBES

Résumé: Pour tout espace uniforme (X,μ), on pose $\mathcal{K}^{\infty}$ l'ensemble des structures uniformes ν sur X telles que $U^{\infty}(X)=$ $=U^{\infty}(X,\nu)$.

On introduit l'espace $\widetilde{M}(X)$ des mesures uniformes maximales sur (X,μ), c'est-à-dire l'espace des formes linéaires sur $U^{\infty}(X)$ qui sont mesures uniformes sur (X,ν) pour tout $\nu \in \mathcal{K}^{\infty}$.

Sur un espace (X,μ) de type (A), une mesure de Baire m est uniforme maximale ssi pour tout espace métrique M et toute coz-fonction f de (X,μ) dans M, la mesure de Baire image f(m) est τ-régulière.

Les mesures uniformes maximales d'un espace χ_0-mesurable, sont exactement les mesures de Baire m ; telles que $m(X)=$ $=\sum_{i\in I} m(E_i)$ pour toute partition complètement coz(X)-additive $(E_i)_{i\in I}$ de X.

En outre, on caractérise les m-espaces de type (A) (cf. 1.2).

Mots et phrases clefs: Mesure uniforme, mesure uniforme maximale, complètement additive, mesure fortement additive, coz-fonction, espace de type (A), espace χ_0-mesurable.

Classification: 28A30, 54E15

Préliminaires. Pour tout espace uniforme (X,μ) on désigne par $U(X,\mu)$ ou U(X) l'espace vectoriel des fonctions réelles uniformément continues sur (X,μ), et par $U^{\infty}(X,\mu)$ ou $U^{\infty}(X)$ l'algèbre des fonctions bornées de U(X).

Dans l'algèbre $U^{\infty}(X)$, on désigne par $\mathcal{H}^{\infty}(X,\mu)$ ou $\mathcal{H}^{\infty}$ la compactologie uniformément équicontinue formée des parties H qui sont uniformément équicontinues, uniformément bornées, et simplement fermées (fermées pour la topologie de la convergence simple sur X).

On introduit l'espace $M^{\infty}(X,\mu)$ des mesures uniformes ou compactologiques sur (X,μ), c'est-à-dire l'espace des formes linéaires sur $U^{\infty}(X)$ qui sont simplement continues sur chaque $H \in \mathcal{H}^{\infty}$.

On fixe l'espace uniforme (X,μ), et on pose $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{K}^{\infty}$) l'ensemble des structures uniformes ν sur X; telles que $U(X,\nu) = U(X)$ [resp. $U^{\infty}(X,\nu) = U^{\infty}(X)$].

On munit $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^{\infty}$ de l'ordre naturel défini par la relation de finesse. L'ensemble ordonné $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{K}^{\infty}$) est inductif et en général ne possède pas un élément maximum.

Lorsque l'ensemble des éléments maximaux de $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{K}^{\infty}$), $\max\mathcal{K}$ (resp. $\max\mathcal{K}^{\infty}$), est réduit à un seul élément $\tau\mu$ (resp. $\tau^{\infty}\mu$), nous dirons que (X,μ) est un m-espace (resp. m^{∞}-espace). Lorsque (X,μ) est un m-espace (resp. m^{∞}-espace) tel que $\mu=\tau\mu$ (resp. $\mu=\tau^{\infty}\mu$), nous dirons qu'il est τ-espace (resp. τ^{∞}-espace ou "proximally-fine") [1].

Une forme linéaire m sur $U^{\infty}(X)$ est dite <u>mesure uniforme maximale</u>, si elle est uniforme sur (X,ν) pour tout $\nu \in \mathcal{K}^{\infty}$, ce qui équivaut à dire que m est simplement continue sur chaque $H \in \mathcal{M}^{\infty}$ où $\mathcal{M}^{\infty} = \bigcup\mathcal{H}^{\infty}(X,\nu)$; $\nu\in\mathcal{K}^{\infty}$ ou $\nu \in$ $\in \max\mathcal{K}^{\infty}$.

En particulier, les mesures uniformes maximales d'un m^{∞}-espace (X,μ), sont les mesures uniformes de $(X,\tau^{\infty}\mu)$.

On munit l'espace vectoriel $\overline{M}(X)$ des mesures uniformes maximales de l'ordre défini par le cône des fonctions positives de $U^{\infty}(X)$. Chaque espace $M^{\infty}(X,\nu)$ est engendré par son cône positif. Il en est de même de $\overline{M}(X)$.

On désigne par $coz(X,\mu)$ ou $coz(X)$ l'ensemble des co-noyaux associés aux fonctions f de $U(X)$, et par $Ba(X,\nu)$ ou $Ba(X)$ la σ-algèbre engendrée par $coz(X)$.

Les mesures signées bornées de $Ba(X)$ s'appellent les mesures de Baire de (X,μ). On identifie toute mesure de Baire m avec la forme linéaire sur $U^{\infty}(X)$ définie par l'intégrale de Lebesgue associée à m. Une forme linéaire m sur $U^{\infty}(X)$ provient d'une mesure de Baire ssi elle est σ-régulière, c'est-à-dire telle que

$$(f_n)_{n\geq 1} \subset U^{\infty}(X);\ f_n \downarrow 0 \Longrightarrow m(f_n) \longrightarrow 0.$$

Une mesure de Baire m est dite τ-régulière si pour toute suite généralisée $(f_i)_{i\in I}$ de $U^{\infty}(X)$, uniformément bornée et décroissante vers 0, on a $\lim_{i} m(f_i) = 0$.

On dit qu'un espace uniforme (X,μ) est de type (A) ou "inversion closed" si pour toute $f \in U(X)$; telle que $coz(f) = X$, la fonction $\frac{1}{f} \in U(X)$. Dans cette classe d'espaces, toute suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de $U^{\infty}(X)$ décroissante vers 0, définit un élément $H = \{f_n\}_n$ de $\mathcal{H}^{\infty}$ [7]. Il en résulte que toute mesure uniforme sur un espace de type (A), est σ-régulière.

Parmi les espaces uniformes de type (A), figurent les espaces χ_0-mesurables: (X,μ) est dit χ_0-mesurable si la limite simple sur X de toute suite $(f_n)_n$ de $U(X)$ est dans $U(X)$. Dans cette classe d'espace, on a $coz(X) = Ba(X)$ [4].

Une fonction f de (X,μ) dans un espace uniforme (Y,ν)

est dite coz-fonction, si

$$f^{-1}(\mathrm{xoz}(Y)) \subset \mathrm{coz}(X).$$

Sur un espace (X,μ) de type (A), une mesure de Baire m est uniforme maximale ssi pour tout espace métrique M et toute coz-fonction f de (X,μ) dans M, la mesure de Baire image f(m) est τ-régulière.

Soient Σ et Ω deux familles de parties d'un ensemble X. On dit que Ω est complètement Σ-additive si l'union de toute sous-famille de Ω appartient à Σ.

Une mesure signée bornée m sur un espace mesurable (X,Ω) ou Ω est une σ-algèbre sur X, est dite <u>fortement additive</u> si $m(X) = \sum_{i\in I} m(E_i)$ pour toute partition complètement Ω-additive $(E_i)_{i\in I}$ de X.

Les mesures uniformes maximales d'un espace χ_0 -mesurable sont exactement ses mesures de Baire fortement additives.

Enfin, soit H un élément de $\mathcal{M}^{\infty}$. On note d_H l'écart sur X défini par $d_H(x,y) = \sup_{f\in H} |f(x) - f(y)|$, et X_H l'espace métrique associé à (X,d_H). On désigne par h_H l'application canonique de X dans X_H. Si f est une fonction de H, on pose $\hat{f}$ la fonction sur X_H telle que $\hat{f}(h_H(x)) = f(x)$; $x\in X$. Alors on note $\hat{H} = \{\hat{f}/f\in H\}$.

1. <u>Mesures uniformes maximales sur un espace de type (A)</u>

1.1. <u>Proposition</u>. <u>Soit f une coz-fonction d'un espace (X,μ) de type (A) dans un espace métrique M. Alors il existe $\nu\in\mathcal{K}$; tel que f soit uniformément continue de (X,ν) dans (M,θ) où θ est la plus fine structure uniforme sur M compatible avec sa topologie.</u>

<u>Preuve</u>: On désigne par μ_0 la structure uniforme sur X définie par les recouvrements dénombrables de X extraits de coz(X), et par λ la structure uniforme initiale associée à f et à (M,θ). On note ν la borne supérieure de λ et de μ_0. Il est clair que la fonction f est uniformément continue de (X,ν) dans (M,θ), et que toute h de $U(X,\mu)$ est dans $U(X,\nu)$. Soit g une fonction de $U(X,\nu)$, et soit V un ouvert de $\mathbb{R}$. Prouvons que $g^{-1}(V)\in coz(X,\mu)$. Pour tout entier $k\geq 1$, il existe un recouvrement ouvert $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{L}}$ de M et un recouvrement dénombrable $(W_n)_{n\geq 1}$ de X extrait de coz(X); tels que g oscille au plus de $\frac{1}{k}$ sur chaque $U_\alpha^n = f^{-1}(V_\alpha)\cap W_n$. On note $K = \{(\alpha,n)\in L\times\mathbb{N} / g(U_\alpha^n)\subset V\}$, $S = Pr(K)$, et $K(n)$ la coupe de K pour $n\in S$.

On peut écrire

$$E_k = \bigcup_{(\alpha,n)\in K} U_\alpha^n = \bigcup_{(\alpha,n)\in K}(f^{-1}(V_\alpha)\cap W_n) = \bigcup_{n\in S}[(\bigcup_{\alpha\in K(n)} f^{-1}(V_\alpha))\cap W_n].$$

Or

$$\bigcup_{\alpha\in K(n)} f^{-1}(V_\alpha) = f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in K(n)} V_\alpha)\in coz(X).$$

L'ensemble E_k est alors réunion dénombrable de conoyaux de (X,μ) donc appartient à coz(X).

D'autre part, $g^{-1}(V) = \bigcup_{k\geq 1} E_k \in coz(X)$. On en déduit, avec [1, th. 2.3.2] que $g\in U(X,\mu)$ et que $\nu\in\mathcal{X}$.

En suivant [3], on dit qu'un espace uniforme (X,μ) est coz-fin si toute coz-fonction f de (X,μ) dans un espace uniforme (Y,ν) est uniformément continue.

1.2. <u>Proposition</u>. <u>Soit</u> (X,μ) <u>un espace uniforme de type</u> (A). <u>Alors les propriétés suivantes sont équivalents</u>:

a) (X,μ) <u>est un m-espace ou</u> m^∞<u>-espace</u>.

b) $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{K}^{\infty}$ possède un élément coz-fin qui est d'ailleurs $\tau\mu = \tau^{\infty}\mu$.

c) Si f (resp. g) est une coz-fonction de (X, μ) dans un espace métrique M (resp. T), alors la fonction t de (X, μ) dans l'espace métrique produit $M \times T$ où $t(x) = (f(x), g(x))$; $x \in X$, est une coz-fonction.

Preuve: Un espace (X, μ) de type (A) est un m-espace ssi c'est un m^{∞}-espace. On a alors $\tau\mu = \tau^{\infty}\mu$ [1, corollaire 3.2.12]. L'implication a) $\Longrightarrow$ b) résulte donc de la proposition précédente.

b) $\Longrightarrow$ c) on considère deux éléments ν et λ de $\mathcal{K}$; tels que f et g soient respectivement uniformément continues de (X, ν) dans (M, θ) et de (X, λ) dans (T, θ). Alors la fonction t est uniformément continue de $(X, \tau\mu)$ dans l'espace métrique $M \times T$, et par conséquent t est une coz-fonction de (X, μ) dans $M \times T$.

c) $\Longrightarrow$ a) Soient H et L deux éléments de $\mathcal{M}^{\infty}$. Les deux applications canoniques h_H et h_L sont respectivement coz-fonctions de (X, μ) dans X_H et de (X, μ) dans X_L. Alors t est une coz-fonction de (X, μ) dans $X_H \times X_L$. Il existe $\nu \in \mathcal{K}$; tel que t soit uniformément continue de (X, ν) dans $(X_H \times X_L, \theta)$.

D'autre part, le fait que $\hat{H} \in \mathcal{H}^{\infty}(X_H, \theta)$ et $\hat{L} \in \mathcal{H}^{\infty}(X_L, \theta)$ implique que H et L appartiennent à $\mathcal{H}^{\infty}(X, \nu)$. Il en résulte que $\mathcal{M}^{\infty}$ est stable par réunion finie, et que (X, μ) est m^{∞}-espace d'après [1, prop. 3.2.2].

En remarquant qu'un espace métriquement fin est de type (A) et qu'un espace coz-fin est métriquement fin, on en déduit:

1.3. Corollaire [3]. Un espace (X,μ) est coz-fin ssi il est τ^{∞}-espace métriquement fin.

1.4. Théorème. Soit (X,μ) un espace uniforme de type (A), et soit m une mesure de Baire sur (X,μ). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) m est uniforme maximale sur (X,μ),

b) pour tout espace métrique M et toute coz-fonction f de (X,μ) dans M, la mesure de Baire image f(m) est τ-régulière.

Preuve: a) $\Longrightarrow$ b). Soit ν un élément de $\mathcal{K}$; tel que f soit uniformément continue de (X,ν) dans (M,θ). La mesure m est uniforme sur (X,ν), et son image f(m) est uniforme sur (M,θ). D'après [5, lemme 14] la mesure f(m) est τ-réguliѐre.

b) $\Longrightarrow$ a). Soit H un élément de $\mathcal{M}^{\infty}$. Alors l'application canonique h_H est une coz-fonction de (X,μ) dans X_H, et la mesure de Baire image $h_H(m)$ est τ-régulière sur X_H. On munit X_H de sa structure uniforme θ . L'ensemble $\hat{H}$ est un élément de $\mathcal{H}^{\infty}(X_H,\theta)$, et par conséquent $h_H(m)$ est simplement continue sur $\hat{H}$. Or $h_H(m) = m(\hat{f}\circ h_H) = m(f)$. Il en résulte que m est simplement continue sur H et tout est dit.

2. Mesures uniformes maximales sur un espace χ_0-mesurable

2.1. Proposition. Soient (X,μ) un espace χ_0-mesurable et H un élément de $\mathcal{M}^{\infty}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition complètement coz(X)-additive $(W_i)_{i\in I}$ de X; telle que toute f de H oscille au plus de ε sur chaque W_i .

Preuve: On fixe $H \in \mathcal{M}^{\infty}$ et $\varepsilon > 0$. Il résulte de [1, th. 2.3.2] que les fonctions réelles continues sur (X,d_H) sont uniformément continues sur (X,μ), et que les ouverts de (X,d_H) appartiennent à coz(X). Il existe, d'après le théorème de Stone [6, th. 4.21] un recouvrement ouvert $(V_\alpha)_{\alpha\in L}$ de (X,d_H) localement fini et σ-discret; tel que toute f de H oscille au plus de ε sur chaque V_α. Soit $(L^n)_{n\geq 1}$ une partition dénombrable de L; telle que toute famille $(V_\alpha)_{\alpha\in L^n}$ soit discrète. On note $X_0 = \emptyset$ et $X_n = \bigcup_{\alpha\in L^n} V_\alpha$; $n\geq 1$. Pour tout $k\geq 1$ et tout $\alpha\in L^k$, on pose $U_\alpha^k = V_\alpha \cap$ $\cap (X_k \setminus \bigcup_{n<k} X_n)$. Chaque U_α^k est un élément de Ba(X) = coz(X). Une vérification simple montre que les éléments U_α^k, qui ne sont pas vides, définissent une partition de X complètement coz(X)-additive plus fine que $(V_\alpha)_{\alpha\in L}$, et tout est dit.

2.2. Proposition: Un espace $\mathcal{X}_0$-mesurable (X,μ) est m-espace ou m^{∞}-espace ssi l'intersection des deux partitions complètement coz(X)-additives de X est complètement coz(X)-additive. Alors ces partitions définissent une base de $\tau\mu$.

Preuve: Soit $(E_i)_{i\in I}$ une partition de X complètement coz(X)-additive. On munit l'ensemble I de la distance triviale $d(i,j) = \delta_{ij}$, et on pose h l'application de X dans I telle que $h(x) = i$ pour tout $x\in E_i$ et tout $i\in I$. Alors h est une coz-fonction de (X,μ) dans (I,d). Il existe d'après (1.1) un élément $\nu \in \mathcal{X}$; tel que h soit uniformément continue de (X,ν) dans (I,θ). Il en résulte que la partition $(E_i)_{i\in I}$ appartient à ν et est dans $\tau\mu$ lorsque (X,μ) est un m-espace. La condition est donc nécéssaire. D'autre part, si l'intersection des deux partitions complètement coz(X)-

additives de X est complètement coz(X)-additive, ces partitions définissent une base d'une structure uniforme π . On fixe f dans $U(X,\pi)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une partition complètement coz(X)-additive $(E_i)_{i\in I}$ de X; telle que f oscille au plus de ε sur chaque E_i. Pour tout i, on choisit un point t_i dans E_i, et on pose g la fonction de X dans $\mathbb{R}$; telle que $g(x) = \sum_{i\in I} f(t_i)\, 1_{E_i}(x)$ où 1_{E_i} est la fonction caractéristique de E_i. Alors g est une coz-fonction de (X,μ) dans $\mathbb{R}$, elle appartient donc à $U(X,\mu)$. Il en résulte que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction g dans $U(X;\mu)$; telle que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x\in X$, et par conséquent, $f \in$ $\in U(X,\mu)$. Alors la structure uniforme π appartient à $\mathcal{K}$, et est plus fine que tout $\nu \in \mathcal{K}$ d'après (2.1). On en déduit que (X,μ) est m-espace; tel que $\tau\mu = \pi$, et la condition est suffisante.

2.3. <u>Corollaire</u>: <u>Soit $(E_i)_{i\in I}$ une partition complètement coz(X)-additive d'un espace $\mathcal{K}_0$ -mesurable (X,μ), et soit m une mesure de Baire sur (X,μ) positive et fortement additive. Alors pour toute famille bornée de nombres réels $(\alpha_i)_{i\in I}$, la fonction $f = \sum_{i\in I} \alpha_i 1_{E_i}$ appartient à $U^{\infty}(X)$ et $m(f) = \sum_{i\in I} \alpha_i m(E_i)$.</u>

<u>Preuve</u>: Il existe $\nu \in \mathcal{K}$; tel que $(E_i)_{i\in I}$ soit une partition uniforme de (X,ν). Il en résulte que $f\in U^{\infty}(X,\nu)$. D'autre part, il existe une partie dénombrable A de I; telle que $m(X) = m(\bigcup_{i\in A} E_i)$. On en déduit que $m(f) = m[f\cdot(\sum_{i\in A} 1_{E_i})]$ et que $m(f) = \sum_{i\in I} \alpha_i\, m(E_i)$.

2.4. <u>Proposition</u>: <u>L'espace vectoriel des mesures signées fortement additives sur un espace mesurable (X,Ω), est</u>

engendré par son cône positif.

Preuve: Soit m une mesure signée fortement additive sur (X,Ω). On note m^+ la variation supérieure de m et m^- sa variation inférieure. Il existe, d'après le théorème de Hahn et de Jordan, une partition de X formée des deux éléments A et B de Ω ; telle que $m^+(E) = m(E\cap A)$ et $m^-(E) = m(E\cap B)$ pour tout $E \in \Omega$ [2]. Soit $(W_i)_{i\in I}$ une partition complètement Ω-additive de X. Alors

$$m^+(X) = m(A) = m[(\bigcup_{i\in I} W_i)\cap A] = \sum_{i\in I} m(W_i\cap A) = \sum_{i\in I} m^+(W_i).$$

On en déduit que m^+ est fortement additive et tout est dit.

2.5. Théorème: Soit m une mesure de Baire sur un espace χ_0-mesurable (X,μ). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) m est fortement additive.

b) m est uniforme maximale.

Preuve: D'après (2.4), on peut supposer m positive.

a) $\Longrightarrow$ b). Soit $(f_\alpha)_{\alpha\in L}$ une suite généralisée d'un élément $H \in \mathcal{M}^\infty$, uniformément bornée par 1, et tendant simplement vers 0. On fixe $\varepsilon > 0$. Il existe une partition complètement coz(X)-additive $(E_i)_{i\in I}$ de X telle que toute f de H oscille au plus de ε sur chaque E_i. Pour tout i, on choisit un point t_i dans E_i alors:

$$|f_\alpha(x) - \sum_{i\in I} f_\alpha(t_i)\, 1_{E_i}(x)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } \alpha\in L \text{ et tout } x\in X.$$

Il en résulte que:

$|m(f_\alpha)| \leq \varepsilon\, m(1) + |\sum_{i\in I} f_\alpha(t_i) m(E_i)|$ parce que m est positive fortement additive. Soit J une partie finie de I; telle

que $\sum_{i \in I \setminus J} m(E_i) \leq \varepsilon$, et soit α_0 un indice de L; tel que $\sum_{i \in J} |f_\alpha (t_i)| \leq \varepsilon$ pour tout $\alpha \leq \alpha_0$.
On en déduit que $|m(f_\alpha)| \leq 3\varepsilon [1 + 2m(1)]$ pour tout $\alpha \leq \alpha_0$. Par conséquent m est uniforme maximale.

b) $\Longrightarrow$ a). Soit $(E_i)_{i \in I}$ une partition complètement Ba(X)-additive de X. Pour toute partie finie F de I, on pose $h_F = \sum_{i \in F} 1_{E_i}$. Alors l'ensemble $H = \{h_F\}_F$ où F est une partie finie de I, est un élément de $\mathcal{M}^\infty$. Il en résulte que $m(\sum_{i \in I} 1_{E_i}) = \sum_{i \in I} m(E_i)$ et tout est dit.

B i b l i o g r a p h i e

[1] A. DEAIBES: Espaces uniformes et espaces de mesures, Pub. Dép. Math. Lyon, 1975, t. 12-4, 1-166.

[2] S. FOMINE et A. KOLMOGOROV: Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Editions Mir-Moscou, Traduction française, 1974.

[3] Z. FROLÍK: A note on metric-fine space, Proc. Amer. Soc. vol. 46(1974), 111-119.

[4] Z. FROLÍK: Measurable uniform spaces, Pacific J. Math. Vol. 55(1974), 93-105.

[5] Z. FROLÍK: Mesures uniformes, C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 277(1973), 105-108.

[6] J.L. KELLEY: General topology, Van Nostrand, Princeton, 1955.

[7] M. ZAHRADNÍK: Inversion-closed spaces have the Danielle Property, Seminar uniform spaces, 1973-1974, Prague (1975), 233-234.

Université Libanaise
Faculté des Sciences
Hadeth - Beyrouth
LEBANON

(Oblatum 10.3. 1980)