Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Jacques Bair; Joseph Vangeldère

Équivalences concernant la séparation de plusieurs cônes convexes

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 21 (1980), No. 3, 535--549

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106019

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

21,3 (1980)

EQUIVALENCES CONCERNANT LA SEPARATION DE PLUSIEURS CONES CONVEXES

Jacques BAIR, Joseph VANGELDERE

Résumé: Divers auteurs, tels Gale, Klee, Vlach, Deumlich, Elster, Nehse et Bolt'yanskii, ont introduit et analysé différentes méthodes pour séparer une famille finie d'ensembles convexes dans un espace vectoriel. Dans cette note, nous recherchons les liens entre toutes ces notions et nous montrons que les résultats sont vraiment significatifs dans le cas de cônes convexes.

Mots clefs: Séparation, ensemble convexe, cône.

Classification: 52A05

Dans un espace vectoriel quelconque, la séparation de deux ensembles par un hyperplan a été généralisée pour n ($n \geq 2$) ensembles de nombreuses manières: Vlach [13], Deumlich-Elster-Nehse [9] et Bair [1;2] ont déjà quelque peu étudié les rapports entre les différentes notions introduites jusqu'à ce jour. Nous nous proposons de compléter ce relevé, principalement dans le cas où les n ensembles considérés sont des cônes de sommet 0: on aboutit alors à quelques formulations équivalentes, ce qui permet de rapprocher certaines méthodes de séparation utilisées indépendamment par divers auteurs.

Nous nous placerons constamment dans un espace vectoriel réel E de dimension quelconque et adopterons les notations et la terminologie de [3] et de [4]; pour la bonne compréhension du texte, rappelons néanmoins qu'une <u>cellule convexe</u> (resp. <u>cellule proprement convexe</u>) est un ensemble convexe dont l'internat (resp. l'internat propre) n'est pas vide.

Parmi toutes les techniques utilisées pour séparer n ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$, Bair [2] a déjà montré la grande généralité et la maniabilité de la méthode introduite par Gale [10], selon laquelle $A_1, A_2, \dots, A_n$ seront dits <u>séparés au sens de Gale</u> s'il existe des demi-espaces fermés $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ tels que $A_j \subset \Sigma_j$ pour $j = 1,2,\dots,n$ et $\bigcap_{j=1}^{n} {}^{i}\Sigma_j = \emptyset$. Vlach [13] et Deumlich-Elster-Nehse [9] viennent de mettre en évidence un rapport existant entre cette définition et une approche plus analytique qui fait appel à des "familles séparantes" $(f_j, \lambda_j)_{j=1,2,\dots,n}$ constituées de formes linéaires f_j et de réels λ_j: nous dirons que $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont <u>séparés au sens de Vlach</u> s'il existe une famille séparante $(f_j, \lambda_j)_{j=1,2,\dots,n}$, c'est-à-dire des formes linéaires $f_1, f_2, \dots, f_n$ non toutes nulles et des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que

$A_j \subset \{x : f_j(x) \leq \lambda_j\}$ pour $j = 1,2,\dots,n$, $\sum_{j=1}^{n} f_j = 0$ et $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq 0$ [1;12]; de plus, les A_j seront dit <u>franchement séparés au sens de Vlach</u> s'il existe une famille séparante $(f_j, \lambda_j)_{j=1,2,\dots,n}$ pour laquelle on peut trouver un indice j_0 tel que $f_{j_0} \neq 0$ et $A_{j_0} \not\subset \{x : f_j(x) = \lambda_{j_0}\}$ [1;9].

Nous nous proposons tout d'abord d'étudier les rapports entre ces définitions et des notions voisines dans le cadre d'ensembles non vides quelconques.

Théorème 1. Pour des ensembles non vides quelconques $A_1, A_2, \dots, A_n$ de l'espace vectoriel réel E, considérons les propositions:

(1) $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont séparés au sens de Gale;

(2) $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont séparés au sens de Vlach par une famille $(f_j, \lambda_j)_{j=1,2,\dots,n}$;

(2') $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont séparés au sens de Vlach par une famille $(f_j, \lambda_j)_{j=1,2,\dots,n}$ telle que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0$.

(2") $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont franchement séparés au sens de Vlach par une famille $(f_1, \lambda_j)_{j=1,2,\dots,n}$;

(2'") $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont franchement séparés au sens de Vlach par une famille $(f_j, \lambda_j)_{j=1,2,\dots,n}$ telle que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0$;

(3) il existe des formes linéaires non nulles $f_1, f_2, \dots, f_n$, des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ et des réels non négatifs et non tous nuls $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ tels que $A_j \subset \{x : f_j(x) \leq \lambda_j\}$ pour $j = 1,2,\dots,n$; $\sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j = 0$, $\sum_{j=1}^{n} \mu_j \lambda_j \leq 0$;

(3') la proposition (3) avec, en plus, $\sum_{j=1}^{n} \mu_j \lambda_j = 0$;

(3") la proposition (3) avec, en plus, l'existence d'un indice j_0 tel que $A_{j_0} \not\subset \{x : f_{j_0}(x) = \lambda_{j_0}\}$ et $\mu_{j_0} > 0$;

(3'") la proposition (3") avec, en plus, $\sum_{j=1}^{n} \mu_j \lambda_j = 0$;

(4) dans l'espace-produit E^{n-1}, pour tout indice k de $1,2,\dots,n$; les ensembles $M_k = \prod_{j \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \{k\}} A_j$ et $N_k = A_k^{n-1} \cap \Delta$ sont séparés par un hyperplan, Δ désignant la diagonale de E^{n-1};

(4') dans l'espace-produit E^{n-1}, pour tout indice k de $1,2,\dots,n$, $\{0\}$ et $M_k - N_k$ sont séparés par un hyperplan;

(4") dans l'espace-produit E^{n-1}, pour tout indice k de $1,2,\dots,n$, M_k et N_k sont franchement séparés par un hyperplan;

(4'") *dans l'espace-produit* E^{n-1}, *pour tout indice* k *de* 1,2,...,n, $\{0\}$ et $M_k - N_k$ *sont franchement séparés par* un hyperplan.

Nous avons les implications suivantes:

$$(1) \Longleftrightarrow (3) \Longleftrightarrow (3') \Longrightarrow (2) \Longleftrightarrow (2') \Longleftrightarrow (4) \Longleftrightarrow (4') \Longleftarrow (2") \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (2'") \Longleftrightarrow (4") \Longleftrightarrow (4'") \Longleftrightarrow (3") \Longleftrightarrow (3'").$$

Preuve. Les équivalences entre (3) et (3'), (2) et (2'), (4) et (4'), (2") et (2'"), (4") et (4'"), (3") et (3'") sont évidentes, de même que les implications $(3) \Longrightarrow (2)$, $(2") \Longrightarrow$ $\Longrightarrow (2)$ et $(3") \Longrightarrow (2")$.

Par ailleurs, les équivalences entre (2) et (4), (2") et (4") ont déjà été prouvées précédemment par Vlach [12;13] et Bair [1].

Démontrons à présent l'équivalence entre (1) et (3). Si les A_j sont séparés au sens de Gale, il existe des demi-espaces fermés $\Sigma_j = \{x: f_j(x) \leq \lambda_j\}$ tels que $A_j \subset \Sigma_j$ pour j = = 1,2,...,n et $\bigcap_{j=1}^{n} {}^i \Sigma_j = \emptyset$. Par un théorème classique de séparation de plusieurs ensembles [1;12], il existe des formes linéaires non toutes nulles $f'_1, f'_2, \ldots, f'_n$ et des réels λ'_1, $\lambda'_2, \ldots, \lambda'_n$ tels que

$\Sigma_j \subset \{x: f'_j(x) \leq \lambda'_j\}$ pour j = 1,2,...,n, $\sum_{j=1}^{n} f'_j = 0$ et $\sum_{j=1}^{n} \lambda'_j = 0$.

Pour fixer les idées, supposons - quitte à renuméroter les indices - que $f'_1, f'_2, \ldots, f'_k$ sont non nulles, au contraire de $f_{k+1}, \ldots, f_n$; par conséquent, $\lambda'_j \geq 0$ pour j = k+1,...,n. Pour tout j de 1 à k, il existe un réel positif μ_j tel que $f'_j =$ $= \mu_j f_j$ et $\lambda'_j \geq \mu_j \lambda_j$; pour j de k+1 à n, il suffit de poser $\mu_j = 0$ car on a

$\sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j = \sum_{j=1}^{k} \mu_j f_j = \sum_{j=1}^{k} f'_j = 0$ et $\sum_{j=1}^{n} \mu_j \lambda_j =$
$= \sum_{j=1}^{k} \mu_j \lambda_j \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda'_j \leq 0$.

La réciproque est évidente si l'on choisit chaque Σ_j comme étant le demi-espace fermé $\{x:f_j(x) \leq \lambda_j\}$ intervenant dans la condition (3).

<u>Remarques</u>. 1) Cet énoncé donne en corollaire l'implication (1) $\Longrightarrow$ (2), déjà démontrée par Vlach [13] aux prix d'une argumentation assez longue; d'ailleurs, le raisonnement formulé à la fin de cette preuve donnerait une démonstration directe de cet énoncé.

2) En général, (2) n'implique pas (1) et, de même, (2") n'implique pas (3"); pour s'en convaincre, il suffit de prendre, dans un espace vectoriel de dimension infinie, trois ensembles dont les deux premiers A_1 et A_2 sont des cellules convexes d'internats disjoints, et le troisième A_3 un convexe ubiquitaire, qui ne peut donc être inclus dans aucun demi-espace fermé; il va sans dire que la forme f_3 est nulle dans la séparation de Vlach. De même, (2) n'implique pas (2") puisque la séparation de deux ensembles par un hyperplan n'est pas toujours franche.

Nous allons à présent déterminer des cas pour lesquels de nouvelles équivalences lient les notions précédentes.

<u>Théorème 2</u>. <u>Si chaque ensemble non vide</u> A_j ($j = 1,2,\ldots$ $\ldots,n$) <u>est inclus dans un demi-espace fermé, on a les équivalences suivantes</u>:

(1) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (3') $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (2') $\Longleftrightarrow$ (4) $\Longleftrightarrow$ (4') et

(2) $\Longleftrightarrow$ (2'") $\Longleftrightarrow$ (4") $\Longleftrightarrow$ (4'") $\Longleftrightarrow$ (3") $\Longleftrightarrow$ (3'").

<u>Preuve</u>. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont séparés au sens de Vlach

par une famille $(f_j, \lambda_j)_{j=1,2,\ldots,n}$, on peut supposer sans restriction que les formes $f_1,f_2,\ldots,f_k$ ne sont pas nulles, au contraire de $f_{k+1},\ldots,f_n$: si l'on pose $\Sigma_j = \{x:f_j(x) \leq \leq \lambda_j\}$ pour $j = 1,2,\ldots,k$, on voit sans peine que $A_j \subset \Sigma_j$ et $\bigcap_{j=1}^{k} \Sigma_j = \emptyset$; il suffit alors, pour $j = k+1,\ldots,n$, de prendre un demi-espace fermé Σ_j quelconque contenant A_j afin de vérifier la condition (1). De plus, si la séparation de A_j par la famille $(f_j, \lambda_j)_{j=1,2,\ldots,n}$ est franche, un raisonnement semblable à la preuve du théorème 1 conduit, à l'aide des Σ_j construits comme ci-dessus, à la vérification de la condition (3").

Corollaire 1. Pour des cellules convexes $A_1,A_2,\ldots,A_n$, distinctes de E, les propositions (1),(3),(3'),(2),(2'),(4) et (4') sont équivalentes, de même que (2"),(2'"),(4"),(4'"), (3") et (3'").

Preuve. Toute cellule convexe distincte de E peut être incluse dans un demi-espace fermé.

Il est possible de relier les conditions (2) et (2") lorsque les enveloppes linéaires ^lA_j des ensembles A_j considérés sont "bien distribuées" dans l'espace; en fait, il faut supposer que les ^lA_j possèdent la propriété d'intersection étudiée notamment par Coquet-Dupin [8] et Vangeldère [11].

Théorème 3. Soient des ensembles non vides $A_1,A_2,\ldots,A_n$ dont les enveloppes linéaires possèdent la propriété d'intersection; les propositions (2),(2'),(2"),(2'"),(4),(4'),(4") et (4'") sont équivalentes.

Preuve. Sous cette hypothèse, toute séparation au sens de Vlach de A_j est franche [11;4.2].

Ce résultat est intéressant dans la mesure où il ramène la séparation au sens de Vlach à la séparation franche, pour laquelle on dispose de plusieurs critères assez généraux [1;7.2]; on en déduit dès lors les énoncés suivants (dont les preuves, très simples, sont laissées au lecteur):

Corollaire 2. *Soient* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *des cellules convexes, distinctes de* E, *dont les enveloppes linéaires possèdent la propriété d'intersection. La condition*

$$(5) \qquad \bigcap_{j=1}^{n} {}^{i}A_j = \emptyset$$

est équivalente à chacune des propositions (1),(2),(2'),(2"),(2'"),(3),(3'),(3"),(3'"),(4),(4'),(4") *et* (4'").

Corollaire 3. *Soient* $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ *des cellules proprement convexes distinctes de* E, *et* A_n *un convexe non vide qui peut être inclus dans un demi-espace fermé. La condition*

$$(5') \qquad A_n \cap \bigcap_{j=1}^{n-1} {}^{i}A_j = \emptyset$$

est équivalente à chacune des 14 *assertions* (1) à (4'") et (5).

Corollaire 4. *Soient* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *des cellules proprement convexes distinctes de* E. *La condition*

(5") pour tout indice k de 1 à n, $A_k \cap \bigcap_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{k\}} A_j = \emptyset$

est équivalente à chacune des 15 *propositions* (1) à (5').

Nous allons à présent envisager le cas particulier où les A_j sont des cônes de sommet O, que nous supposerons pointés (ce qui n'est évidemment pas une restriction pour notre objet actuel); cette étude est intéressante en raison du fait que la séparation de plusieurs ensembles peut toujours être ramenée à celle de cônes dans un espace plus large.

<u>Théorème 4</u>. <u>Des ensembles non vides</u> $A_1, A_2, \dots, A_n$ <u>sont séparés au sens de Vlach si et seulement si les cônes pointés</u> $A'_j = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda (A_j \times \{1\})$ <u>pour</u> $j = 1,2,\dots,n$ <u>sont séparés au sens de Vlach dans l'espace produit</u> $E \times \mathbb{R}$.

<u>Preuve</u>. Supposons en premier lieu l'existence d'une famille $(f_j, \lambda_j)_{j=1,2,\dots,n}$ séparant les A_j au sens de Vlach, avec $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0$. Dans l'espace-produit $E \times \mathbb{R}$, construisons les formes linéaires non toutes nulles $\varphi_j (x,\alpha) = f_j(x) - \lambda_j \alpha$ pour $j = 1,2,\dots,n$: visiblement $A'_j \subset \{(x,\alpha) : \varphi_j(x,\alpha) \leq 0\}$ pour $j = 1,2,\dots,n$ et $\sum_{j=1}^{n} \varphi_j = 0$.

Réciproquement, si les A'_j sont séparés au sens de Vlach dans $E \times \mathbb{R}$, il existe des formes linéaires non toutes nulles φ_j et des réels λ_j tels que $A'_j \subset \{(x,\alpha): \varphi_j(x,\alpha) \leq \lambda_j\}$ pour $j = 1,2,\dots,n$, $\sum_{j=1}^{n} \varphi_j = 0$, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0$, ce qui entraîne $\lambda_j = 0$ pour chaque indice j. Posons $f_j(x) = \varphi_j(x,0)$ et $\lambda'_j = - \varphi_j(0,1)$. La famille $(f_j, \lambda'_j)_{j=1,2,\dots,n}$ sépare bien les A_j, car $A_j \subset \{x : f_j(x) \leq \lambda'_j\}$ pour $j= 1,2,\dots,n$, $\sum_{j=1}^{n} f_j = 0$ et $\sum_{j=1}^{n} \lambda'_j = 0$; de plus, toutes les formes linéaires f_j ne sont pas nulles, sinon il existerait au moins un λ'_r positif et un λ'_s négatif, ce qui conduirait à une absurdité puisque $\varphi_s(x,1) = f_s(x) - \lambda'_s = - \lambda'_s \leq 0$ pour un point x arbitraire de l'ensemble non vide A_s.

Un des avantages de la séparation de plusieurs cônes consiste en ce que les réels λ_j intervenant dans la famille séparante peuvent être parfaitement déterminés. Nous nous contentons de formuler ici les principaux résultats dans cette direction, laissant le soin au lecteur de complèter la liste ci-dessous en envisageant par exemple le cas de la séparation franche au sens de Vlach par une famille $(f_j, \lambda_j)_{j=1,2,\ldots,n}$ où tous les réels λ_j sont nuls.

<u>Théorème 5</u>. <u>Soient</u> $A_1, A_2, \ldots, A_n$ <u>des cônes pointés de sommet</u> 0. <u>La proposition</u> (2) <u>est équivalente à</u>

(2"") <u>il existe des formes linéaires non toutes nulles</u> $f_1, f_2, \ldots, f_n$ telles que $A_j \subset \{x : f_j(x) \leq 0\}$ <u>pour</u> $j=1,2,\ldots,n$ et $\sum_{j=1}^{n} f_j = 0$.

<u>De plus, l'assertion</u> (1) <u>est équivalente aux suivantes</u>:

(1') <u>il existe des demi-espaces fermés</u> $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ <u>associées à des hyperplans homogènes tels que</u> $A_j \subset \Sigma_j$ <u>pour</u> $j = 1,2,\ldots,n$ <u>et</u> $\bigcap_{j=1}^{n} \Sigma_j = \emptyset$;

(3"") <u>il existe des formes linéaires non nulles</u> $f_1, f_2, \ldots, f_n$ <u>et des réels non négatifs et non tous nuls</u> $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ <u>tels que</u> $A_j \subset \{x : f_j(x) \leq 0\}$ <u>pour</u> $j = 1,2,\ldots,n$ et $\sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j = 0$.

<u>Preuve</u>. La première partie de l'énoncé est immédiate. La seconde partie se démontre en observant que si un cône est inclus dans un demi-espace fermé $\{x : f(x) \leq \alpha\}$, il est aussi contenu dans le demi-espace "homogène" associé, à savoir $\{x : f(x) \leq 0\}$.

Pour des cônes pointés de sommet 0 qui sont des cellules (proprement) convexes, les résultats précédents peuvent être appliqués, ce qui conduit à quelques équivalences, complétées dans ce cas par des propriétés des cônes introduites indépendamment par Coquet-Dupin [8] et Bolt'yanskii [6,7].

Théorème 6. *Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des cônes pointés de sommet* O, *qui sont des cellules convexes*, *distinctes de* E, *dont les enveloppes linéaires possèdent la propriété d'intersection*. *Les propositions* (1),(1'),(2),(2'),(2"),(2'"), (2""),(3),(3'),(3"),(3'"),(3""),(4),(4'),(4"),(4'") *et* (5), *qui sont équivalentes entre elles, sont aussi équivalentes aux assertions suivantes*:

(6) *il existe un indice j_0 de $\{1,2,\ldots,n\}$ tel que* $A_{j_0} - (\bigcap_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{j_0\}} A_j) \neq E$;

(7) *les ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ne possèdent pas la propriété d'intersection*.

Preuve. Cet énoncé résulte du corollaire 2 et du théorème 5 de cette note, ainsi que des théorèmes 2.8 et 4.4 de [11].

Théorème 7. *Pour des cônes $A_1, A_2, \ldots, A_n$, pointés de sommet* O, *qui sont des cellules proprement convexes distinctes de* E, *les propositions* (1),(1'),(2),(2'),(2"),(2'"),(2""), (3),(3'),(3"),(3'"),(3""),(4),(4'),(4"),(4'"),(5),(5'),(5"), (6) *et* (7), *qui sont équivalentes entre elles, sont aussi équivalentes aux assertions suivantes*:

(6') *il existe un indice j_0 de $\{1,2,\ldots,n\}$ tel que A_{j_0} est franchement séparé de* $\bigcap_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{j_0\}} A_j$ *par un hyperplan*;

(6") *il existe un indice j_0 de $\{1,2,\ldots,n\}$ tel que* ${}^iA_{j_0} \cap (\bigcap_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{j_0\}} A_j) = \emptyset$;

(6'") *la famille des A_j peut être subdivisée en deux sous-familles non vides telles que l'intersection des cônes de la première sous-famille soit franchement séparée de l'inter-*

<u>section des cônes de la seconde sous-famille par un hyperplan</u>;

<u>Preuve</u>. Les résultats précédents montrent que les 21 propositions (1) à (6) et (7) sont équivalentes.

Par ailleurs, la séparation (nécessairement franche) par un hyperplan d'une cellule proprement convexe A_{j_0} et d'un convexe non vide $\bigcap_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{j_0\}} A_j$ se traduit par la condition nécessaire et suffisante $^iA_{j_0} \cap (\bigcap_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{j_0\}} A_j) = \emptyset$, et les conditions (6') et (6") sont équivalentes.

De plus, la condition (6") entraîne évidemment (5); réciproquement, on peut démontrer l'implication (5) $\Longrightarrow$ (6') en adaptant au cas d'un espace vectoriel quelconque un raisonnement formulé par Bolt'yanskii dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ [7; Théorème 6].

D'un autre côté, il est clair que (6') implique (6'"). Pour démontrer la réciproque, nous pouvons supposer sans restriction que les cônes $\bigcap_{j=1}^{k} A_j$ et $\bigcap_{j=k+1}^{n} A_j$ sont franchement séparé par un hyperplan. Si $\bigcap_{j=1}^{k} {}^iA_j$ ou $\bigcap_{j=k+1}^{n} {}^iA_j$ est vide, on peut appliquer l'équivalence entre (5) et (6') pour conclure. Au contraire, si $\bigcap_{j=1}^{k} {}^iA_j$ et $\bigcap_{j=k+1}^{n} {}^iA_j$ ne sont pas vides, les cônes $\bigcap_{j=1}^{k} A_j$ et $\bigcap_{j=k+1}^{n} A_j$ sont doués de points proprement internes, d'où leur séparation franche équivaut à la vacuité de $^i(\bigcap_{j=1}^{k} A_j) \cap {}^i(\bigcap_{j=k+1}^{n} A_j) = \bigcap_{j=1}^{n} {}^iA_j$: (5) permet encore de conclure.

Dans le même ordre d'idées, signalons que Vlach [13] introduit également une séparation plus exigeante que les précédentes: il s'agit d'une séparation de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ par une famille $(f_j, \lambda_j)_{j=1,2,\dots,n}$ où toutes les formes linéaires f_j sont non nulles. Cette condition entraîne évidemment (2), mais il est possible de construire un contre-exemple montrant que la réciproque n'est pas toujours valable comme le montre l'exemple repris dans la remarque 2) ci-dessus. Nous nous proposons de caractériser géométriquement ce nouveau type de séparation dans le cas de cônes convexes.

Théorème 8. *Les propositions suivantes sont équivalentes lorsque les ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des cônes pointés de sommet 0;*

(1") *il existe des demi-espaces fermés $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ associés à des hyperplans homogènes tels que $A_j \subset \Sigma_j$ pour $j = 1,2,\dots,n$, $\bigcap_{j=1}^{n}{}^{i}\, \Sigma_j = \emptyset$ et $\bigcap_{j=1}^{n} \Sigma_j$ est un sous-espace vectoriel, qui coïncide nécessairement avec $\bigcap_{j=1}^{n}{}^{m}\, \Sigma_j$;*

(8) *il existe des formes linéaires non nulles $f_1, f_2, \dots, f_n$ et des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $A_j \subset \{x : f_j(x) \leq \lambda_j\}$ pour $j = 1,2,\dots,n$, $\sum_{j=1}^{n} f_j = 0$ et $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq 0$;*

(8') *la condition* (8) *avec, en plus,* $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0$;

(8") *la condition* (8) *avec, en plus, chaque* λ_j *nul.*

Preuve. Les propositions (8),(8') et (8") sont visiblement équivalentes.

Supposons la condition (8") satisfaite et désignons par Σ_j le demi-espace fermé $\{x : f_j(x) \leq 0\}$. Il est clair que chaque A_j est inclus dans Σ_j; par ailleurs, $\bigcap_{j=1}^{n}{}^{i}\, \Sigma_j = \emptyset$ et $\bigcap_{j=1}^{n} \Sigma_j = \bigcap_{j=1}^{n}{}^{m}\, \Sigma_j$ puisque $\sum_{j=1}^{n} f_j = 0$; en conclusion, (8") implique (1").

Réciproquement, s'il existe des demi-espaces fermés $\Sigma_j = \{x : f_j(x) \leq 0\}$ tels que $A_j \subset \Sigma_j$ pour $j = 1,2,\dots,n$,

$\bigcap_{j=1}^{n} {}^{i}\Sigma_j = \emptyset$ et $\bigcap_{j=1}^{n} \Sigma_j = \bigcap_{j=1}^{n} {}^{m}\Sigma_j$, nous allons démontrer qu'il existe des réels strictement positifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $\ldots, \lambda_n$ tels que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j = 0$, ce qui livrera automatiquement (8"). Le résultat est connu dans $\mathbb{R}^n$ puisque l'hypothèse $\bigcap_{j=1}^{n} \Sigma_j = \bigcap_{j=1}^{n} {}^{m}\Sigma_j$ équivaut au fait que les objectifs $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont discordants [5; théorèmes 21 et 22]; nous allons adapter au cas d'un espace quelconque le raisonnement formulé par Bragard et Vangeldère [5] dans $\mathbb{R}^n$. Désignons par P le polyèdre convexe $\bigcap_{j=1}^{n} \{x : f_j(x) \leq 0\}$; le polaire P^* de P est donné par la formule $P^* = \sum_{j=1}^{n} [0:f_j)$ [4; III.4.4]; par ailleurs, le fait que P soit un sous-espace entraîne l'appartenance de l'origine à l'internat de P^*, puisque P^* est lui-même un sous-espace; dès lors, dans l'espace dual E^*, l'origine appartient à $\sum_{j=1}^{n}]0:f_j)$, ce qui signifie l'existence de réels strictement positifs λ_j (pour $j = 1,2,\ldots,n$) tels que $P = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j$.

Terminons en signalant un cas particulier pour lequel les conditions (1) et (1") sont équivalentes.

<u>Théorème 9</u>. <u>Soient</u> $A_1, A_2, \ldots, A_n$ <u>des cellules convexes, distinctes de</u> E, <u>dont les enveloppes linéaires possèdent la propriété d'intersection. Si, pour tout indice</u> k <u>de</u> $\{1,2,\ldots$ $\ldots,n\}$, $\bigcap_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{k\}} {}^{i}A_j \neq \emptyset$, <u>les conditions</u> (1) <u>et</u> (1") <u>sont équivalentes</u>.

<u>Preuve</u>. Dans les conditions de l'énoncé, la séparation au sens de Gale équivaut, vu le corollaire 2, à la séparation franche au sens de Vlach, qui a lieu si et seulement si $\bigcap_{j=1}^{n} {}^{i}A_j = \emptyset$; or, sous cette dernière hypothèse, on sait qu'il existe une famille $(f_j, \lambda_j)_{j=1,2,\ldots,n}$ séparant franchement

les A_j, avec $f_k \neq 0$ pour tout $j = 1,2,\ldots,n$ [1;7.3.4].

R e f e r e n c e s

[1] BAIR J.: Séparation d'ensembles dans un espace vectoriel, dissertation doctorale, Université de Liège, 1974.

[2] BAIR J.: A propos d'un problème de Klee sur la séparation de plusieurs ensembles, Math. Scand. 38 (1976), 341-349.

[3] BAIR J. et FOURNEAU R.: Etude géométrique des espaces vectoriels - une introduction, Lecture Notes in Math., vol. 489, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[4] BAIR J. et FOURNEAU R.: Etude géométrique des espaces vectoriels II - polyèdres et polytopes convexes, ed. ronéotypée, Université de Liège, 1976.

[5] BRAGARD L. et VANGELDERE J.: Points efficaces en programmation à objectifs multiples, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège 46(1977), 27-41.

[6] BOLT'YANSKII V.G.: The separation property of a system of convex cones, Izv. Akad. Nauk. Armyan SSR,7 (1972), 250-257.

[7] BOLT'YANSKII V.G.: The method of tents in the theory of extremal problems, Russian Math. Survey, 30(1975), 1-54.

[8] COQUET G. et DUPIN J.C.: Sur l'intersection des translatés d'ensembles convexes, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, 47(1978), 299-306.

[9] DEUMLICH R., ELSTER K.H. et NEHSE R.: Recent results on separation of convex sets, Math. Operat. 9(1978), 273-296.

[10] GALE D.: Separation theorems for families of convex sets, Bull. Amer. Math. Soc. 59(1953),556.

[11] VANGELDERE J.: Propriété de l'intersection en dimension quelconque, à paraître.

[12] VLACH M.: A separation theorem for finite families, Comment. Math. Univ. Carolinae 12(1971), 655-660.

[13] VLACH M.: A concept of separation for families of sets, Ek. Mat. Obzor 12(1976), 316-324.

Institut de Mathématique

Université de Liège

Avenue des Tilleuls, 15

B-4000 Liège

Belgium

(Oblatum 4.2. 1980)