Osvald Demuth; Jan Polívka

О представимости линейных функционалов в пространстве шифров равномерно непрерывных на сегменте $0\triangle 1$ конструктивных функций

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 20 (1979), No. 4, 765--780

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105967`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
20, 4 (1979)

О ПРЕДСТАВИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ШИФРОВ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ НА СЕГМЕНТЕ $0 \Delta 1$ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Й. ПОЛИВКА (J. POLÍVKA)

Содержание: В заметке вводятся конструктивные объекты типа φ, обладающие почти всюду на сегменте $0 \Delta 1$ значением. Доказано, что любой линейный функционал в пространстве шифров равномерно непрерывных на $0 \Delta 1$ конструктивных функций представим в виде интеграла Римана-Стилтьеса по объекту типа φ слабо ограниченной вариации на $0 \Delta 1$. Приведено необходимое и достаточное условие нормируемости таких линейных функционалов.

Ключевые слова: Интеграл Римана-Стилтьеса, равномерно непрерывная конструктивная функция, линейный функционал.

Classification: Primary 02E99, 26A42
Secondary 46E15, 26A45

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями из [5]. Буквы k, l, m, n, p, q, s и t служат переменными для натуральных чисел (НЧ), i и j - переменными для целых чисел, a, b и c - переменными для рациональных чисел (РЧ) и буквы v, w, x, y и z - с индексами или без них - переменными для конструктивных действительных чисел (КДЧ). Множество всех КДЧ мы обозначаем посредством $\mathcal{D}$. Мы заметим, что любое КДЧ является арифметическим действительным числом (АДЧ) [7].

Сначала мы займемся конструктивным аналогом интеграла Римана-Стилтьеса. Соответствующие классические определения и результаты можно найти, например, в [1].

Мы напомним, что а) ступенчатыми остовами мы называем слова вида $a_0 \gamma a_1 \dots \gamma a_m \delta y_1 \gamma y_2 \dots \gamma y_m$, где m НЧ (т.е. положительное целое число), $\{a_i\}_{i=0}^{m}$ возрастающая система РЧ, $a_0 = 0 \,\&\, a_m = 1$, а $\{y_j\}_{j=1}^{m}$ система КДЧ;

б) для любых последовательности ступенчатых остовов $\{G_n\}_n$, где

(1) $\forall n \,(G_n = a_0^n \gamma a_1^n \dots \gamma a_{m_n}^n \delta y_1^n \gamma y_2^n \dots \gamma y_{m_n}^n)$,

и КДЧ x и v мы посредством $P(v, \{G_n\}_n, x)$ обозначаем: существует последовательность НЧ $\{p_n\}_n$ такая, что

$$\forall n \,(p_n \leq m_n \,\&\, a_{p_n-1}^n < x < a_{p_n}^n) \,\&\, (y_{p_n}^n \xrightarrow[n \to \infty]{} v);$$

в) функциями мы называем всюду определенные конструктивные функции действительной переменной, которые постоянны на $\wedge x\,(x \leq 0)$ и на $\wedge x\,(1 \leq x)$;

г) если $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, то $\langle S, \mathcal{F} \rangle$ алгорифм, применимый к всякому сегменту H и выдающий по нему КДЧ - супремум множества $\wedge y\,(\exists x\,(x \in H \,\&\, y = \mathcal{F}(x)))$.

Определения. 1) Объектами типа φ мы называем а) функции и б) выражения типа $[\{F_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$, где ${}^0y$ и ${}^1y$ КДЧ и $\{F_n\}_n$ последовательность ступенчатых остовов такая, что для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ (см. [5]) выполнено $\exists z\, P(z, \{F_n\}_n, x)$.

2) Пусть $\mathcal{G}$ функция, $[\{F_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$ объект типа φ и x и z КДЧ. Тогда мы определим:

$Val(z, \mathcal{G}, x) \rightleftharpoons (0 \leq x \leq 1 \,\&\, z = \mathcal{G}(x))$,

$$Val(z, [\{F_n\}_n, {}^0y, {}^1y], x) \rightleftharpoons \neg\neg(x = 0 \,\&\, z = {}^0y \vee$$
$$\vee P(z, \{F_n\}_n, x) \vee x = 1 \,\&\, z = {}^1y).$$

Замечание 1. 1) Ввиду теоремы Г.С. Цейтина о непрерывности [4] для любой функции $\mathcal{F}$ можно построить объект типа φ - $[\{F_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$ такой, что $\forall xz(Val(z, [\{F_n\}_n, {}^0y, {}^1y], x) \supset z = \mathcal{F}(x))$.

2) Равенство и операции для последовательностей ступенчатих остовов определены в [5]. Согласно лемме 1 и теореме 3 из [5] выполнено: если $\{F_n\}_n \in L_1$ (соотв. $\{F_n\}_n \in S$), а ${}^0y$ и ${}^1y$ КДЧ, то $[\{F_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$ объект типа φ.

Замечание 2. Пусть $[\{G_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$ объект типа φ. Тогда ввиду замечания 2 из [6] и теоремы Г.С. Цейтина [4] существуют плотная в $0 \Delta 1$ последовательность КДЧ из $0 \nabla 1$. $\{\bar{x}_k\}_k$ и последовательность КДЧ $\{\bar{y}_k\}_k$ такие, что $\forall k(P(\bar{y}_k, \{G_n\}_n, \bar{x}_k) \,\&\, \forall p \exists \ell m(\bar{x}_k - 2^{-p} < \bar{x}_\ell < < \bar{x}_k < \bar{x}_m < \bar{x}_k + 2^{-p} \,\&\, |\bar{y}_\ell - \bar{y}_k| + |\bar{y}_m - \bar{y}_k| < 2^{-p}))$ и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $\exists y(P(y, \{G_n\}_n, x) \,\& \,\&\, \forall p \exists \ell m(x - 2^{-p} < \bar{x}_\ell < x < \bar{x}_m < x + 2^{-p} \,\&\, |\bar{y}_\ell - y| + |\bar{y}_m - y| < 2^{-p}))$.

Определения. Пусть Θ_1 и Θ_2 объекты типа φ, H сегмент, а $\{x_i\}_{i=0}^{\lambda}$ система КДЧ. Тогда

1) мы скажем, что система $\{x_i\}_{i=0}^{\lambda}$ является

а) Θ_1-допустимой, если $\forall i(0 \le i \le \lambda \supset \exists v\, Val(v, \Theta_1, x_i))$;

б) (Θ_1, Θ_2, H)-пригодной, если существует НЧ τ

такое, что $\lambda = 2\tau$ & $Э_\lambda(H) = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{2\tau} = Э_m(H)$, система $\{x_{2i}\}_{i=0}^{\tau}$ является Θ_2-допустимой, а $\{x_{2j-1}\}_{j=1}^{\tau}$ – Θ_1-допустимой;

2) сегмент H мы назовем Θ_1-допустимым, если система КДЧ $\{Э_\lambda(H), Э_m(H)\}$ Θ_1-допустима (и, следовательно, $H \subseteq 0 \Delta 1$);

3) если $\{y_i\}_{i=0}^{2\sigma}$ (Θ_1, Θ_2, H)-пригодная система КДЧ и w КДЧ, то мы посредством $\mathscr{Y}(w, \Theta_1, \Theta_2, \{y_i\}_{i=0}^{2\sigma})$ обозначим: существуют системы КДЧ $\{v_j\}_{j=0}^{\sigma}$ и $\{z_\ell\}_{\ell=1}^{\sigma}$ такие, что $\forall j\,(0 \leq j \leq \sigma \supset Val(v_j, \Theta_2, y_{2j}))\ \&\ \forall \ell\,(1 \leq \ell \leq \sigma \supset Val(z_\ell, \Theta_1, y_{2\ell-1}))\ \&\ w = \sum_{\ell=1}^{\sigma} z_\ell \cdot (v_\ell - v_{\ell-1})$;

4) мы скажем, что

а) КДЧ w является значением интеграла Римана-Стилтьеса от Θ_1 по Θ_2 на сегменте H, и будем писать $RS(w, \Theta_1, \Theta_2, H)$, если выполнено: H является Θ_1- и Θ_2-допустимым и существует последовательность НЧ $\{k_m\}_m$ такая, что для любых НЧ m, (Θ_1, Θ_2, H)-пригодной системы КДЧ $\{y_i\}_{i=0}^{2\sigma}$ и КДЧ z верно $\max_{1 \leq j \leq \sigma}(y_{2j} - y_{2j-2}) < 2^{-k_m}$ & $\mathscr{Y}(z, \Theta_1, \Theta_2, \{y_i\}_{i=0}^{2\sigma}) \supset |z - w| < 2^{-m}$;

б) Θ_1 является RS-интегрируемым по Θ_2 на H, если $\exists w\,(RS(w, \Theta_1, \Theta_2, H))$.

<u>Замечание 3</u>. Повторив классические рассуждения, приведенные, например, в [1], мы получаем следующие утверждения.

Пусть Θ_1 и Θ_2 объекты типа φ, H и L сегменты, $L \subseteq H \subseteq 0 \Delta 1$, $v_{0,1}$, $v_{0,2}$, $v_{1,1}$, $v_{1,2}$ и w КДЧ и P АДЧ такие, что $\forall j\,(1 \leq j \leq 2 \supset Val(v_{0,j}, \Theta_j, Э_\lambda(H))\ \&$ $\&\ Val(v_{1,j}, \Theta_j, Э_m(H)))\ \&\ RS(w, \Theta_1, \Theta_2, H)\ \&\ P \in H$ и сегмент L является Θ_1- и Θ_2-допустимым. Тогда

а) выполнено $RS(v_{1,1} \cdot v_{1,2} - v_{0,1} \cdot v_{0,2} - w, \Theta_2, \Theta_1, H)$, б) Θ_1 является RS-интегрируемым по Θ_2 на L ,

в) $\neg\neg\exists j(1 \le j \le 2 \,\&\, \forall k \neg\neg \exists l \forall x_1 x_2 y_1 y_2 (\forall i (1 \le i \le 2 \supset |x_i - P| < 2^{-l} \,\&\, x_i \in H \,\&\, Val(y_i, \Theta_j, x_i)) \supset |y_1 - y_2| < 2^{-k}))$,

г) если существует плотная в $(H)^{\circ}$ последовательность КДЧ $\{x_k\}_k$ такая, что $\forall k\, Val(0, \Theta_2, x_k)$, то $w = v_{1,1} \cdot v_{1,2} - v_{0,1} \cdot v_{0,2}$.

Определения. Пусть Θ_1 и Θ_2 , где $\Theta_2 \rightleftharpoons [\{G_m\}_m, {}^0y, {}^1y]$, объекты типа φ , пусть выполнено (1), v и ϑ КДЧ, $v \in 0 \Delta 1$, и H Θ_1- и Θ_2-допустимый сегмент. Тогда мы

1) а) скажем, что Θ_1 является непрерывным (соотв. псевдонепрерывным) в точке v , и будем писать $Cont(\Theta_1, v)$ (соотв. $Pseudocont(\Theta_1, v)$), если $\exists z\, Val(z, \Theta_1, v)$ и для всякого НЧ p существует (соотв. не может не существовать) НЧ q такое, что $\forall xyz(x \in 0 \Delta 1 \,\&\, |x - v| < 2^{-q} \,\&\, Val(y, \Theta_1, x) \,\&\, Val(z, \Theta_1, v) \supset |y - z| < 2^{-p})$; аналогичным способом определяются понятия непрерывности и псевдонепрерывности Θ_1 справа (соотв. слева) в точке v ;

б) скажем, что Θ_1 является неубывающим (соотв. невозрастающим), если для всяких КДЧ x_1, x_2, y_1 и y_2 , для которых верно $0 \le x_1 < x_2 \le 1 \,\&\, Val(y_1, \Theta_1, x_1) \,\&\, Val(y_2, \Theta_1, x_2)$, выполнено $y_1 \le y_2$ (соотв. $y_2 \le y_1$);

2) а) посредством $BVS(\vartheta, \Theta_1, H)$ обозначим: для любых Θ_1-допустимой возрастающей системы КДЧ на H $\{x_i\}_{i=0}^{\lambda}$ и системы КДЧ $\{y_i\}_{i=0}^{\lambda}$ выполнено
$\forall i(0 \le i \le \lambda \supset Val(y_i, \Theta_1, x_i)) \supset \sum_{j=1}^{\lambda} |y_j - y_{j-1}| \le \vartheta$;

б) скажем, что Θ_1 является объектом слабо ограниченной вариации на H , если $\exists m\, BVS(m, \Theta_1, H)$;

3) а) определим $Red(\{G_m\}_m) \rightleftharpoons \forall k i (1 \le i \le m_k \supset$
$\neg\neg \exists x (a^k_{i-1} < x < a^k_i \ \& \ \forall p \neg\neg \exists q \forall w z (|w - x| < 2^{-q} \ \&$
$P(z, \{G_m\}_m, w) \supset |z - y^k_i| < 2^{-p})))$;

б) если $Red(\{G_m\}_m)$, то мы обозначим
$Var(\vartheta, \Theta_2, H) \rightleftharpoons (BVS(\vartheta, \Theta_2, H) \ \& \neg \exists m \ BVS(\vartheta - 2^{-m}, \Theta_2, H))$;

в) мы скажем, что ϑ является существенной вариацией Θ_2 на $0 \triangle 1$, и будем писать $SVar(\vartheta, \Theta_2, 0 \triangle 1)$, если выполнено $\exists m \ BVS(m, \Theta_2, 0 \triangle 1)$ и существует объект типа φ $[\{F_m\}_m, {}^0y, {}^1y]$ такой, что $\{F_m\}_m = \{G_m\}_m \ \&$ $\& \ Red(\{F_m\}_m) \ \& \ Var(\vartheta, [\{F_m\}_m, {}^0y, {}^1y], 0 \triangle 1)$.

Ввиду замечаний 2 и 3 легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 1</u>. Пусть Θ, Θ_1 и Θ_2, где $\Theta_1 \rightleftharpoons [\{F_m\}_m, {}^0y, {}^1y]$ и $\Theta_2 \rightleftharpoons [\{G_m\}_m, {}^0\bar{y}, {}^1\bar{y}]$, объекты типа φ, а v и w КДЧ. Тогда

1) если $Red(\{G_m\}_m)$, (1) и $\{w_p\}_p$ последовательность КДЧ такая, что $\forall p (w_p = |y^p_1 - {}^0\bar{y}| + \sum_{j=2}^{m_p} |y^p_j - y^p_{j-1}| +$ $+ |{}^1\bar{y} - y^p_{m_p}|)$, то $\forall p \ Var(w_p, [\{G_p\}_m, {}^0\bar{y}, {}^1\bar{y}], 0 \triangle 1) \ \&$
$(BVS(w, \Theta_2, 0 \triangle 1) \equiv \forall p (w_p \le w)) \ \&$
$(Var(w, \Theta_2, 0 \triangle 1) \equiv (w_p \xrightarrow[p \to \infty]{} w))$;

2) если $\{G_m\}_m = \{F_m\}_m \ \& \ Red(\{G_m\}_m) \ \& \ {}^0y = {}^0\bar{y} \ \& \ {}^1y = {}^1\bar{y}$, то
$(BVS(w, \Theta_1, 0 \triangle 1) \supset BVS(w, \Theta_2, 0 \triangle 1)) \ \&$
$(RS(w, \Theta, \Theta_1, 0 \triangle 1) \supset RS(w, \Theta, \Theta_2, 0 \triangle 1))$;

3) $RS(w, \Theta, [\{F_m\}_m, {}^0y, {}^1y], 0 \triangle 1) \supset$
$RS(v \cdot w, \Theta, [v \cdot \{F_m\}_m, v \cdot {}^0y, v \cdot {}^1y], 0 \triangle 1)$;

4) если $Red(\{F_n\}_n) \& Red(\{G_n\}_n)$, то
$RS(w,\theta,\theta_1,0\vartriangle 1) \& RS(v,\theta,\theta_2,0\vartriangle 1) \supset$
$RS(w+v,\theta,[\{F_n\}_n+\{G_n\}_n, {}^0y+{}^0\bar{y}, {}^1y+{}^1\bar{y}], 0\vartriangle 1)$.

__Пример 1.__ Существуют $\{F_{1,n}\}_n \in L_1$ и $\{F_{2,n}\}_n \in L_1$ такие, что $\forall i x v (1 \le i \le 2 \& Val(v,[\{F_{i,n}\}_n,0,0],x) \supset v=0)$ и, следовательно, для любого объекта θ типа φ верно $\forall i (1\le i \le 2 \supset RS(0,\theta,[\{F_{i,n}\}_n, 0,0], 0\vartriangle 1))$. С другой стороны, $[\{0\gamma 1\delta 1\}_n, 0, 0]$ не является RS-интегрируемым по $[\{F_{1,n}\}_n + \{F_{2,n}\}_n, 0, 0]$ на $0\vartriangle 1$.

__Замечание 4.__ Пусть θ, где $\theta \rightleftharpoons [\{G_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$, объект типа φ и ϑ КДЧ такие, что

(2) $$BVS(\vartheta,\theta,0\vartriangle 1).$$

1) Пусть P АДЧ, $P\in 0\vartriangle 1$. Тогда, очевидно, верно
$\forall p \neg\neg \exists q\, \forall l\, \forall x_1 x_2 y_1 y_2 (\forall i (1\le i\le 2 \supset 0<(x_i-P)\cdot(-1)^l < 2^{-q} \& Val(y_i,\theta,x_i)) \supset |y_1-y_2| < 2^{-p})$.

Следовательно, если $Red(\{G_n\}_n)$ и v КДЧ, $v \in 0 \triangledown 1 \& \exists x\, Val(x,\theta,v)$, то θ не может не быть псевдонепрерывным или справа или слева в точке v.

2) Мы используем замечание 2 и построим плотную в $0\vartriangle 1$ последовательность КДЧ из $0\triangledown 1$ $\{\bar{x}_k\}_k$ и последовательность КДЧ $\{\bar{y}_k\}_k$, обладающие описанными там свойствами. Тогда ввиду 1) верно $\forall k\, Pseudocont(\theta,\bar{x}_k)$ и для почти всех КДЧ x из $0\vartriangle 1$ выполнено $Pseudocont(\theta,x)$.

a) Пусть k, l и m НЧ такие, что

(3) $$\bar{x}_k < \bar{x}_l \& |\bar{y}_k - \bar{y}_l| > 2^{-m}.$$

Тогда существуют КДЧ z_1 и z_2, последовательности НЧ $\{q_t\}_t$

и пар НЧ $\{s_{0,t} \square s_{1,t}\}_t$ и КДЧ v такие, что

$$\neg\exists p(x_1=\bar{y}_p \vee x_2=\bar{y}_p) \& \min(\bar{y}_k,\bar{y}_l)<x_1<x_1+2^{-m}<x_2<$$
$$<\max(\bar{y}_k,\bar{y}_l) \& s_{0,1}=k \& s_{1,1}=l \& \forall t((s_{0,t}=s_{1,t}=q_t \vee \bar{x}_{s_{0,t}}+$$
$$+\frac{1}{3}\cdot(\bar{x}_{s_{1,t}}-\bar{x}_{s_{0,t}})<\bar{x}_{q_t}<\bar{x}_{s_{1,t}}-\frac{1}{3}\cdot(\bar{x}_{s_{1,t}}-\bar{x}_{s_{0,t}})) \& (s_{0,t+1}=s_{1,t+1}=s_{0,t} \&$$
$$\& (s_{0,t}=s_{1,t} \vee x_1<\bar{y}_{q_t}<x_2) \vee (s_{0,t+1}=s_{0,t} \& s_{1,t+1}=q_t \vee s_{0,t+1}=$$
$$=q_t \& s_{1,t+1}=s_{1,t}) \&$$
$$\& \min(\bar{y}_{s_{0,t+1}},\bar{y}_{s_{1,t+1}})<x_1<x_2<\max(\bar{y}_{s_{0,t+1}},\bar{y}_{s_{1,t+1}})))$$

и v является общим пределом последовательностей КДЧ $\{\bar{x}_{s_{0,t}}\}_t$ и $\{\bar{x}_{s_{1,t}}\}_t$.

в) ввиду 1),а) и того, что множество всех троек НЧ $k \square l \square m$, для которых верно (3), является рекурсивно перечислимым, существует последовательность КДЧ из $0 \triangledown 1$ $\{v_s\}_s$ такая, что для всякого АДЧ P, $P \in 0 \vartriangle 1 \& \neg\exists s(P=v_s)$, выполнено $\forall p \neg\neg\exists q \forall x_1 x_2 y_1 y_2 (\forall i(1 \le i \le 2 \supset P-2^{-q}<x_i<$ $<P+2^{-q} \& \neg(x_i=P) \& Val(y_i,\theta,x_i)) \supset |y_1-y_2|<2^{-p})$.

Следовательно, если $Red(\{G_m\}_m)$, то $\forall x(x \in 0 \triangledown 1 \&$ $\& \neg\exists s(x=v_s) \& \exists y\, Val(y,\theta,x) \supset Pseudocont(\theta,x))$.

г) Мы построим НЧ $æ$ и последовательности НЧ $\{m_m\}_m$, систем НЧ $\{\{p_i^m\}_{i=1}^{2^{m_m}}\}_m$ и ступенчатых остовов $\{F_m\}_m$ такие, что для любого НЧ m выполнено $\vartheta<2^{æ} \& m_m=2m+3+2æ \&$ $\forall i(1 \le i \le 2^{m_m} \supset (i-1)\cdot 2^{-m_m}<\bar{x}_{p_i^m}<i\cdot 2^{-m_m}) \&$

$$F_m \rightleftharpoons 0 \gamma 1\cdot 2^{-m_m} \gamma 2\cdot 2^{-m_m} \ldots \gamma (2^{m_m}-1)\cdot 2^{-m_m} \gamma 1 \delta \bar{y}_{p_1^m} \gamma \bar{y}_{p_2^m} \ldots \gamma \bar{y}_{p_{2^{m_m}}^m}.$$

Тогда ввиду (2) для всякого НЧ m выполнено ${}^0\!\int_0^1 |F_m \mp F_{m+1}|_0<$ $<2^{-m}$ и, следовательно, $\{F_m\}_m \in L_1$. Ввиду отмеченных выше свойств θ и последовательностей $\{\bar{x}_k\}_k$ и $\{\bar{y}_k\}_k$, 1), в) и леммы 1 выполнено $Red(\{F_m\}_m) \& \{F_m\}_m = \{G_m\}_m$ &

$\& BVS(\vartheta, [\{F_m\}_m, {}^0y, {}^1y], 0 \triangle 1) \& \forall x (x \in 0 \triangledown 1$ &

$\& \neg \exists s (x = v_s) \& \exists y P(y, \{F_m\}_m, x) \supset Pseudocont([\{F_m\}_m, {}^0y, {}^1y], x))$.

На основании части 2)в) замечания 4 легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 2</u>. Пусть θ неубывающий объект типа $\mathcal{Y}$. Тогда существует последовательность КДЧ из $0 \triangledown 1$ $\{v_s\}_s$ такая, что

$\forall x (x \in 0 \triangledown 1 \& \neg \exists s (x = v_s) \& \exists y\, Val(y, \theta, x) \supset Cont(\theta, x))$.

<u>Лемма 3</u>. Пусть θ, где $\theta \rightleftharpoons [\{G_m\}_m, {}^0y, {}^1y]$, объект типа $\mathcal{Y}$ и w КДЧ такие, что $Red(\{G_m\}_m) \& Var(w, \theta, 0 \triangle 1)$. Тогда существуют неубывающий объект типа $\mathcal{Y}$ $[\{F_m\}_m, 0, w]$ и последовательность КДЧ из $0 \triangledown 1$ $\{v_s\}_s$ такие, что $\{F_m\}_m \in L_1 \& Red(\{F_m\}_m)$ и $\forall x y (x \in 0 \triangledown 1 \& \neg \exists s (x = v_s)$ &
$Val(y, [\{F_m\}_m, 0, w], x) \supset Cont([\{F_m\}_m, 0, w], x)$ &
$(\exists v\, Val(v, \theta, x) \supset Cont(\theta, x) \& Var(y, \theta, 0 \triangle x)))$.

<u>Пример 2</u>. Существует $\{F_m\}_m \in L_1$ такое, что $Red(\{F_m\}_m)$ и для θ, $\theta \rightleftharpoons [\{F_m\}_m, 0, 0]$, верно $BVS(1, \theta, 0 \triangle 1)$ &
$\neg \forall m \exists x (x \in 2^{-m} \triangledown 2^{-m+1} \& Cont(\theta, x))$ и, следовательно, $\neg \exists w\, Var(w, \theta, 0 \triangle 1)$ и неверно, что для почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$ выполнено $Cont(\theta, x)$.

<u>Лемма 4</u>. Пусть θ объект типа $\mathcal{Y}$, $\mathcal{F}$ функция, $\{k_\ell\}_\ell$ последовательность НЧ, H θ-допустимый сегмент и z КДЧ, для которых выполнено

$\forall \ell x_1 x_2 (|x_1 - x_2| < 2^{-k_\ell} \supset |\mathcal{F}(x_1) - \mathcal{F}(x_2)| < 2^{-\ell}) \& BVS(z, \theta, H)$.

Тогда существует КДЧ w такое, что $RS(w,\mathcal{F},\theta,H) \& |w| \leq$ $\leq \langle S,|\mathcal{F}|\rangle_{\llcorner H \lrcorner} \cdot z$ и для любых НЧ ℓ , $(\mathcal{F},\theta,H)$-пригодной системы КДЧ $\{x_i\}_{i=0}^{2z}$ и КДЧ v выполнено

$$\max_{1\leq j\leq z} |x_{2j}-x_{2j-2}| \leq 2^{-k\ell} \& \mathcal{Y}(v,\mathcal{F},\theta,\{x_i\}_{i=0}^{2z}) \supset |v-w| \leq 2^{-\ell} \cdot z .$$

Ввиду части а) замечания 3 и леммы 4 верно следующее утверждение.

<u>Лемма 5</u>. Пусть θ объект типа φ слабо ограниченной вариации на $0 \vartriangle 1$, $\{x_i\}_{i=0}^{\lambda}$ возрастающая система КДЧ и $\{y_i\}_{i=0}^{\lambda}$ система КДЧ такие, что $x_0=0 \& x_\lambda=1 \& \forall i\,((0\leq i\leq$ $\leq \lambda \supset Val(y_i,\theta,x_i)) \& (0<i<\lambda \supset Pseudocont(\theta,x_i)))$.

Тогда для любого НЧ q существует равномерно непрерывная функция G_q такая, что

$$\langle S,|G_q|\rangle_{\llcorner 0\vartriangle 1 \lrcorner} \leq 1 \& \forall w\,(RS(w,G_q,\theta,0\vartriangle 1) \supset$$
$$\supset \sum_{j=1}^{\lambda} |y_j - y_{j-1}| - 2^{-q} < w) .$$

Конструктивным аналогом пространства всех равномерно непрерывных на сегменте $[0,1]$ (классических) функций является полное сепарабельное нормированное пространство C (см. [3]) заданное списком Ч , $\mathfrak{M}$, + , $\cdot$, $\| \|$, где Ч алфавит, $\mathfrak{M}$ нормальное множество слов в Ч (являющихся шифрами равномерно непрерывных на $0 \vartriangle 1$ функций), + (соотв. $\cdot$) нормальный алгорифм, осуществляющий операцию сложения элементов $\mathfrak{M}$ (соотв. умножения элементов $\mathfrak{M}$ на КДЧ), а $\| \|$ нормальный алгорифм, выдающий по любому $P \in \mathfrak{M}$ КДЧ - норму P . Мы заметим, что для любого $P \in \mathfrak{M}$ мы (пользуясь универсальным алгорифмом) можем построить отвечающую ему функцию (обозначаемую нами посредством $[\![P]\!]$) и алгорифмический регулятор ее равномерной непрерывности. Наоборот, для любой равномерно непрерывной функции $\mathcal{F}$ существует $P \in \mathfrak{M}$ такое, что $[\![P]\!] = \mathcal{F}$. Для всяких P_1 и P_2 из $\mathfrak{M}$ и КДЧ v выполнено $\|P_1\| = \langle S, |[\![P_1]\!]| \rangle \llcorner 0 \vartriangle 1 \lrcorner \;\&\; [\![P_1 + P_2]\!] = [\![P_1]\!] + [\![P_2]\!] \;\&\; [\![v \cdot P_1]\!] = v \cdot [\![P_1]\!]$.

В следующем буква T – с индексами или без них – служит переменной для элементов множества $\mathfrak{M}$.

Нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ мы называем линейным функционалом в пространстве C, если $\forall T_1 T_2 v\, (!\mathfrak{A} \llcorner T_1 \lrcorner \;\&\; \mathfrak{A} \llcorner T_1 \lrcorner \in \mathcal{D} \;\&$
$\mathfrak{A} \llcorner T_1 + T_2 \lrcorner = \mathfrak{A} \llcorner T_1 \lrcorner + \mathfrak{A} \llcorner T_2 \lrcorner \;\&\; \mathfrak{A} \llcorner v \cdot T_1 \lrcorner = v \cdot \mathfrak{A} \llcorner T_1 \lrcorner \;\&$
$\&\, (\|T_1\| = 0 \supset \mathfrak{A} \llcorner T_1 \lrcorner = 0))$.

Если $\mathfrak{A}$ линейный функционал в C, то согласно теореме Г.С. Цейтина [4] верно $\exists x \forall T\, (|\mathfrak{A} \llcorner T \lrcorner| \leq x \cdot \|T\|)$.

Функционал $\mathfrak{A}$ в пространстве C мы называем нормируемым, если существует КДЧ x, являющееся нормой $\mathfrak{A}$, т.е. такое, что

$$\forall T (|\mathfrak{A} \llcorner T \lrcorner| \leq x \cdot \|T\|) \;\&\; \forall m \neg\neg \exists T ((x - 2^{-m}) \cdot \|T\| < |\mathfrak{A} \llcorner T \lrcorner|) .$$

Мы переходим к исследованию представимости линейных функционалов в C. Соответствующие классические результаты содержатся, например, в [2].

<u>Теорема 1</u>. Пусть Θ объект типа $\mathcal{Y}$ и x КДЧ такие, что $\mathrm{BVS}\,(x, \Theta, 0 \vartriangle 1)$. Тогда существует линейный функционал $\mathfrak{A}$ в пространстве C, для которого выполнено

а) $\forall T (\mathrm{RS}(\mathfrak{A} \llcorner T \lrcorner, [\![T]\!], \Theta, 0 \vartriangle 1) \;\&\; |\mathfrak{A} \llcorner T \lrcorner| \leq x \cdot \|T\|)$,

б) КДЧ w является нормой $\mathfrak{A}$ в том и только том случае, если верно

(4) $$\mathrm{SVar}\,(w, \Theta, 0 \vartriangle 1) .$$

Доказательство. Ввиду замечания 1 можно без ограничения общности предположить, что θ задан в виде $[\{G_m\}_m, {}^0y, {}^1y]$. Согласно лемме 4 и замечанию 4 существуют линейный функционал $\mathscr{U}$ в пространстве C и $\{F_m\}_m \in L_1$, для которых выполнено а), $\mathrm{Red}(\{F_m\}_m)\ \&\ \{F_m\}_m = \{G_m\}_m$ и, следовательно, ввиду леммы 1 верно $\forall T(RS(\mathscr{U}\llcorner T\lrcorner, [\![T]\!], [\{F_m\}_m, {}^0y, {}^1y], 0\Delta 1))$. Кроме того, для любого НЧ p можно построить линейный функционал в C – $\mathscr{U}_p$, КДЧ w_p и последовательность элементов множества $\mathfrak{M}$ – $\{P_{p,q}\}_q$ такие, что

$\forall T(RS(\mathscr{U}_p\llcorner T\lrcorner, [\![T]\!], [\{F_p\}_m, {}^0y, {}^1y], 0\Delta 1))\ \&$

$\mathrm{Var}(w_p, [\{F_p\}_m, {}^0y, {}^1y], 0\Delta 1)$ и

(5) $\forall q(\|P_{p,q}\| \le 1\ \&\ w_p - 2^{-q} < \mathscr{U}\llcorner P_{p,q}\lrcorner)$

(см. лемму 5).

1) Пусть w КДЧ такое, что (4). Тогда согласно леммам 1 и 4 $\forall p(w_p \le w)\ \&\ (w_p \xrightarrow[p\to\infty]{} w)\ \&\ \forall T(|\mathscr{U}\llcorner T\lrcorner| \le w\cdot\|T\|)$ и для любого НЧ p верно (5). Следовательно, w – норма $\mathscr{U}$.

2) Пусть КДЧ w является нормой $\mathscr{U}$. Тогда для всякого НЧ p ввиду (5) выполнено $w_p \le w$.

Пусть t НЧ.

Если $w < 2^{-t}$, то $\forall p(w - 2^{-t} < w_p \le w)$.

Пусть $2^{-t-1} < w$. Тогда ввиду сепарабельности C существует $P \in \mathfrak{M}$, для которого выполнено $0 < \|P\|\ \&\ (w - 2^{-t-1})\cdot\|P\| < \mathscr{U}\llcorner P\lrcorner$. На основании леммы 4 легко доказать, что $\mathscr{U}_p\llcorner P\lrcorner \xrightarrow[p\to\infty]{} \mathscr{U}\llcorner P\lrcorner$ и, следовательно, существует НЧ p_t такое, что $\forall p(p_t \le p \supset (w - 2^{-t-1})\cdot\|P\| < \mathscr{U}_p\llcorner P\lrcorner \le w_p\cdot\|P\|)$ и, таким образом, $\forall p(p_t \le p \supset w - 2^{-t} < w_p \le w)$.

Итак, $w_p \xrightarrow[p\to\infty]{} w$ и $\mathrm{Var}(w, [\{F_m\}_m, {}^0y, {}^1y], 0\Delta 1)$ (см. лемму 1), т.е. верно (4).

Замечание 5. Для любых КДЧ v и w, $0 \le v < v+w \le 1$, мы посредством $\mathcal{F}_{v \square w}$ обозначим функцию такую, что
$\forall x ((x \le v \supset \mathcal{F}_{v \square w}(x) = 1) \,\&\, (v + w \le x \supset \mathcal{F}_{v \square w}(x) = 0))$

и $\mathcal{F}_{v \square w}$ линейна на сегменте $v \triangle (v+w)$. Тогда выполнено

$$\text{(6)}\quad \begin{array}{l} \forall m\, v_1 v_2 w_1 w_2 (\forall i (1 \le i \le 2 \supset 2^{-m} \le w_i \,\&\, 0 \le v_i < v_i + w_i \le 1) \supset \\ |\mathcal{F}_{v_1 \square w_1} - \mathcal{F}_{v_2 \square w_2}| \le 2^{m} \cdot (|v_1 - v_2| + |w_1 - w_2|)) \end{array}$$

и существует нормальный алгорифм $\mathcal{L}$ такой, что
$\forall v w (0 \le v < v + w \le 1 \supset ! \mathcal{L}_{\llcorner} v \square w_{\lrcorner} \,\&\, \mathcal{L}_{\llcorner} v \square w_{\lrcorner} \in \mathfrak{M} \,\&$
$\& \,[\![\mathcal{L}_{\llcorner} v \square w_{\lrcorner}]\!] = \mathcal{F}_{v \square w})$.

Если $\mathcal{U}$ линейный функционал в пространстве C и m и p НЧ, $p < m$, то ввиду (6) существует всюду определенная равномерно непрерывная конструктивная функция двух действительных переменных – $\mathcal{G}$ такая, что $\forall v w (0 \le v \le 1 - 2^{-p} \,\&\, 2^{-m} \le w \le 2^{-p} \supset$
$\supset \mathcal{G}(v \square w) = \mathcal{U}_{\llcorner} \mathcal{L}_{\llcorner} v \square w_{\lrcorner\lrcorner})$ и, следовательно, для всякого сегмента H, $H \subseteq 0 \triangle (1 - 2^{-p})$, можно построить КДЧ z, являющееся колебанием $\mathcal{G}$ на множестве $\Lambda x \square y (x \in H \,\&\, y \in 2^{-m} \triangle 2^{-p})$.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{U}$ линейный функционал в пространстве C. Тогда существуют $\{F_n\}_m \in L_1$, НЧ k и КДЧ ${}^1y$ такие, что $BVS(2^{k}, [\{F_m\}_m, 0, {}^1y], 0 \triangle 1)$ и

$$\text{(7)}\quad \forall T (RS(\mathcal{U}_{\llcorner} T_{\lrcorner}, [\![T]\!], [\{F_m\}_m, 0, {}^1y], 0 \triangle 1)).$$

Доказательство. Пусть $Q \in \mathfrak{M}$ и k НЧ такие, что $\forall x ([\![Q]\!](x) = 1)$ и

$$\text{(8)}\qquad \forall T (|\mathcal{U}_{\llcorner} T_{\lrcorner}| \le 2^{k-1} \cdot \|T\|).$$

Мы определим ${}^1y \rightleftharpoons \mathcal{U}_{\llcorner} Q_{\lrcorner}$, для всякого НЧ n
$t_n \rightleftharpoons 2n + 2k + 3$, $p_n \rightleftharpoons 3n + 2k + 7$,

$y_i^n \rightleftharpoons \mathcal{U}\!\llcorner \mathcal{L}\llcorner (i-1)\cdot 2^{-t_n} \square 2^{-p_n} \lrcorner\lrcorner$, где $1 \le i \le 2^{t_n}$, и

$F_n \rightleftharpoons 0 \gamma 1\cdot 2^{-t_n} \gamma 2\cdot 2^{-t_n} \dots \gamma 1 \delta y_1^n \gamma y_2^n \dots \gamma y_{2^{t_n}}^n$ (см. замечание 5).

Пусть n НЧ. Пусть для любого НЧ i, $1 \le i \le 2^{t_n}$, ϑ_i^n КДЧ, являющееся колебанием $\mathcal{U}\llcorner \mathcal{L}\llcorner v \square w \lrcorner\lrcorner$ на множестве $\wedge x \square y ((i-1)\cdot 2^{-t_n} \le x \le i\cdot 2^{-t_n} - 2^{-p_n} \,\&\, 2^{-p_{n+1}} \le y \le 2^{-p_n})$.
Мы построим рекурсивное множество НЧ B_n такое, что
$\forall i\, ((i \in B_n \supset 1 \le i \le 2^{t_n} \,\&\, 2^{-n-2} < \vartheta_i^n) \,\&\, (1 \le i \le 2^{t_n} \,\&$
$\& \neg (i \in B_n) \supset \vartheta_i^n < 2^{-n-1}))$.

Пусть q_n число элементов множества B_n. Тогда ввиду (8) выполнено $q_n < 2^{n+k+1}$. Следовательно, ${}^{0}\!\int_0^1 | F_n \mp F_{n+1} |_\sigma <$ $< 2^{-n}$. Далее, $|y_1^n| + \sum_{j=2}^{2^{t_n}} |y_j^n - y_{j-1}^n| + |{}^1 y - y_{2^{t_n}}^n| \le 2^k$.

Таким образом, $\{F_n\}_n \in L_1$, $[\{F_n\}_n, 0, {}^1 y]$ объект типа $\mathcal{F}$ (см. замечание 1) и $BVS(2^k, [\{F_n\}_n, 0, {}^1 y], 0 \triangle 1)$.

Для любого НЧ m существует S_δ-множество ([5]) $\mathcal{Y}^m$ меры меньшей чем 2^{-m} такое, что $\forall x (\neg\neg \exists n i\, (m \le n \,\&$
$0 \le i \le 2^{t_n} \,\&\, (i \in B_n \,\&\, (i-1)\cdot 2^{-t_n} \le x \le i\cdot 2^{-t_n} \vee \neg(i \in B_n) \,\&$
$x \in 0 \triangle 1 \,\&\, |x - i\cdot 2^{-t_n}| \le 2^{-p_n})) \supset x \in \mathcal{Y}^m)$.

Пусть x КДЧ, $x \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{Y}^m)$. Тогда можно построить последовательность НЧ $\{i_\ell\}_\ell$ и КДЧ y такие, что
$\forall \ell\, (1 \le i_\ell \le 2^{t_\ell} \,\&\, x \in (i_\ell - 1)\cdot 2^{-t_\ell} \triangledown i_\ell \cdot 2^{-t_\ell} \,\&\, (m \le \ell \supset \neg(i_\ell \in B_\ell) \,\&$
$\& (i_\ell - 1)\cdot 2^{-t_\ell} + 2^{-p_\ell} < x)) \,\&\, \forall \ell\, (m \le \ell \supset |y_{i_\ell}^\ell - y| \le 2^{-\ell})$

и, следовательно,
$P(y, \{F_n\}_n, x) \,\&\, |\mathcal{U}\llcorner \mathcal{L}\llcorner x - 2^{-p_m - 1} \square 2^{-p_m} \lrcorner\lrcorner - y| < 2^{-m+1}$.

Пусть $P \in \mathfrak{M}$, $\|P\| \le 1$, и p НЧ. Тогда существуют КДЧ w, НЧ q и m, возрастающая система КДЧ $\{x_i\}_{i=0}^{2^q}$, система

КДЧ $\{v_i\}_{i=0}^{2^q}$ и система элементов $\mathfrak{M} - \{R_j\}_{j=1}^{2^q-1}$, для которых выполнено $RS(w, [\![P]\!], [\{F_n\}_n, 0, {}^1y], 0 \Delta 1)$ &
$\forall xy(|x-y| \le 2^{-q+2} \supset |[\![P]\!](x) - [\![P]\!](y)| < 2^{-p-k-2}) \,\&\, p+q+4 < m \,\&$
$x_0 = 0 \,\&\, x_{2^q} = 1 \,\&\, \forall i (0<i<2^q \supset \neg(x_i \in \mathcal{F}^m) \,\&\, |x_i - i\cdot 2^{-q}| < 2^{-q-5}) \,\&$
$\forall i (0 \le i \le 2^q \supset Val(v_i, [\{F_n\}_n, 0, {}^1y], x_i)) \,\&$
$|w - \sum_{j=1}^{2^q} [\![P]\!](\frac{1}{2} \cdot (x_{j-1}+x_j)) \cdot (v_j - v_{j-1})| \le 2^{-p-2} \,\&$
$\forall j (1 \le j \le 2^q - 1 \supset R_j \equiv \mathcal{L}_\llcorner x_j - 2^{-p_m-1} \square 2^{-p_m}\lrcorner)$.

Пусть $\bar{P} \rightleftharpoons ([\![P]\!](\frac{1}{2} \cdot (x_0+x_1))\cdot R_1 +$
$\sum_{j=2}^{2^q-1} [\![P]\!](\frac{1}{2} \cdot (x_{j-1}+x_j))\cdot(R_j + (-1)\cdot R_{j-1}) +$
$+ [\![P]\!](\frac{1}{2} \cdot (x_{2^q-1}+x_{2^q}))\cdot(Q_1 +$
$+ (-1)\cdot R_{2^q-1}))$. Тогда $\|\bar{P} + (-1)\cdot P\| < 2^{-p-k-1}$ и, следовательно, ввиду (8) верно $|\mathcal{U}_\llcorner \bar{P}\lrcorner - \mathcal{U}_\llcorner P \lrcorner| < 2^{-p-2}$.

Однако, имеет место $|\mathcal{U}_\llcorner \bar{P}\lrcorner - \sum_{j=1}^{2^q} [\![P]\!](\frac{1}{2} \cdot (x_{j-1}+x_j))\cdot(v_j - v_{j-1})| \le$
$\sum_{j=1}^{2^q-1} 2\cdot|\mathcal{U}_\llcorner R_j\lrcorner - v_j| \le (2^q-1)\cdot 2\cdot 2^{-m+1} < 2^{-p-2}$
и мы получаем $|w - \mathcal{U}_\llcorner P\lrcorner| < 2^{-p}$.

Таким образом, выполнено (7).

Литература

[1] ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М.: Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 3, Москва 1960.

[2] ШИЛОВ Г.Е.: Математический анализ (Специальный курс.), Москва 1960.

[3] ШАНИН Н.А.: Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова, том 67(1962), 15-294.

[4] ЦЕЙТИН Г.С.: Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах, там же, 295-361.

[5] ДЕМУТ О.: Пространства L_n и S в конструктивной мате-

матике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10(1969), 261-284.

[6] ДЕМУТ О.: О представимости равномерно непрерывных конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 14(1973), 7-25.

[7] ДЕМУТ О., КРЫЛ Р., КУЧЕРА А.: Об использовании теории функций частичнорекурсивных относительно числовых множеств в конструктивной математике, Acta Univ. Carolinae, Math. et Physica 19(1978), 15-60.

Matematicko-fyzikální fakulta
Universita Karlova
Malostranské nám. 25, Praha 1
Československo

(Oblatum 23.4. 1979)