

Hans-Görg Roos

Die Konstruktion asymptotischer Fundamentalsysteme für lineare
Differentialgleichungen mit Wendepunkten

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 20 (1979), No. 2, 195--205

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/105921>

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1979

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

DIE KONSTRUKTION ASYMPTOTISCHER FUNDAMENTALSYSTEME
FÜR LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT WENDEPUNKTEN
H.-G. ROOS

Zusammenfassung: Es wird eine Übersicht gegeben über den Stand und Probleme bei der Konstruktion asymptotischer Fundamentalsysteme im Wendepunktsfall. Dabei werden insbesondere die Langersche Methode der Vergleichsgleichung, die gleichmässige Reduktion und die Reduktion in geeigneten Teilgebieten miteinander verglichen.

Schlagworte: Lineare gewöhnliche Differentialgleichung, Wendepunktsproblem, singuläre Störungen.

AMS: 34 E 20

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(1) \quad \varepsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - a(x, \varepsilon) y = 0,$$

ε sei ein kleiner, positiver Parameter, x komplex; $a(x, \varepsilon)$ im betrachteten Bereich analytisch in beiden Variablen,

$$a(x, \varepsilon) = a_0(x) + \sum_{\mu=1}^M a_\mu(x) \varepsilon^\mu.$$

$x = x_0$ heisst Wendepunkt ν -ter Ordnung von (1), wenn x_0 ν -fache Nullstelle von $a_0(x)$ ist. In $|x - x_0| < r$ sei x_0 der einzige Wendepunkt von (1), o.B.d.A. $x_0 = 0$. Gesucht wird zunächst ein asymptotisches Fundamentalsystem in die-

ser Umgebung des Wendepunktes.

Eine grundlegende Methode zur Konstruktion stammt von R.E. Langer (man vergl. [16]), die Methode wurde dann von Lynn und Keller (1970) und Rubinfeld und Willner (1977) weiterentwickelt. Ausgehend von der "Vergleichsgleichung"

$$(2) \quad v''(\xi) + [K\xi^2 + \sum_{\mu=0}^{\nu-2} \gamma_{\mu}(\varepsilon)\xi^{\mu}]v(\xi) = 0 \quad (K = \pm 1)$$

wird dabei die Lösung von (1) in der Form

$$y(x, \varepsilon) = (\phi'(x, \varepsilon))^{-\frac{1}{2}} v(\phi(x, \varepsilon), \varepsilon)$$

gesucht. Rubinfeld und Willner [36] zeigten die Gültigkeit der Methode in der Umgebung eines Wendepunktes ν -ter Ordnung, wenn

$$(3) \quad a(x, \varepsilon) = x^{\nu} + \sum_{\mu=2}^{\infty} a_{\mu}(x)\varepsilon^{\mu}.$$

Formale Ergebnisse gibt es inzwischen auch für inhomogene Probleme [1] und für Systeme und Gleichungen höherer Ordnung [2].

Eine zweite Methode, die gewissermassen die "Umkehrung" des eben beschriebenen Vorgehens ist, besteht darin, (1) in $|x-x_0| < r$ gleichmässig mit Hilfe analytischer Transformationen zu vereinfachen. Wasow [33] wies nach, dass man für $\nu = 1$ das vereinfachte Problem

$$(4) \quad \varepsilon^2 z'' - xz = 0$$

erhält, Lee reduzierte für $\nu = 2$ (1) auf

$$(5) \quad \varepsilon^2 z'' - (x^2 + \varepsilon \mu(\varepsilon))z = 0$$

Sibuya [31] behandelte 1974 den Fall $\nu \geq 3$. Die Funktion $a_1(x)$ habe für $x = 0$ eine Nullstelle m_1 -ter Ordnung. Unter

der Voraussetzung

$$(6) \quad m_1 \geq \frac{\nu - 1}{2} \quad (\nu \text{ ungerade})$$

$$m_1 \geq \frac{\nu}{2} \quad (\nu \text{ gerade})$$

reduzierte er (1) auf

$$(2^*) \quad \varepsilon^2 z'' - (x^\nu + \sum_{\mu=0}^{\nu-2} \gamma_\mu(\varepsilon) x^\mu) z = 0$$

Deshalb war das Ergebnis von Rubinfeld und Willner nicht überraschend, da unter der Voraussetzung (3) die Bedingung (6) erfüllt ist. Der Vorteil der Vorgehensweise nach der Methode der "Vergleichsgleichung" besteht aber darin, dass man mit schwächeren Voraussetzungen an die Koeffizienten von (1) auskommt und explizite Fehlerabschätzungen angeben kann.

Die Lösungen der Differentialgleichungen (4), (5) sind gut bekannte spezielle Funktionen. Für $\nu \geq 3$ ist es entscheidend, auch die Lösungen von (2*) hinreichend gut zu kennen. Das entspricht dem Problem der globalen Lösung der Gleichung

$$(7) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} - (x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m) w = 0,$$

b_1, \dots, b_m sind Parameter.

Sibuya [32] zeigte, dass eine eindeutige Lösung $W_m(x, b_1, \dots, b_m)$ existiert, die ganz in b_1, \dots, b_m ist, in $|\arg x| <$

$< \frac{3}{m+2} \pi$ ein bestimmtes asymptotisches Verhalten für

$|x| \rightarrow \infty$ besitzt und dabei in $|\arg x| < \frac{\pi}{m+2}$ subdominant

ist. Dieses Ergebnis wurde von Braaksma auf Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit Polynomkoeffizienten er-

weitert. Man kann nun über die Darstellung

$$W_m = \eta_{m0}(x) + \sum_{\mu} \eta_{m, \mu_1, \dots, \mu_m}(x) b_1^{p_1} \dots b_m^{p_m}$$

$W_m(0, b_1, \dots, b_m)$ bestimmen. Das führt nach Einsetzen in (7) zu einem rekursiven System für $\eta_{m, \mu_1, \dots, \mu_m}$. Dieser direkte Weg zur Bestimmung der η_m führt aber nur in Spezialfällen zum Ziel, Wyrwich gab einen indirekten Weg an und erhielt explizite Ergebnisse für $b_1 = \dots = b_{[\frac{m}{2}+1]} = 0$.

Eine andere Methode schlägt Bakken vor, er erhielt aber bisher nur für kleine b explizite Ergebnisse. Vielleicht ermöglicht der Abschluss der Invariantentheorie von Jurkat, in noch grösserer Masse als bisher Laplaceintegrale zur Lösung des Verbindungsproblems zu nutzen.

Eine dritte Methode zur Konstruktion asymptotischer Fundamentalsysteme besteht darin, nicht in $|x-x_0| < r$ (1) gleichmässig zu vereinfachen, sondern in geeigneten Teilbereichen auf "einfachere" Probleme zu reduzieren. Grundlegend dafür ist der von Iwano und Sibuya definierte Begriff des zu (1) gehörenden charakteristischen Polygons. Betrachtet werde nun etwas allgemeiner

$$(1^*) \quad \varepsilon^{2\sigma} \frac{d^2 y}{dx^2} - a(x, \varepsilon) y = 0$$

$a_{\mu}(x)$ habe für $x = 0$ eine Nullstelle m_{μ} -ter Ordnung. Man legt die Punkte

$$R = (\sigma, -1), \quad P_0 = (0, \frac{\nu}{2}), \quad P_{\mu} = \left(\frac{\mu}{2}, \frac{m_{\mu}}{2} \right)$$

in ein Koordinatensystem und konstruiert einen konvexen, P_0 und R verbindenden Polygonzug so, dass nur die P_{μ} und R

"Ecken" sind und kein P_{μ} unterhalb des Polygonzugs liegt. Besitzt der konstruierte Polygonzug einschliesslich P_0, R $N+1$ Ecken, so sagt man, (1^*) besitze ein N -segmentiges charakteristisches Polygon. Die Schwierigkeiten bei der asymptotischen Lösung von (1) nehmen mit wachsendem N zu. Es zeigt sich, dass im Spezialfall $\epsilon = 1$ $N = 1$ gilt, wenn

- (a) $a_1(x) \equiv 0$ oder
- (b) $\nu \leq 2$ oder
- (c₁) $\nu \geq 3$ und $m_1 \geq \frac{\nu}{2} - 1$,

das entspricht den Voraussetzungen bei Rubinfeld/Willner, Wasow, Lee, Sibuya.

Ist $N = 1$, so erhält man nur zwei Teilbereiche. In einem Teilbereich kann man die Ordnung des Problems reduzieren, im anderen erhält man nach einer Transformation ein regulär gestörtes Problem.

Der entscheidende Nachteil der Methode ist, dass man nach der Konstruktion der Fundamentalsysteme in den Teilbereichen noch ihre Verbindungsmatrizen bestimmen muss. Im einsegmentigen Fall gelang es aber, mit dieser Methode eine Reihe von Differentialgleichungen mit Wendepunkten auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung zu lösen [18,19,20,28,34]. Bisher wurden nur sehr spezielle zwei- und dreisegmentige Probleme behandelt, nämlich

$$(8) \quad \epsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - (x^m - \epsilon)y = 0 \quad (m \geq 3)$$

in [17],[27],

$$(9) \quad \epsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - (x^5 - \epsilon x)y = 0$$

in [21] und in [29]

$$(10) \quad \epsilon^4 \frac{d^2 y}{dx^2} - (x^5 + \epsilon x^2 + \epsilon^2)y = 0.$$

Das liegt daran, dass man für die Berechnung der Verbindungsmatrizen Aussagen über das globale Verhalten der Lösungen von Wendepunktsproblemen benötigt.

Es wird nun noch dieser Problemkreis betrachtet, also das Problem, für (1) Fundamentalsysteme und deren Verbindungsmatrizen in die volle x -Ebene überdeckenden Bereichen anzugeben.

Grundlegend dafür ist die Arbeit von Fedorjuk 1966. Es sei $p(x)$ ein Polynom,

$$(11) \quad \epsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - p(x)y = 0,$$

ferner $\eta(x_0, x) = \int_{x_0}^x p^{\frac{1}{2}}(t) dt$. Die Menge aller x , für die gilt $\operatorname{Re} \eta(x_0, x) = 0$, heisst "Stokeslinie" durch den Wendepunkt x_0 .

Fedorjuk untersuchte die Topologie der Stokeslinien und der von ihnen berandeten Gebiete. D_μ sei ein von Stokeslinien berandetes Gebiet, \mathcal{D} die Vereinigung gewisser D_μ und gewisser Stokeslinien. \mathcal{D} heisst kanonisch, wenn das Bild von \mathcal{D} bei der Abbildung $\eta(x_0, x)$ mit Ausnahme von Vertikalschnitten die einfach belegte volle η -Ebene ist.

Fedorjuk wies nach, dass der Geltungsbereich von Fundamentalsystemen mit Ausnahme von Umgebungen der Wendepunkte ein kanonischer Bereich ist und gab Verbindungsmatrizen verschiedener Fundamentalsysteme für den Fall einfacher Wendepunkte an. Unter letzterer Voraussetzung zeigte Wasow [35], dass die

Entwicklungen vom Fedorjuktyp in Umgebungen der Wendepunkte nicht gelten und berechnete Verbindungsmatrizen für die Fundamentalsysteme nach Fedorjuk und die in der Umgebung der Wendepunkte. Damit war das globale Verhalten der Lösungen von Wendepunktproblemen vom Typ (11) für ein Polynom $p(x)$ mit lauter einfachen Nullstellen geklärt.

Leung [10, 11] behandelte dann auf der Grundlage der oben erwähnten Reduktionssätze von Lee, Sibuya das zentrale Verbindungsproblem für ein beliebiges Polynom $p(x)$. In weiteren Arbeiten versuchte Leung [12, 13], Entwicklungen vom Fedorjuktyp für Differentialgleichungen beliebiger Ordnung zu konstruieren, eine erste Anwendung auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung mit zwei Wendepunkten liegt vor [14].

Genauere Aussagen über Gültigkeitsbereiche asymptotischer Entwicklungen in der Nähe eines Wendepunktes und über das Verhalten in der Nähe von Stokeslinien findet man bei Nishimoto [21, 22].

Olver [23, 24, 25] untersucht das globale Verhalten von Fundamentalsystemen für Wendepunktprobleme für reelle x auf der Grundlage seiner Theorie der qualitativen Fehlerabschätzungen für Gleichungen vom Typ

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - [a_0(x) + \varepsilon^\beta b(x, \varepsilon)] y = 0,$$

wobei

$$\beta > 1 \quad (\nu = 1, 2)$$

$$\beta > 2 - \frac{4}{\nu+2} \quad (\nu \geq 3).$$

In [26] gibt er hinreichende Bedingungen für das Auftreten

von "Resonanz" an, die Gründe für das Auftreten von Resonanzfällen bei Randwertaufgaben für Wendepunktprobleme wurden allerdings schon vorher mit Hilfe von Störungssätzen für Operatorgleichungen [6] geklärt.

L i t e r a t u r

- [1] ANYANWU D.U.: Uniform asymptotic solution of nonhomogeneous differential equations with turning points, SIAM J. Math. Anal. 8(1977), 710-718
- [2] ANYANWU D.U., KELLER J.B.: A solution of higher order differential equations with several turning points, Comm. pure appl. Math. 31(1978), 107-121
- [3] BAKKEN I.: On the central connection problem for a class of ordinary differential equations, Funkcial. Ekvac. 20(1977), 115-156
- [4] BRAAKSMA B.L.J.: Recessive solutions of linear differential equations with polynomial coefficients, Lecture Notes Math. 280(1972), 1-15
- [5] ЕВГРАФОВ М.А., ФЕДОРОВ М.В.: Асимптотика решений $W^m - \mu(x, \lambda)w = 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ в комплексной плоскости z , Успехи матем. наук 21(1966), 3-50
- [6] GROEN P.P.N.: Singular perturbed differential operators of second order, Amsterdam 1976
- [7] IWANO M., SIBUYA A.: Reduction of the order of linear ordinary differential equation containing a small parameter, Kodai math. sem. rep. 15(1963), 1-23
- [8] JURKAT W.B.: Meromorphic Differentialgleichungen, Lecture Notes Math. 637(1978)
- [9] LEE R.: On the uniform simplification of linear differential equations in a full neighborhood of a turning point, J. Math. Anal. Appl. 27(1969), 501-510
- [10] LEUNG A.: Connection formulas for asymptotic solutions

of second order turning points in unbounded domains, *SIAM J. Math. Anal.* 4(1973), 89-103 (Errata: 6(1975), 600)

- [11] LEUNG A.: Lateral connections for asymptotic solutions around higher order turning points, *J. Math. Anal. Appl.* 50(1975), 560-578
- [12] _____ : Doubly asymptotic series for n-th order differential equations, *SIAM J. Math. Anal.* 5 (1974), 187-201
- [13] _____ : A doubly asymptotic existence theorem and application to order reduction, *Proc. London Math. Soc.* 33(1976), 151-176
- [14] _____ : A third-order linear differential equation on the real line with two turning points, *J. diff. equ.* 29(1978), 304-328
- [15] LYNN R., KELLER J.: Uniform asymptotic solutions of second order linear ordinary differential equations with turning points, *Comm. Pure Appl. Math.* 23(1970), 379-408
- [16] MC HUGH J.: A historical survey of ordinary linear differential equations with a large parameter and turning points, *Arch. History Exact. Sci.* 7 (1971), 277-324
- [17] NAKANO M., NISHIMOTO T.: On a secondary turning point problem, *Kodai Math. Sem. Rep.* 22(1970), 365-384
- [18] NISHIMOTO T.: On matching methods in turning point problems, *Kodai Math. Sem. Rep.* 17(1965), 198-221
- [19] _____ : On a matching method for a linear ordinary differential equation containing a small parameter, *Kodai Math. Sem. Rep.* 17(1965), 307-328, 18(1966), 61-86, 19(1967), 80-94
- [20] _____ : On the central connection problem at a turning point, *Kodai Math. Sem. Rep.* 22(1970), 30-44

- [21] NISHIMOTO T: On an extension theorem and its application for turning point problems of large order, Kodai Math. Sem. Rep. 25(1973), 458-489
- [22] _____ : Asymptotic behaviour of the WKB approximations near a Stokes curve, Kodai Math. Sem. Rep. 29(1977), 71-87
- [23] OLVER F.: Asymptotic and special functions, Academic press, New York 1974
- [24] _____ : Connection formulas for second order differential equations with multiple turning points, SIAM J. Math. Anal. 8(1977), 127-154
- [25] _____ : Connection formulas for second order differential equations having an arbitrary number of turning points of arbitrary multiplicities, SIAM J. Math. Anal. 8(1977), 673-700
- [26] _____ : Sufficient conditions for Ackerberg-O'Malley resonance, SIAM J. Math. Anal. 9(1978), 328-355
- [27] ROOS H.-G.: Die asymptotische Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zweisegmentigem charakteristischem Polygon, Beiträge zur Analysis 7(1975), 55-63
- [28] _____ : Die Konstruktion eines asymptotischen Fundamentalsystems für eine lineare Differentialgleichung vom hydrodynamischen Typ, ZAMM 56(1976), 401-408
- [29] _____ : Die asymptotische Lösung einer linearen Differentialgleichung mit dreisegmentigem charakteristischem Polygon, Mathematische Nachrichten (im Druck)
- [30] RUBENFELD L., WILLNER B.: Uniform asymptotic solution for linear second order ordinary differential equations with turning points, SIAM J. Appl. Math. 32(1977), 21-38
- [31] SIBUYA Y.: Uniform simplification in a full neighborhood of a transition point, Mem. Amer. Math. Soc.

no 149(1974)

- [32] SIBUYA Y.: Global theory of second order linear ordinary differential equations with a polynomial coefficient, North Holland Math. Studies 18, Amsterdam 1975
- [33] WASOW W.: Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience, New York 1965
- [34] _____ : The central connection problem at turning points of linear differential equations, Comment. Math. Helv. 46(1971), 65-86
- [35] _____ : Simple turning-point problems in unbounded domains, SIAM J. Math. Anal. 1(1970), 153-170
- [36] WILLNER B., RUBENFELD L.: Uniform asymptotic solution for a linear ordinary differential equation with one n -th order turning point, Comm. Pure Appl. Math. 29(1976), 343-367
- [37] WYRWICH H.: An explicit solution of the central connection problem for an n -th order linear ordinary differential equation with polynomial coefficients, SIAM J. Math. Anal. 8(1977), 412-422

Technische Hochschule Otto von Guericke

301 Magdeburg

D D R

(Oblatum 5.12. 1978)