Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Siegfried Hahn

Eigenwertaussagen für kompakte und kondensierende mengenwertige Abbildungen in topologischen Vektorräumen

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 20 (1979), No. 1, 123--141

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105908

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
20, 1 (1979)

EIGENWERTAUSSAGEN FUR KOMPAKTE UND KONDENSIERENDE MENGENWERTIGE ABBILDUNGEN IN TOPOLOGISCHEN VEKTORRÄUMEN

S. HAHN

Inhalt: Es werden Eigenwert-Theoreme für kompakte und kondensierende mengenwertige Abbildungen in topologischen Vektorräumen vorgestellt, die viele bekannte Existenzsätze als Spezialfall enthalten.

Schlüsselwörter: Nichtkompaktheitsmass, kondensierende und kompakte Abbildung, Keil, Kegel, Eigenwert.

AMS: 47H10

Einleitung. Von G.D. Birkhoff und O.D. Kellogg [1] stammt folgende berühmte Eigenwertaussage, die bis zur heutigen Zeit Gegenstand von verallgemeinernden Untersuchungen ist.

Birkhoff-Kellogg-Theorem. Es seien S die Einheitssphäre eines unendlichdimensionalen Banachraumes E und $F:S \longrightarrow E$ eine kompakte Abbildung. Es existiere eine Zahl $a > 0$ derart, dass $\|F(x)\| \geq a$ $(x \in S)$ gilt. Dann gibt es ein $\lambda > 0$ und ein $x \in S$ mit $F(x) = \lambda x$.

In Hinblick auf die Bedeutung der Theorie positiver Operatoren bewies M.A. Krasnoselski [12] 1962 ein bemerkenswertes Resultat, das verschiedene diesbezügliche frühere Aussagen von anderen Verfassern wesentlich verallgemeinert.

Satz von Krasnoselski. Es seien W eine offene, beschränkte Nullumgebung eines Banachraumes E, K ein abgeschlossener Kegel in E und $F: \partial W \cap K \to K$ eine kompakte Abbildung. Es existiere ein $a > 0$ derart, dass $\|F(x)\| \geq a$ $(x \in \partial W \cap K)$ gilt. Dann gibt es ein $\lambda > 0$ und ein $x \in \partial W \cap K$ mit $F(x) = \lambda x$.

In den letzten Jahren wurden diese beiden grundlegenden Resultate einerseits auf allgemeine topologische Vektorräume ([13],[18]) und andererseits auf mengenwertie Abbildungen ([7],[4]) übertragen. Dabei wurden relativ komplizierte Hilfsmittel verwendet (Abbildungsgrad) oder langwierige Approximationsüberlegungen durchgeführt. Theorem 1 unserer Arbeit ist ein Resultat, dass diese erwähnten Verallgemeinerungen als Spezialfall enthält und mit elementaren Mitteln aus dem Fixpunktsatz von Brouwer-Kakutani folgt. Seit etwa 10 Jahren bildet das Studium von sogenahnten kondensierenden und k-kondensierenden Abbildungen (s. Abschnitt 1) einen Hauptgegenstand der Forschungen auf dem Gebiet der nichtlinearen Funktionalanalysis. Obwohl die Untersuchungen dazu heute wohl bereits ihren Höhepunkt überschritten haben, sind bisher relativ wenig Eigenwertaussagen für solche Abbildungen bekannt. Beispiele zeigen, dass die Sätze von Birkhoff-Kellogg und Krasnoselski für k-kondensierende Abbildungen nicht gültig sind. Im 3. Abschnitt unserer Arbeit zeigen wir, dass sich dennoch gewisse Aussagen beweisen lassen, die obige Sätze für kompakte Abbildungen implizieren. Trotz einfachster Hilfsmittel gelingt es dabei, bekannte neuere Aussagen von Fitzpatrick-Petryshyn [4] sowie Reich [17] wesentlich zu verschärfen.

1. <u>Bezeichnungen</u>. Alle topologischen Räume in unserer Arbeit sind separiert und alle topologischen Vektorräume reell und separiert. Ist A eine Teilmenge eines topologischen Raumes, so bezeichnen wir mit $\overline{A}$ die Abschliessung, mit ∂A den Rand und mit int A das Innere von A. Sei K eine Teilmenge eines topologischen Vektorraumes E. $\mathcal{R}(K)$ bezeichne das System aller nichtleeren, abgeschlossenen, konvexen Teilmengen von K. Ist X ein topologischer Raum, so heisst eine (mengenwertige) Abbildung $F:X\longrightarrow\mathcal{R}(K)$ nach oben halbstetig, wenn für jedes $a\in X$ folgendes gilt. Zu jeder offenen Teilmenge W von K mit $F(a)\subset W$ existiert eine Umgebung V von a, so dass $F(V)\subset W$ ist. Eine nach oben halbstetige Abbildung $F:$ $:X\longrightarrow\mathcal{R}(K)$ heisst <u>kompakt</u>, wenn F(X) relativ kompakt in K ist. Die kompakte Abbildung $F:X\longrightarrow\mathcal{R}(K)$ bezeichnen wir als <u>finit</u>, wenn F(X) in einem endlichdimensionalen (linearen) Teilraum enthalten ist. Das Symbol $CA(X,\mathcal{R}(K))$ bedeute in unserer Arbeit die Klasse aller kompakten Abbildungen $F:X\longrightarrow\mathcal{R}(K)$ mit folgender Eigenschaft. Zu jeder Nullumgebung V existiert eine finite Abbildung $F_V:X\to\mathcal{R}(K)$ mit $F_V(x)\subset F(x)+V (x\in X)$. Ist E lokalkonvex und $K\subset E$, so ist $CA(X,\mathcal{R}(K))$ die Klasse aller kompakten Abbildungen $F:X\longrightarrow\mathcal{R}(K)$ (s. z.B.[7]). Ist $F:X\longrightarrow\mathcal{R}(K)$ eine Abbildung mit einelementigen Werten, so nennen wir F manchmal punktwertig und schreiben $F:X\to$ $\to K$. Ein topologischer Vektorraum E, für den die Klasse aller kompakten Abbildungen $F:X\to E$ mit CA(X,E) zusammenfällt, heisst <u>zulässig</u>. Bisher ist kein topologischer Vektorraum bekannt, der nicht zulässig ist. Speziell sind alle lokalkonvexen Räume und z.B. die nichtlokalkonvexen Räume $\ell^p (0<p<1)$, $L^p(0,1)$ $(0<p<1)$, S(0,1) zulässig. Setzen wir in der eben gegebenen Definition für E die Teilmenge K, so heisst K zulässig.

Sei E ein topologischer Vektorraum und X,Y,K Teilmengen von E mit $X\subset Y\subset K$. Die Abbildungen $F,G\in CA(Y,\mathcal{R}(K))$ heissen homotop in $CA_0(Y,\mathfrak{K}(K),X)$, wenn eine kompakte Abbildung $H:Y\times[0,1]\to\mathfrak{K}(K)$ existiert, für die $H(y,0) = F(y)$, $H(y,1) = G(y)$ $(y\in Y)$ und $x\notin H(x,t)$ $(x\in X, t\in[0,1])$ gilt.

Sind F und G finite Abbildungen, die in $CA_0(Y,\mathfrak{K}(K),X)$ homotop sind, so existiert ein endlichdimensionaler Teilraum E_0 von E derart, dass $F|Y\cap E_0$ und $G|Y\cap E_0$ homotop in $CA_0(Y\cap E_0,\mathfrak{K}(K\cap E_0),X\cap E_0)$ sind (s. [6],[14]). Der bekannte Homotopieerweiterungssatz von Granas (s. z.B. [5]) wurde auch für mengenwertige Abbildungen bewiesen. Wir benötigen ihn in folgender erstmals von G. Kayser [11] veröffentlichten Fassung für endlichdimensionale Räume.

Hilfssatz. Es seien E_0 ein endlichdimensionaler normierter Raum, K eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E, $\overline{X} = X\subset Y\subset K$ sowie $F:X\to\mathfrak{K}(K)$, $G:X\to\mathfrak{K}(K)$ kompakte Abbildungen, die in $CA_0(X,\mathfrak{K}(K),X)$ homotop sind. Hat F eine kompakte, fixpunktfreie Erweiterung $\overline{F}:Y\to\mathfrak{K}(K)$, so gilt dies auch für G.

Sei E ein lokalkonvexer Raum, $\mathfrak{M}$ ein System von Teilmengen von E, das mit jeder Menge M auch deren abgeschlossene konvexe Hülle $\overline{co}(M)$ enthält. Weiter sei A eine Teilmenge eines halbgeordneten linearen Raumes. Als Nichtkompaktheitsmass in E bezeichnen wir jede Funktion $\psi:\mathfrak{M}\to A$ mit folgenden Eigenschaften.

(1) $\psi(\overline{co}(M)) = \psi(M)$ $(M\in\mathfrak{M})$

(2) Aus $M'\subset M\in\mathfrak{M}$ folgt $M'\in\mathfrak{M}$ und $\psi(M')\leq\psi(M)$

(3) Für jedes $x_0\in E$, $M\in\mathfrak{M}$ gilt $\{x_0\}\cup M\in\mathfrak{M}$ und $\psi(\{x_0\}\cup M) = \psi(M)$

(4) Mit $M\in\mathfrak{M}$ gilt auch $tM\in\mathfrak{M}$ und $\psi(tM) = t\psi(M)$ $(t>0)$

(5) $\psi(M) = 0$ gilt genau dann, wenn $M \in \mathfrak{M}$ präkompakt ist.

Sei E ein lokalkonvexer Raum, $M \subset E$, $F:M \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$ eine nach oben halbstetige Funktion und ψ ein Nichtkompaktheitsmass auf E. F heisst (ψ)-kondensierend, wenn für jedes $B \subset M$ aus der Ungleichung $\psi(B) \leq \psi(F(B))$ die relative Kompaktheit von $F(B)$ folgt. Ist $k \geq 0$, so werde F als (ψ, k)-kondensierend bezeichnet, wenn $\psi(F(B)) \leq k\, \psi(B)$ gilt. Ist E quasivollständig, so ist jede (ψ, k)-kondensierende Abbildung auch (ψ)-kondensierend, falls $k < 1$ ist.
Das Wesen einer (ψ)-kondensierenden Abbildung $F:M \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$ besteht darin, dass eine abgeschlossene konvexe Teilmenge $R \subset E$ mit $M \cap R \neq \emptyset$ existiert, so dass $F(M \cap R)$ eine relativ kompakte Teilmenge von R ist (s. z.B. [9],[10]).

Näheres über diese Abbildungen kann man z.B. in [20] erfahren. Eine nichtleere, konvexe Teilmenge $K \neq \{o\}$ eines Vektorraumes heisst Keil, wenn mit $x \in K$ auch $tx \in K$ $(t \geq 0)$ gilt. Der Keil K heisst Kegel, wenn $K \cap (-K) = (0)$ ist.

2. Eigenwertaussagen für kompakte mengenwertige Abbildungen.

Wir beweisen in diesem Abschnitt ohne Verwendung des Abbildungsgrades auf der Grundlage des Fixpunktsatzes von Brouwer-Kakutani ein sehr allgemeines Eigenwertprinzip, aus dem sich viele bekannte Eigenwertaussagen folgern lassen, die i.a. mit komplizierten Hilfsmitteln hergeleitet wurden.

Definition. Es seien E ein topologischer Vektorraum, K eine nichtleere, konvexe, abgeschlossene Teilmenge von E und X eine Teilmenge von K. Weiter sei $F:X \longrightarrow \mathfrak{K}(K)$ eine Abbildung. Wir sagen, dass F eine Richtung auslässt, wenn ein $y_0 \in K \setminus \{o\}$

existiert, so dass $\mu y_o \notin \overline{F(X)}$ $(\mu \leq 0)$ gilt.

Bekanntlich hat jede stetige Abbildung $F: \partial B \longrightarrow E$, die den Rand einer kompakten Nullumgebung B eines endlichdimensionalen normierten Raumes E in E abbildet und eine Richtung auslässt, einen positiven Eigenwert (s. z.B. T. Riedrich [18], der zur Definition der ausgelassenen Richtung eine äusserlich etwas andere, unter den gegebenen Voraussetzungen aber äquivalente Formulierung gebrauchte). Wir übertragen nun dieses Ergebnis auf mengenwertige Abbildungen in topologischen Vektorräumen.

Theorem 1. Es seien E ein topologischer Vektorraum, W eine abgeschlossene Nullumgebung aus E, K ein abgeschlossener Keil in E und F eine Abbildung aus $CA(\partial W \cap K, \mathfrak{K}(K))$, die eine Richtung auslässt. Ist $W \cap K$ beschränkt, so existiert ein $x_o \in \partial W \cap K$ und ein $\lambda_o > 0$ mit $\lambda_o x_o \in F(x_o)$.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein $y_o \in K \setminus \{o\}$ derart, dass $\mu y_o \notin \overline{F(\partial W \cap K)}$ $(\mu \leq 0)$ gilt. Die Menge $\overline{F(\partial W \cap K)} + [0,\infty) y_o$ ist abgeschlossen und enthält das Nullelement von E nicht. Folglich existiert eine Nullumgebung U aus E mit

(2.1) $\quad (\mu y_o + U) \cap F(\partial W \cap K) = \emptyset \quad (\mu \leq 0).$

Weil $\partial W \cap K$ beschränkt ist, gibt es eine Zahl $r > 0$ derart, dass $(\partial W \cap K) \subset rU$ gilt. Dann erkennt man leicht für jedes $\mu_o > 0$ die Relation

(2.2) $\quad x \notin rF(x) + t\mu_o y_o \quad (x \in \partial W \cap K,\ t \in [0,1]).$

In der Tat folgt aus der Annahme $x_o = rz_o + t_o \mu_o y_o$ für ein $x_o \in \partial W \cap K$, $z_o \in F(x_o)$, $t_o \in [0,1]$ die zu (2.1) im Widerspruch stehende Beziehung $z_o \in U - \frac{t_o \mu_o}{r} y_o$. Weil die Mengen $\partial W \cap K$, $W \cap K$ und $[0,1]\, rF(\partial W \cap K)$ beschränkt sind, gilt für ein

$\mu_0 > 0$ stets

(2.3) $\quad x \notin trF(x) + \mu_0 y_0 \quad (x \in \partial W \cap K,\ t \in [0,1])$,

und

(2.4) $$\mu_0 y_0 \notin W \cap K.$$

Wir nehmen nun an, es wäre die Relation

(2.5) $\quad x \notin trF(x) \quad (x \in \partial W \cap K,\ t \in [0,1])$

erfüllt. Es sei $G_0(x) = \{o\}$, $G_1(x) = rF(x)$, $G_2(x) = rF(x) + \mu_0 y_0$, $G_3(x) = \{\mu_0 y_0\}$ $(x \in \partial W \cap K)$. Die Abbildungen G_i $(i = 0,1,2,3)$ gehören offenbar alle zu $CA(\partial W \cap K, \mathfrak{K}(K))$. Wegen (2.5) sind G_0 und G_1, wegen (2.2) G_1 und G_2 sowie aufgrund von (2.3) auch G_2 und G_3 in $CA_c(\partial W \cap K, \mathfrak{K}(K), \partial W \cap K)$ homotop. Insgesamt müssen dann G_0 und G_3 in $CA_c(\partial W \cap K, \mathfrak{K}(K), \partial W \cap K)$ homotop sein. Weil G_0 und G_3 finite Abbildungen sind, existiert ein endlichdimensionaler Teilraum E_0 von E mit $y_0 \in E_0$ derart, dass $G_0 | \partial W \cap E_0 \cap K$ und $G_3 | \partial W \cap E_0 \cap K$ in $CA_0(\partial W \cap E_0 \cap K, \mathfrak{K}(K \cap E_0), \partial W \cap E_0 \cap K)$ homotop sind. $W_0 = W \cap E_0$ ist eine abgeschlossene Nullumgebung und $K_0 = K \cap E_0$ eine nichtleere, konvexe abgeschlossene Teilmenge von E_0. Sei $\partial_0 W_0$ der Rand von W_0 in E_0. Die Abbildung $G_3' = G_3 | \partial_0 W_0 \cap K_0$ hat durch $G_4(x) = \{\mu_0 y_0\}$ $(x \in W_0 \cap K_0)$ wegen (2,4) eine kompakte, fixpunktfreie Erweiterung G_4 auf $W_0 \cap K_0$. Nach dem Hilfssatz (man beachte $\partial_0 W_0 \subset (\partial W \cap E_0)$) existiert dann auch zu $G_0' = G_0 | \partial_0 W_0 \cap K_0$ eine kompakte fixpunktfreie Erweiterung $G_5 : W_0 \cap K_0 \to \mathfrak{K}(K_0)$. Sei

$$T(x) = \begin{cases} G_5(x) & (x \in W_0 \cap K_0) \\ \{o\} & (x \in K_0 \setminus W_0). \end{cases}$$

Offenbar ist T eine kompakte Abbildung von K_0 in $\mathfrak{K}(K_0)$ ohne Fixpunkt. Dies widerspricht dem Fixpunktsatz von Kakutani [10]. Damit ist gezeigt, dass die Relation (2.5) ungültig ist.

Hieraus folgt (unter Beachtung von $t \neq 0$) die Behauptung. Q.e.d.

Als Spezialfälle von Theorem 1 ergeben sich die bekannten Eigenwertsätze von Birkhoff und Kellogg [1] sowie von Krasnoselski [12], die wir nun in sehr allgemeiner Fassung ableiten können.

<u>Satz 1.</u> Es seien E ein lokalbeschränkter topologischer Vektorraum von unendlicher Dimension, W eine abgeschlossene, beschränkte Nullumgebung aus E sowie $F \in CA(\partial W, \mathfrak{K}(E))$. Es gelte $o \notin \overline{F(\partial W)}$. Dann gibt es ein $\lambda > 0$ und ein $x \in \partial W$ mit $\lambda x \in F(x)$.

<u>Beweis.</u> Sei V eine abgeschlossene, einfachberandete, beschränkte Nullumgebung aus E und m ihr Minkowskifunktional. Wegen $o \notin \overline{F(\partial W)}$ gilt $m(y) > 0$ $(y \in \overline{F(\partial W)})$. Da m stetig und $\overline{F(\partial W)}$ kompakt ist, existiert eine Zahl $a > 0$ mit $m(y) \geq a$ $(y \in \overline{F(\partial W)})$. Dann ist $\mu' x_o \notin \overline{F(\partial W)}$ $(x_o \in \partial V,\ \mu' \in [0,a))$ gültig.
Angenommen, für jedes $x \in \partial V$ gibt es ein $\mu(x) \geq a$ mit $\mu(x)x \in \overline{F(\partial W)}$. Dann ist $M = \{z \in E \mid z = \mu(x)x, x \in \partial V\}$ als Teilmenge von $\overline{F(\partial W)}$ relativ kompakt. Wegen $\partial V \subset [0,\frac{1}{a}]M$ muss auch ∂V kompakt sein. Dies widerspricht der Dimension von E.
Folglich existiert ein $x_o \in \partial V$ mit $\mu' x_o \notin \overline{F(\partial W)}$ $(\mu' \geq 0)$.
Für $y_o = (-x_o) \in E \setminus \{o\}$ gilt also $\mu y_o \notin \overline{F(\partial W)}$ $(\mu \leq 0)$ und die Behauptung folgt aus Theorem 1. Q.e.d.

<u>Folgerung 1.</u> Es seien E ein lokalbeschränkter zulässiger topologischer Vektorraum von unendlicher Dimension, W eine abgeschlossene beschränkte Nullumgebung aus E sowie $F: \partial W \longrightarrow E$ eine kompakte Abbildung mit $o \notin \overline{F(\partial W)}$. Dann existiert ein $\lambda > 0$ und ein $x \in \partial W$ mit $F(x) = \lambda x$.

Dieses Resultat wurde erstmals von T. Riedrich [18] mittels relativ aufwendigen Approximationsüberlegungen unter Verwendung des Satzes über die ausgelassene Richtung in endlichdimensionalen Räumen bewiesen.

<u>Folgerung 2</u>. Es seien E ein unendlichdimensionaler normierter Raum, W eine abgeschlossene, beschränkte Nullumgebung aus E und $F: \partial W \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$ eine kompakte Abbildung mit $o \notin \overline{F(\partial W)}$. Dann existiert ein $x \in \partial W$ und ein $\lambda > 0$ mit $\lambda x \in F(x)$.

Folgerung 2 erhielten Fitzpatrick und Petryshyn in [4] mit Hilfe des Abbildungsgrades. Ohne Verwendung des Abbildungsgrades bewies der Verfasser in [7] für den Fall einfachberandeter Nullumgebungen erstmals dieses Ergebnis. Ist F punktwertig und W die Einheitskugel, so stellt Folgerung 2 das klassische Birkhoff-Kellogg-Theorem dar.

<u>Satz 2</u>. Es seien E ein topologischer Vektorraum, W eine abgeschlossene Nullumgebung aus E, K ein abgeschlossener Kegel in E und $F \in CA(\partial W \cap K, \mathfrak{K}(K))$. Es gelte $o \notin \overline{F(\partial W \cap K)}$. Ist $W \cap K$ beschränkt, so existiert ein $x \in \partial W \cap K$ und ein $\lambda > 0$ mit $\lambda x \in$ $\in F(x)$.

<u>Beweis</u>. Sei $y_0 \in K \setminus \{o\}$. Dann gilt $\mu y_0 \in (-K)$ ($\mu \leq 0$). Wäre für ein $\mu_0 \leq 0$ die Beziehung $\mu_0 y_0 \in \overline{F(\partial W \cap K)} \subset K$ erfüllt, so müsste wegen $K \cap (-K) = \{o\}$ offenbar $\mu_0 = 0$, also $o \in \overline{F(\partial W \cap K)}$ sein. Dies widerspricht der Voraussetzung. Also gilt $\mu y_0 \notin \overline{F(\partial W \cap K)}$ ($\mu \leq 0$) und wir können Theorem 1 anwenden. Q.e.d.

<u>Folgerung 3</u>. Es seien E ein topologischer Vektorraum, W eine abgeschlossene Nullumgebung aus E, K ein abgeschlossener zulässiger Kegel in E und $F: \partial W \cap K \longrightarrow K$ eine kompakte Abbildung

mit $o \notin \overline{F(\partial W \cap K)}$. Ist $W \cap K$ beschränkt, so existiert ein $x \in \partial W \cap K$ und ein $\lambda > 0$ mit $F(x) = \lambda x$.

Folgerung 3 ist ein Resultat von Landsberg und Riedrich, das diese in [13] mittels Approximationsargumenten bewiesen. Ist E ein normierter Raum,so ergibt sich aus Folgerung 3 das berühmte Eigenwerttheorem von Krasnoselski, das in [12] mit Hilfe des Begriffes der Rotation hergeleitet wurde.

Folgerung 4. Es seien E ein lokalkonvexer Raum, W eine abgeschlossene Nullumgebung aus E, K ein abgeschlossener Kegel in E und $F: \partial W \cap K \longrightarrow \mathcal{K}(K)$ eine kompakte Abbildung mit $o \notin \overline{F(\partial W \cap K)}$. Ist $W \cap K$ beschränkt, so existiert ein $x \in \partial W \cap K$ und ein $\lambda > 0$ mit $\lambda x \in F(x)$.

Für normierte Räume stammt Folgerung 4 von Fitzpatrick und Petryshyn [4], die zum Beweis den Abbildungsgrad verwendeten.

3. Eigenwertaussagen für kondensierende Abbildungen

Viele Existenzaussagen für kompakte Abbildungen behalten auch für kondensierende Abbildungen ihre Gültigkeit. Das gilt jedoch nicht für die Eigenwertsätze von Birkhoff-Kellogg und Krasnoselski. Wie einfache Beispiele in Banachräumen zeigen, hat nicht jede kondensierende und nicht einmal jede k-kondensierende $(0 < k < 1)$ Abbildung, die die Lagebeziehungen der Sätze von Birkhoff-Kellogg und Krasnoselski erfüllt, einen positiven Eigenwert (vgl. [15], siehe auch [19], Seite 154). Um dennoch Aussagen über die Existenz eines positiven Eigenwertes erhalten zu können, müssen offenbar schärfere Bedingungen für die Lage der Bildmenge von F gefordert werden.

Ist F auf dem Durchschnitt des Randes einer Nullumgebung mit einer beliebigen abgeschlossenen nichtleeren konvexen Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes definiert, so erhielt der Verfasser in [8] eine Existenzaussage. Danach existiert ein positiver Eigenwert, wenn die konvexe Hülle der Bildmenge von F mit der Nullumgebung einen leeren Durchschnitt hat. Es lässt sich vermuten, dass bei spezielleren konvexen Mengen, insbesondere im Fall eines Kegels oder des ganzen Raumes schwächere Voraussetzungen hinreichend sind. Auf der Grundlage eines Fixpunktsatzes von Nussbaum [16] lässt sich leicht die folgende Verallgemeinerung des Ergebnisses von Birkhoff-Kellogg beweisen.

Satz 3. Es seien E ein unendlichdimensionaler Banachraum, B die Einheitskugel in E, α das Kuratowskische Nichtkompaktheitsmass und k eine reelle nichtnegative Zahl. Weiter sei $F: \partial B \longrightarrow E$ eine (α,k)-kondensierende Abbildung. Es existiere eine Zahl $a > k$ mit $\|F(x)\| \geq a$ $(x \in \partial B)$. Dann existiert ein $x \in \partial B$ und ein $\lambda > a$ mit $F(x) = \lambda x$.

Beweis. Wir setzen $T(x) = \frac{F(x)}{\|F(x)\|}$ $(x \in \partial B)$. Offenbar ist T eine stetige Abbildung von ∂B in ∂B. T ist sogar $(\alpha, \frac{k}{a})$-kondensierend. Ist nämlich $A \subset \partial B$, so gilt $T(A) \subset$ $\subset [0, \frac{1}{a}] F(A) = [0,1] \frac{1}{a} F(A)$. Damit ergibt sich $T(A) \subset \mathrm{co}(\frac{1}{a} F(A) \cup$ $\cup \{o\})$, Aus den Eigenschaften von α und F folgt die Ungleichung $\alpha(T(A)) \leq \frac{k}{a} \alpha(A)$, Wegen $\frac{k}{a} < 1$ hat nach einem Resultat von Nussbaum [16] die Abbildung T einen Fixpunkt $x_o \in \partial B$. Dann gilt $F(x_o) = \|F(x_o)\| x_o$ und wegen $\lambda = \|F(x_o)\| \geq a$ ist das die Behauptung. Q.e.d.

Satz 3 ist inhaltlich eigentlich nur eine Umformulierung des zugrundeliegenden Fixpunktsatzes von Nussbaum, nach dem jede (α,k)-kondensierende Selbstabbildung der Einheitssphäre eines unendlichdimensionalen Banachraumes für $k \in [0,1)$ einen Fixpunkt besitzt. Man sieht nämlich sofort, dass aus Satz 3 auch dieser Fixpunktsatz folgt. Da F genau dann kompakt ist, wenn $k = 0$ gilt, stellt Satz 3 in der Tat eine Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Birkhoff-Kellogg dar. An dem bereits erwähnten Gegenbeispiel in [15],[19] erkennt man, dass die Voraussetzung $\|F(x)\| \geq a > k$ nicht durch $\|F(x)\| \geq k$ $(x \in \partial B)$ abgeschwächt werden kann. Aus dem Fall kompakter Abbildungen ist ferner bekannt, dass auch die Forderung $\|F(x)\| > k$ (mit $k = 0$) für die Existenz eines positiven Eigenwertes nicht ausreicht. Es bleibt die Frage offen, ob Satz 3 auch für mengenwertige Abbildungen, die auf dem Rand einer beliebigen abgeschlossenen beschränkten Nullumgebung definiert sind, Gültigkeit besitzt.

Man kann vermuten, dass eine Verallgemeinerung des Eigenwertsatzes von Krasnoselski auf den Fall (α,k)-kondensierender Abbildungen entsprechend Satz 3 möglich ist. In neueren Arbeiten über Eigenwertaussagen für positive kondensierende Abbildungen (s. z.B. [4],[17]) definiert man die betrachtete Abbildung auf dem gesamten Durchschnitt einer Nullumgebung W mit einem Kegel K und stellt auch auf $W \cap K$ Forderungen an F (und nicht nur auf $\partial W \cap K$ wie im kompakten Fall). Eines der bisher wohl allgemeinsten Resultate dieser Art stammt von Fitzpatrick und Petryshyn [4] und wurde auf der Grundlage des in [3] eingeführten Abbildungsgrades bewiesen. Wir zitieren dieses Ergebnis im folgenden Satz.

Satz 4. Es seien E ein Banachraum, K ein abgeschlossener Keil, $r > 0$, $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq r\}$, $k \geq 0$ und $T: B \cap K \to \mathfrak{K}(K)$

eine (α,k)-kondensierende Abbildung. Es existiere ein $w\in K$ und ein $\alpha > 0$ derart, dass

$$\| y + (r - \| x \|)w \| \geq \alpha \quad (y\in T(x),\ x\in B\cap K)$$

gilt. Ist die Ungleichung

$$(*) \qquad \frac{rk}{\alpha} < \frac{1}{2}$$

erfüllt, so existiert ein $x\in \partial B\cap K$ und ein $\lambda > 0$ mit $\lambda x\in T(x)$.

In [4] wurde gezeigt, dass für Hilberträume auf der rechten Seite von $(*)$ die Zahl 1 hinreichend ist. Es war bisher nicht bekannt, ob dies auch für beliebige Banachräume gilt.

Wir zeigen nun ohne Verwendung des Abbildungsgrades, dass Satz 4 auch in allgemeinen Banachräumen gültig bleibt, wenn die Ungleichung $(*)$ durch die schwächere Forderung $\frac{rk}{\alpha}<1$ ersetzt wird. Dies ergibt sich leicht aus dem folgenden allgemeineren Theorem, für dessen Beweis wir auch keinerlei Homotopiebetrachtungen benötigen.

<u>Theorem 2</u>. Es seien E ein quasivollständiger lokalkonvexer Raum, W eine abgeschlossene Nullumgebung aus E, K ein abgeschlossener Keil in E, ψ ein Nichtkompaktheitsmass auf E, $k\geq 0$ und $F:W\cap K \longrightarrow \mathfrak{K}(K)$ eine (ψ,k)-kondensierende Abbildung. Es existiere eine reelle Zahl $a> k$ derart, dass

$$F(W\cap K)\cap a(\mathrm{int}\ W) = \emptyset$$

gilt. Dann gibt es ein $x_0\in \partial W\cap K$ und ein $\lambda_0\geq a$, so dass $\lambda_0 x_0\in F(x_0)$ ist.

<u>Folgerung 5</u>. Es seien E ein Banachraum, $B = \{x\in E \mid \|x\| \leq 1\}$, K ein abgeschlossener Kegel in E, $k\geq 0$ und $F:B\cap K \longrightarrow \mathfrak{K}(K)$ eine (α,k)-kondensierende Abbildung. Es existiere ein $a> k$ mit

$$\| F(x)\| \geq a \qquad (x\in B\cap K).$$

Dann existiert ein $x_0 \in \partial B \cap K$ und ein $\lambda_0 \geq a$ mit $F(x_0) = \lambda x_0$.

Folgerung 6. Es seien E ein (nicht notwendig unendlich-dimensionaler) Banachraum, $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$, $k \geq 0$ und $F: B \to E$ eine (α, k)-kondensierende Abbildung. Es existiere ein $a > k$ mit

$$\|F(x)\| \geq a \qquad (x \in B).$$

Dann existiert ein $x_0 \in \partial B$ und ein $\lambda_0 \geq a$ mit $F(x_0) = \lambda x_0$.

Wir bemerken, dass für beschränkte Nullumgebungen in Banachräumen Theorem 2 im Fall kompakter Abbildungen (also $k = 0$) den Eigenwertsatz von Krasnoselski für mengenwertige Abbildungen impliziert (Folgerung 3). Sei nämlich für die kompakte Abbildung $F: \partial W \cap K \to \mathfrak{K}(K)$ die Beziehung $o \notin \overline{F(\partial W \cap K)}$ erfüllt. F hat eine kompakte Erweiterung $T: W \cap K \to \mathfrak{K}(K)$ (vgl. z.B. [14]) mit $T(W \cap K) \subset co(F(\partial W \cap K))$. Weil K ein Kegel ist, folgt daraus $o \notin \overline{T(W \cap K)}$ (vgl. [19], S. 20). Dann gilt für eine Nullumgebung V die Relation $V \cap T(W \cap K) = \emptyset$. Weil W beschränkt ist, existiert ein $a > 0$ mit $a(\mathrm{int}\, W) \subset V$, also gilt auch $a(\mathrm{int}\, W) \cap T(W \cap K) = \emptyset$. Folglich liefert die Anwendung von Theorem 2 die Behauptung des Satzes von Krasnoselski für mengenwertige Abbildungen.

Beweis von Theorem 2. Sei $G(x) = \frac{1}{a} F(x)$ $(x \in W \cap K)$. Offenbar ist $G: W \cap K \to \mathfrak{K}(K)$ eine $(\psi, \frac{k}{a})$-kondensierende Abbildung. Da $\frac{k}{a} < 1$ und E quasivollständig ist, muss G auch (ψ)-kondensierend sein. Deshalb gibt eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge $S \subset E$ mit $o \in S$ und $G(W \cap K \cap S) \subset (K \cap S)$ derart, dass $G_0 = G | W \cap K \cap S$ eine kompakte Abbildung ist (s. z.B [9]). Wir können o.B.d.A. annehmen, dass G_0 auf $W \cap K \cap S$ keinen Fixpunkt hat. Ein solcher müsste nämlich wegen $G(W \cap K) \cap (\mathrm{int}\, W) = \emptyset$

auf $\partial W \cap K \cap S$ liegen und wäre dann auf $\partial W \cap K$ Eigenvektor für F mit dem Eigenwert $\lambda = a$. Sei $R = K \cap S$ und

$$X_1 = \{x \in W \cap R : x \in tG_0(x) \text{ für ein } t \in [0,1]\}.$$

X_1 ist, wie man leicht erkennt, eine kompakte Teilmenge von E.

Wir nehmen an, es wäre die Beziehung $X_1 \cap (\partial W \cap R) = \emptyset$ erfüllt. Weil E vollständig regulär und $\partial W \cap R$ abgeschlossen ist, gibt es eine stetige Abbildung $\lambda : E \to [0,1]$ mit $\lambda(x) = 0$ $(x \in X_1)$, $\lambda(x) = 1$ $(x \in \partial W \cap R)$. Wir setzen

$$T(x) = \begin{cases} (1 - \lambda(x))G_0(x) & (x \in W \cap R) \\ \{o\} & (x \in R \setminus W). \end{cases}$$

Dann ist T offenbar eine kompakte Abbildung von R in $\mathfrak{K}(R)$ (man beachte $o \in R$) und hat somit nach dem bekannten Fixpunktsatz von K. Fan einen Fixpunkt $x_0 \in T(x_0)$. Dann gilt aber $x_0 \in X_1$, also $\lambda(x_0) = 0$ und $x_0 \in G_0(x_0)$. Dies widerspricht den Eigenschaften von G_0. Folglich muss die Relation $X_1 \cap (\partial W \cap R) \neq \emptyset$ gelten. Daher existieren ein $t_0 \in [0,1]$ und ein $x_0 \in \partial W \cap R$ mit $x_0 \in t_0 G_0(x_0)$. Wegen $x_0 \neq o$ gilt $t_0 \neq 0$. Damit ergibt sich die Beziehung $\frac{a}{t_0} x_0 \in F(x_0)$ und $\lambda_0 = \frac{a}{t_0} \geq a$ ist der gesuchte Eigenwert. Q.e.d.

Theorem 2 könnte auch leicht aus einem allgemeinen Fixpunktsatz gefolgert werden (s. z.B. [11]), den wir in [9], [10] mit ähnlichen Gedanken wir hier aus dem Satz von Fan implizierten. Um jedoch den kurzen Weg von Fixpunktsatz von Fan (der bekanntlich als einzige tieferliegende Grundlage den klassischen Satz von Brouwer hat) zu allgemeinen Eigenwertaussagen für nichtnotwendig kompakte Abbildungen deutlich zu demonstrieren, haben wir den Beweis von Theorem 2 ausführlich dargestellt.

Aus Theorem 2 ergibt sich unmittelbar die angekündigte Verschärfung der Aussage von Fitzpatrick und Petryshyn:

<u>Satz 5</u>. Es seien E ein Banachraum, K ein abgeschlossener Keil, $r>0$, $B=\{x\in E \mid \|x\|\leq r\}$, $k\geq 0$ und $T:B\cap K\longrightarrow$ $\longrightarrow \mathcal{R}(K)$ eine (ψ,k)-kondensierende Abbildung. Es existiere ein $w\in K$ und ein $\alpha>0$ derart, dass

$$\|y+(r-\|x\|)w\|\geq\alpha \quad (y\in T(x),\ x\in B\cap K)$$

gilt. Ist die Ungleichung

$$\frac{rk}{\alpha}<1$$

erfüllt, so existieren ein $x\in\partial B\cap K$ und ein $\lambda>k$ mit $\lambda x\in T(x)$.

<u>Beweis</u>. Sei $F(x)=T(x)+(r-\|x\|)w$ $(x\in B\cap K)$. Nach Voraussetzung gilt $\|z\|\geq\alpha$ $(z\in F(B\cap K))$. Sei $a=\frac{\alpha}{r}$. Für jedes $x\in a(\mathrm{int}\ B)$ muss $\|x\|<a$ sein, woraus die Beziehung

$$F(B\cap K)\cap a(\mathrm{int}\ B)=\emptyset$$

folgt. Wegen $a>k$ lässt sich auf F Theorem 2 anwenden. Danach existieren ein $\lambda_0>a>k$ und ein $x_0\in\partial B\cap K$ mit $\lambda_0x_0\in$ $\in F(x_0)=T(x_0)$. Q.e.d.

Wir können ferner mit Satz 5 eine Eigenwertaussage von S. Reich [17] für punktwertige auf mengenwertige Abbildungen ebenso übertragen, wie dies in [4] unter Verwendung von Satz 4 getan wurde. Wir führen den entsprechenden Beweis deshalb nicht aus, geben jedoch das entstehende Resultat an, da unser Satz 5 nun eine Abschwächung der in [4],[17] geforderten Ungleichung ermöglicht.

<u>Satz 6</u>. Es seien E ein Banachraum sowie K ein normaler, abgeschlossener Kegel in E, d.h., es existiert ein $\beta>0$ mit $\|x+y\|\geq\beta\|x\|$ $(x,y\in K)$. Sei $k\geq 0$, $r>0$, $B=\{x\in E: \|x\|\leq r\}$

und $F: B \cap K \longrightarrow \mathcal{K}(K)$ eine (ψ, k)-kondensierende Abbildung. Wenn $\alpha = \sup_{a \in (0,\alpha)} \{ \inf \{ \| y \| : y \in F(x),\ a \le \| x \| \le r \} \} > \frac{rk}{\beta}$ gilt, so gibt es ein $x \in \partial W \cap K$ und ein $\lambda > 0$ mit $\lambda x \in F(x)$.

In [4],[17] musste im allgemeinen $\alpha > 2\,\frac{rk}{\beta}$ vorausgesetzt werden.

L i t e r a t u r

[1] G.D. BIRKHOFF und O.D. KELLOGG: Invariant points in function spaces, Transact. Amer. Math. Soc. 23, 96-115(1922).

[2] K. FAN: Fixed point and minimax theorems in locally convex linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 38, 121-126(1952).

[3] P.M. FITZPATRICK und W.V. PETRYSHYN: Fixed point theorems and the fixed point index for mappings in cones, J. London Math. Soc. (2),11, 75-85(1975).

[4] P.M. FITZPATRICK und W.V. PETRYSHYN: Positive eigenvalues for nonlinear multivalued noncompact operators with applications to Differential operators, Journ. Differential Equ. 22, 428-441 (1976).

[5] A. GRANAS: The theory of compact vector fields and some of its applications to topology of functional spaces (I), Rozprawy Mat. 30, Warszawa 1962.

[6] S. HAHN: Zur Leray-Schauder-Theorie in topologischen Vektorräumen, Wiss. Zeitschr. Techn. Univ. Dresden 24, 375-378(1975).

[7] S. HAHN: Fixpunktsätze für mengenwertige Abbildungen in lokalkonvexen Räumen, Math. Nachr. 73, 269-283 (1976).

[8] S. HAHN: Gebietsinvarianzsatz und Eigenwertaussagen für konzentrierende Abbildungen, Comment. Math. Univ. Carolinae 18, 697-713(1977).

[9] S. HAHN: Ein Homotopieerweiterungssatz für konzentrierende Abbildungen im lokalkonvexen Räumen, erscheint im Studia Math. 66,2.

[10] S. HAHN: A remark on a fixed point theorem for condensing set-valued mappings. Preprint TU Dresden 1977, 77/07/05.

[11] G. KAYSER: Zur Existenz von Fixpunkten bei kompakten bzw. konzentrierenden mengenwertigen Abbildungen in lokalkonvexen Räumen, Berichte der Jahrestagung Num. Math. Potsdam-Cecilienhof,25.11. - 1.12.1973, 46-53, T.H. Karl-Marx-Stadt, Sektion Mathematik.

[12] M.A. KRASNOSELSKI: Positive Lösungen von Operatorengleichungen (russ.), Moskau 1962.

[13] M. LANDSBERG und T. RIEDRICH: Über positive Eigenwerte kompakter Abbildungen in topologischen Vektorräumen, Math. Ann. 163, 50-61(1966).

[14] T.W. MA: Topological degrees of set-valued compact fields in locally convex spaces, Diss. Math. 92(1972).

[15] M. MARTELLI: A Rothe's type theorem for noncompact acyclic-valued maps. Proceedings of the conference on problems in nonlinear functional analysis, Universität Bonn July 22-26, 1975. Ber. Ges. f. Math. u. Datenverarbeitung Bonn, Nr. 103(1975).

[16] R.D. NUSSBAUM: Some fixed point theorems, Bull. Amer. Math. Soc. 77, 360-365(1971).

[17] S. REICH: Characteristic vectors of nonlinear operators, Rend. Accad. Naz. Lincei 50, 682-685(1971).

[18] T. RIEDRICH: Das Birkhoff-Kellogg-Theorem für lokal radial beschränkte Räume, Math. Ann. 166, 264-276 (1966).

[19] T. RIEDRICH: Vorlesungen über nichtlineare Operatorengleichungen, Teubner-Texte, Leipzig 1976.

[20] B.N. SADOWSKI: Limeskompakte und kondensierende Abbildungen, Uspechi mat. nauk, 27,1, 81-146(1972) (russ.).

Technische Universität

Sektion Mathematik

Mommsenstrasse 13

DDR-8027 Dresden

(Oblatum 26.8. 1978)