D. V. Rančin

О суммах $n$-мерных топологий

*Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, Vol. 19 (1978), No. 3, 595--618

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105877`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

19,3 (1978)

# О СУММАХ $m$-МЕРНЫХ ТОПОЛОГИЙ

Д.В. РАНЧИН, Москва

Abstract: Dimension of a topology being the supremum of finitely or countably many given topologies is investigated. Supremum of one-dimensional compact spaces may have infinite dimension.

Key words: Dimension, supremum of topologies.

AMS: 54F45

---

Пусть $\{\mathcal{T}_i : i=1,2,\dots\}$ - некоторое конечное или счетное семейство топологий на множестве $X$ и $\mathcal{T}^* = \vee\{\mathcal{T}_i : i=1,2,\dots\}$ - их сумма, точнее, структурная сумма или точная верхняя грань, то есть наименьшая топология на множестве $X$, содержащая все топологии $\mathcal{T}_i$. Вопрос о том, какую размерность может иметь пространство $(X, \mathcal{T}^*)$ ставился А.В. Архангельским на семинаре по общей топологии в Московском университете. Интерес к суммам топологий возрос в последнее время после результатов Е.Г. Пыткеева [1, 2]. Возможность представления данной топологии как верхней грани некоторого семейства бикомпактных топологий рассматривалась А.И. Вашкировым [3].

Как известно, операция структурной суммы и операция пересечения топологий превращают совокупность всех топологий на данном множестве в структуру (lattice). Отметим работы

А.В. Архангельского [4] и В.П. Золотарева [5, 6] по исследованию поведения ряда топологических свойств при пересечении топологий. В.П. Золотарев, в частности, изучал поведение размерности при пересечении топологий. В настоящей работе изучается поведение размерности при операции структурной суммы топологий. Мы почти полностью ограничимся метризуемыми пространствами со счетной базой, особое внимание уделяя суммам топологий, гомеоморфных $n$-мерному кубу. Это объясняется тем, что интересные результаты получаются уже и в этом частном случае. С другой стороны, даже для таких узких классов пространств многие естественно возникающие в рамках данной проблематики вопросы оказываются не совсем тривиальными, и ряд интересных вопросов остается открытым.

## § 0. Некоторые замечания и элементарные результаты о суммах топологий

0.1. Замечание. Пусть $\mathcal{A}$ - семейство топологий на $X$ и $\mathcal{T}^*$ - их сумма. Тогда пространство $(X, \mathcal{T}^*)$ естественно гомеоморфно некоторому подпространству $\Pi\{(X,\mathcal{T}): \mathcal{T}\in\mathcal{A}\}$. Причем естественный гомеоморфизм определяется так: произвольной точке $x \in X$ ставится в соответствие точка $\mathscr{x} \in \Pi\{(X,\mathcal{T}): \mathcal{T}\in\mathcal{A}\}$, все координаты которой равны $x$. Иными словами, $(X, \mathcal{T}^*)$ гомеоморфно "диагонали" в $\Pi\{(X,\mathcal{T}): \mathcal{T}\in\mathcal{A}\}$, то есть множеству $\Delta(X^{\mathcal{A}})$, где $\Delta(X^{\mathcal{A}}) = \{\mathscr{x} \in X^{\mathcal{A}}: p_\alpha(\mathscr{x}) = p_{\alpha'}(\mathscr{x})$ для всех $\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}\}$. Через $p_\alpha$ обозначается естественная проекция $X^{\mathcal{A}}$ на $\alpha$-й сомножитель.

Этот факт отмечается, например, в книге А.В. Архангельского и В.И. Пономарева [7].

0.2. <u>Замечание</u>. Из 0.1 следует, в частности, что любая конечная или счетная сумма метризуемых топологий есть метризуемая топология. Если исходные топологии были со счетной базой, то получится также топология со счетной базой.

0.3. <u>Предложение</u>. Если $\mathcal{A}$ - некоторое семейство топологий на $X$, $\mathcal{T}^*$ - их сумма и для каждого $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$ $ind(X, \mathcal{T}) = 0$, то $ind(X, \mathcal{T}^*) = 0$.

Для дальнейшего нам потребуется несколько иная формулировка по существу того же факта, который составляет содержание замечания 0.1.

0.4. <u>Предложение</u>. Топология $\mathcal{T}$ на множестве $X$ тогда и только тогда является суммой некоторого семейства $\{\mathcal{T}_\alpha : : \alpha \in \mathcal{A}\}$ топологий $\mathcal{T}_\alpha$ таких, что для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ пространство $\{Y, \mathcal{T}_\alpha\}$ гомеоморфно $X_\alpha, \tau_\alpha$ когда существует такое семейство $\{f_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}, \alpha \neq \alpha_0\}$ взаимно однозначных отображений $f_\alpha : X_{\alpha_0} \to X_\alpha$ что $(Y, \mathcal{T})$ гомеоморфно графику $\Gamma \subset X^{\mathcal{A}}$ диагонального произведения отображений $f_\alpha$.

Доказательство. Пусть $X^* = \Pi\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ и для каждого $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{\alpha_0\}$ $f_\alpha : X_{\alpha_0} \xrightarrow{\text{на}} X_\alpha$ - взаимно-однозначное отображение. Пусть $\Gamma \subset X^*$, $\Gamma$ - график диагонального произведения отображений $f_\alpha$, то есть такое подмножество точек из $X^*$, что если $x \in \Gamma$ и $p_{\alpha_0}(x) = x_{\alpha_0}$, то для каждого $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{\alpha_0\}$ выполнено $p_\alpha(x) = f_\alpha(x_{\alpha_0})$. Тогда $\pi_\alpha = p_\alpha|_\Gamma$ - взаимно-однозначное отображение $\Gamma$ на $X_\alpha$. Пусть $\mathcal{T}'_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(\tau_\alpha)$ - прообраз топологии $\tau_\alpha$. Тогда

$(\Gamma, \mathcal{T}'_\alpha) \underset{top}{=} (X_\alpha, \tau_\alpha)$ и топология $\mathcal{T}'$ на $\Gamma$, индуцированная из $X^*$, равна сумме топологий $\mathcal{T}'_\alpha$: $\mathcal{T}' = \vee\{\mathcal{T}_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$. Отсюда если $(Y, \mathcal{T}) \underset{top}{=} (\Gamma, \mathcal{T}')$, то $\mathcal{T} = \vee\{\mathcal{T}_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, где $(Y, \mathcal{T}_\alpha) \underset{top}{=} (X, \tau_\alpha)$. Обратно, пусть топология $\mathcal{T}$ на $Y$ такова, что $\mathcal{T} = \vee\{\mathcal{T}_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ и для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ $(Y, \mathcal{T}_\alpha) \underset{top}{=} (X_\alpha, \tau_\alpha)$. По 0.1 пространство $(Y, \mathcal{T})$ гомеоморфно "диагонали" $\Delta(Y^{\mathcal{A}})$ в $\Pi\{(Y, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$. Зафиксируем для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ гомеоморфизм $h_\alpha : (Y, \mathcal{T}_\alpha) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha)$ и пусть $h = \Pi h_\alpha : \Pi\{(Y, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\} \longrightarrow \Pi\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ – произведение отображений $h_\alpha$. Обозначим $h' = h|_{\Delta(Y^{\mathcal{A}})}$ и $\Gamma = h'(\Delta(Y^{\mathcal{A}})) \subset \Pi\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$. Множество $\Gamma$ состоит из точек вида $(h_\alpha(y))_{\alpha \in \mathcal{A}} \in \Pi\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$, где $y$ пробегает множество $Y$.

Так как для каждого $\alpha$ $h_\alpha$ -взаимно-однозначное отображение, то $\Gamma$ обладает тем свойством, что для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ естественная проекция $\pi_\alpha : \Gamma \longrightarrow X_\alpha$ взаимно-однозначна.

Пусть $\alpha_0 \in \mathcal{A}$. Для каждого $y \in Y$ пусть $x_\alpha = h_{\alpha_0}(y) \in X_{\alpha_0}$. Тогда для каждого $\alpha \neq \alpha_0$ $h_\alpha(y) = h_\alpha(h^{-1}_{\alpha_0}(x_{\alpha_0})) = f_\alpha(x_{\alpha_0})$, где через $f_\alpha$ обозначено взаимно-однозначное отображение $h_\alpha \circ h^{-1}_{\alpha_0}$ множества $X_{\alpha_0}$ на $X_\alpha$. Ясно, что $\Gamma$ является графиком диагонального произведения отображений $f_\alpha$. Так как $h'$ гомеоморфизм $\Delta(Y^{\mathcal{A}})$ на $\Gamma$, то предложение полностью доказано.

0.5. <u>Замечание</u>. Из анализа доказательства предложения 0.4 видим, что топология $\mathcal{T}$ на $Y$ тогда и только тогда является суммой семейства $\{\mathcal{T}_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ топологий таких, что

$(Y,\mathcal{T}_\alpha)$ гомеоморфно пространству $(X_\alpha,\tau_\alpha)$, когда $(Y,\mathcal{T})$ топологически вкладывается в $\Pi\{(X_\alpha,\tau_\alpha):\alpha\in\mathcal{A}\}$ в качестве подмножества, которое взаимно-однозначно проектируется на каждое $X_\alpha$.

В частности, топология $\mathcal{T}$ на множестве $Y$ тогда и только тогда является суммой двух топологий $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, для которых $(Y,\mathcal{T}_1)$ и $(Y,\mathcal{T}_2)$ гомеоморфны $(X,\tau)$, когда $(Y,\mathcal{T})$ гомеоморфно графику $\Gamma\subset(X,\tau)\times(X,\tau)$ взаимно-однозначного отображения $(X,\tau)$ на себя.

0.6. <u>Лемма</u>. Пусть $\lambda=\aleph_1$ или $\lambda=\mathfrak{c}$. Если $\mathcal{F}$ - семейство взаимно-однозначных преобразований множества $X$ на себя и $|\mathcal{F}|\leq\aleph_0$, то для любого $S\subset X$ такого, что $|S|<\lambda$ существует такое множество $\tilde{S}$, что $S\subset\tilde{S}\subset X$, $|\tilde{S}|<\lambda$ и $f(\tilde{S})=\tilde{S}$ для каждого $f\in\mathcal{F}$.

Доказательство. Пусть $G(\mathcal{F})$ - наименьшая подгруппа группы всех взаимно-однозначных преобразований множества $X$, содержащая $\mathcal{F}$. Тогда $|G(\mathcal{F})|\leq\aleph_0$, и $\tilde{S}=\cup\{g(S):g\in G(\mathcal{F})\}$ - искомое множество.

0.7. <u>Предложение</u>. Пусть $\mathcal{F}$ - семейство взаимно-однозначных преобразований множества $X$. Если $|\mathcal{F}|=k\leq\aleph_0$, $S\subset X$ и $|S|<\lambda$, где $\lambda=\aleph_1$ или $\lambda=\mathfrak{c}$, то существует такое множество $\tilde{S}$, что $|\tilde{S}|<\lambda$, $S\subset\tilde{S}\subset X$ и график диагонального произведения всех отображений из $\mathcal{F}$ лежит в множестве $(\tilde{S})^{k+1}\cup(X\setminus\tilde{S})^{k+1}\subset X^{k+1}$.

Доказательство. По лемме 0.6 существует $\tilde{S}\subset X$ такое, что $S\subset\tilde{S}$, $|\tilde{S}|<\lambda$ и $f(\tilde{S})=\tilde{S}$ для каждого $f\in\mathcal{F}$. Тогда ясно, что график диагонального произведения отображений из $\mathcal{F}$ лежит в $\tilde{S}\times(\tilde{S})^k\cup(X\setminus\tilde{S})\times(X\setminus\tilde{S})^k=(\tilde{S})^{k+1}\cup(X\setminus\tilde{S})^{k+1}$.

0.8. <u>Следствие</u>. Если $(Y,\mathcal{T}) \in k\ top\ (X,\tau)$, то для всякого $S \subset X$ такого, что $|S| < \lambda$ ($\lambda = \aleph_1$ или $\lambda = \mathfrak{c}$), существует $\tilde{S} \subset X$, так что $S \subset \tilde{S}$, $|\tilde{S}| < \lambda$ и $(Y,\mathcal{T})$ гомеоморфно вкладывается в подпространство $(\tilde{S})^k \cup (X \setminus \tilde{S})^k$ пространства $(X,\tau)^k$.

0.9. Определения. Если $\mathfrak{M}$ - некоторое кардинальное число и $X$ - топологическое пространство, то через $\mathfrak{M}\ top\ (X)$ мы будем обозначать класс пространств, топология которых представима в виде суммы не более чем $\mathfrak{M}$ топологий, гомеоморфных $X$. В случае $\mathfrak{M} = \aleph_0$ вместо $\aleph_0\ top(X)$ будем использовать обозначение $\sigma\ top\ (X)$. Обозначим через $\omega\ top\ (X) = \bigcup\{k\ top\ (X);\ k = 1,2,\dots\}$ класс пространств, топология которых представима в виде суммы конечного числа топологий, гомеоморфных $X$.

Ниже мы оценим, какую размерность может иметь пространство $Y \in k\ top\ (X)$ для конечного $k$.

## § 1. <u>Размерность конечных сумм топологий</u>

В этом параграфе все рассматриваемые пространства предполагаются метризуемыми со счетной базой. Размерность пространства $X$ обозначается $\dim X$.

1.1. Определение. Для произвольного пространства $X$ и для каждого $k \geq 1$, $k \leq \aleph_0$ определим

$$d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(X) = \min\{\dim (X \setminus S)^K;\ |S| < \mathfrak{c}\}.$$

Очевидно, что из $Y \subset X$ следует, что $d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(Y) \leq d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(X)$. Если $Y \subset X$ и $|X \setminus Y| < \mathfrak{c}$, то $d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(X) = d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(Y)$.

1.2. Теорема. Для каждого пространства $X$, для любого $k \leq \aleph_0$, если $Y \in top(X)$, то $\dim Y \leq d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(X)+1$.

Доказательство. Если $Y \in top(X)$ и $S_0 \subset X$ таково, что $d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(X) = \dim (X \setminus S_0)^k$, то тогда из 0.8 следует, что существует $\tilde{S}_0 \subset X$ такое, что $|\tilde{S}| < \mathfrak{c}$, $S_0 \subset \tilde{S}_0$ и $Y \underset{top}{=} \Gamma \subset (\tilde{S}_0)^k \cup (X \setminus \tilde{S}_0)^k \subset X^k$.

Так как $|\tilde{S}_0| < \mathfrak{c}$, то ясно, что $\dim (\tilde{S}_0)^k = 0$. Из определения $d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(X)$ следует, что $\dim (X \setminus \tilde{S}_0)^k \geq d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(X)$. Но так как $(X \setminus \tilde{S}_0)^K \subset (X \setminus S_0)^k$, то $\dim (X \setminus \tilde{S}_0)^k = d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(X)$. По теореме суммы получаем, что $\dim \Gamma \leq d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(X) + 1$, откуда $\dim Y \leq d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(X) + 1$.

1.3. Определение. (Тумаркин Л.А. [8]) Рациональным называется такое пространство $X$, что $\dim (X \setminus S) < \dim X$ для некоторого счетного $S \subset X$. Эквивалентное определение есть в работе Менгера [9].

Простейшим примером $n$-мерного рационального пространства является $n$-мерный куб $I^n$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Из 1.1 и 1.3 получаем:

1.4. Предложение. Если $X$ - рациональное пространство, то $d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(X) \leq k(\dim X - 1)$. В частности, $d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(I^n) \leq k(n-1)$. Из 1.2 и 1.4 имеем:

1.5. Следствие. Для любого $k \leq \aleph_0$ и для любого рационального пространства $X$ $\max \{\dim Y : Y \in k\, top(X)\} \leq k(\dim X - 1) + 1$. В частности, $\max \dim Y : Y \in k\, top(I^n) \leq k(n-1) + 1$.

Если $S \subset I^n$ и $|S| < \mathfrak{c}$, то $I^n \setminus S$ содержит множество, гомеоморфное $I^{n-1}$. Поэтому $\dim (I^n \setminus S)^k \geq k(n-1)$. Отсюда и из 1.4 получаем простое, но важное соотношение:

1.5.1. $$d_c^{(k)}(I^n)=\begin{cases} 0 & \text{при } n=1 \text{ для всякого } k \leq \aleph_0 \\ k(n-1) & \text{при } n>2 \text{ для всякого } k<\aleph_0 \end{cases}$$

Теперь мы перейдем к результатам, показывающим, что операция суммирования топологий может значительно повышать размерность. Для этого потребуется следующая конструкция:

1.5.2. Пусть $(X, \mathcal{T}_0)$ - топологическое пространство и $\varphi: X \xrightarrow{\text{на}} X$ - взаимно-однозначное отображение множества $X$ на себя. Пусть $\mathbb{Z}$ - множество целых чисел и $G_\varphi = \{\varphi^m : m \in \mathbb{Z}\}$ - циклическая группа взаимно-однозначных преобразований множества $X$, порожденная $\varphi$. Рассмотрим для каждого $m \in \mathbb{Z}$ топологию $\mathcal{T}_m = \varphi^m(\mathcal{T}_0) = \{\varphi^m(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathcal{T}_0\}$, - "сдвиг" топологии $\mathcal{T}_0$ при помощи отображения $\varphi^m$. Тогда $(X, \mathcal{T}_m)$ гомеоморфно $(X, \mathcal{T}_0)$ и $\varphi^m : (X,\mathcal{T}_0) \longrightarrow (X,\mathcal{T}_m)$ -гомеоморфизм. Топология $\mathcal{T}^*$ на $X$ циклически порождается отображением $\varphi$, если $\mathcal{T}^* = \vee\{\mathcal{T}_m : m \in \mathbb{Z}\}$. Легко видеть, что $\mathcal{T}^*$ является минимальной топологией на $X$, мажорирующей исходную топологию $\mathcal{T}_0$, для которой отображение $\varphi$ является гомеоморфизмом. Такого рода модификации топологии в более общем случае рассматривались автором в [10]. Некоторые результаты автора о размерности таких модификаций содержатся в [11].

Топологию $\mathcal{T}^*$ на $X$, циклически порождаемую отображением $\varphi$ из топологии $\mathcal{T}_0$, мы будем обозначать $G_\varphi(\mathcal{T}_0)$. Если топология $\mathcal{T}_0$ на $X$ фиксирована и соответствующее пространство обозначается просто через $X$, то пространство, получаемое наделением множества $X$ топологией $G_\varphi(\mathcal{T}_0)$ мы будем обозначать просто через $G_\varphi(X)$.

Заметим, что если порядок группы $G_\varphi$ не превосходит $k$, то $(X, \mathcal{T}^*) \in k\,top\,(X, \mathcal{T}_0)$.

1.6. Обозначение. Пусть $\{\varphi^m(x)\}$ – орбита точки $x$. Равенство $o^*(\varphi) = k$ означает, что орбита каждой точки состоит ровно из $k$ элементов. Ясно, что из $o^*(\varphi) = k$ следует $|G_\varphi| = k$. Поэтому если $o^*(\varphi) = k$, то $G_\varphi(X) \in$ $\in k\,top\,(X)$.

1.7. Теорема. Для любого пространства $X$, для каждого $k \geq 2$ существует $Y \in k\,top\,(X)$ такое, что $\dim Y \geq$ $\geq d_c^{(k)}(X)$. Более того, существует взаимно-однозначное преобразование $\varphi : X \xrightarrow{\text{на}} X$, для которого $o^*(\varphi) = k$ и $\dim G_\varphi(X) \geq d_c^{(k)}(X)$.

Для доказательства теоремы 1.7 нам понадобятся следующие вспомогательные обозначения и определения:

1.7.1. Пусть $X$ – некоторое пространство, $2 \leq k \leq \infty$. Обозначим через $X^k_{(i,j)} = \{x \in X^k : p_i(x) = p_j(x)\}$ и $\Delta_{(k)}(X) = \bigcup_{(i,j)} X^k_{(i,j)}$.

Определение. Множество $A \subset X^k$ называется правильно расположенным в $X^k$, если существует такое конечное множество $C \subset X$, что $A \subset \bigcup\{p_i^{-1}(C) : i = 1, 2, \ldots\} \cup \Delta_{(k)}(X)$.

1.7.2. Лемма. Для любого бесконечного пространства $X$, для любого целого $k \geq 2$, для любого правильно расположенного множества $A \subset X^k$ $\dim(X^k \setminus A) = \dim X^k$.

Доказательство леммы нетрудно провести с помощью индукции по $k$.

Доказательство теоремы 1.7. Зафиксируем произвольное множество $M \subset X$ такое, что $|M| = \aleph_0$. Пусть

$W = X \setminus M$ . Ясно, что $d_{c}^{(k)}(W) = d_{c}^{(k)}(X)$ .

Пусть $\{G_{\alpha}: \alpha < c\}$ - совокупность всех непустых $G_{\delta}$ -множеств пространства $W^{k}$, размерность которых меньше $d_{c}^{(k)}(W) = d_{c}^{(k)}(X)$ . Эти $G_{\delta}$-множества занумерованы трансфинитными числами, меньшими начального ординала мощности $c$ . Начальный ординал отождествляется с соответствующим кардиналом.

Рассмотрим множество $G_0$ . Так как по лемме 1.7.2 $\dim (W^{k} \setminus \Delta_{(k)}(W)) = \dim W^{k} \geq d_{c}^{(k)}(W)$ и $\dim G_0 < d_{c}^{(k)}(W)$ , то $(W^{k} \setminus \Delta_{(k)}(W)) \setminus G_0 \neq \Lambda$ . Пусть $\varkappa = (x_1^0, \ldots, x_k^0) \in W^{k} \setminus (\Delta_{(k)}(W) \cup G_0)$ . Тогда все точки $x_i^0$ различны. Положим $C_0 = \{x_1^0, \ldots, x_k^0\}$ и $S_0 = \Lambda$ .

Пусть $\beta < c$ и для каждого $\alpha < \beta$ построены дизъюнктные $k$-элементные множества $C_{\alpha} = \{x_1^{\alpha}, \ldots, x_k^{\alpha}\}$ так что $C_{\alpha} \subset W \setminus S_{\alpha}$ , где $S_{\alpha} = \cup\{C_{\gamma}: \gamma < \alpha\}$ и так что $\varkappa_{\alpha} = (x_1^{\alpha}, \ldots, x_k^{\alpha}) \notin G_{\alpha}$ .

Пусть $S_{\beta} = \cup\{C_{\alpha}: \alpha < \beta\}$ . Тогда $|S_{\beta}| < c$ . Рассмотрим $L_{\beta} = (W^{k} \setminus (\Delta_{(k)}(W) \cup G_{\beta})) \cap (W \setminus S_{\beta})^{k}$ . Покажем, что $L_{\beta} \neq \Lambda$ .

Действительно, допустим, что $(W^{k} \setminus (\Delta_{(k)}(W) \cup G_{\beta})) \cap \cap (W \setminus S_{\beta})^{k} = \Lambda$ . Тогда $(W \setminus S_{\beta})^{k} \subset \Delta_{(k)}(W) \cup G_{\beta}$ . Но $\Delta_{(k)}(W) \cap (W \setminus S_{\beta})^{k} = \Delta_{(k)}(W \setminus S_{\beta})$ .
Таким образом, $(W \setminus S_{\beta})^{k} \setminus \Delta_{(k)}(W \setminus S_{\beta}) \subset G_{\beta}$ , и, следовательно, $\dim ((W \setminus S_{\beta})^{k} \setminus \Delta_{(k)}(W \setminus S_{\beta})) \leq \dim G_{\beta} < d_{c}^{(k)}(W)$ .
Но по лемме 1.7.2 $\dim ((W \setminus S_{\beta})^{k} \setminus \Delta_{(k)}(W \setminus S_{\beta}) = = \dim (W \setminus S_{\beta})^{k} \geq d_{c}^{(k)}(W)$ . Полученное противоречие показывает, что

$(W \setminus S_\beta)^k \setminus (\Delta_{(k)}(W) \cup G_\beta) \neq \Lambda$.

Выберем $\varkappa_\beta = (x_1^\beta, \dots, x_k^\beta) \in (W \setminus S_\beta)^k \setminus (\Delta_{(k)}(W) \cup G_\beta)$.

Тогда если $C_\beta = \{x_1^\beta, \dots, x_k^\beta\}$, то $C_\beta \subset W \setminus S_\beta$, и следовательно, для каждого $\alpha < \beta$ $C_\alpha \cap C_\beta = \Lambda$ и $\varkappa_\beta \notin G_\beta$.

Таким образом по трансфинитной индукции мы построим систему дизъюнктных $k$-элементных множеств $\{C_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$, так что при некотором упорядочении $C_\beta = \{x_1^\beta, \dots, x_k^\beta\}$ имеем $\varkappa_\beta = (x_1^\beta, \dots, x_k^\beta) \notin G_\beta$.

Обозначим $C = \bigcup\{C_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$.

Определим взаимно-однозначное отображение $f: C \xrightarrow{на} C$ следующим образом: на каждом $C_\beta$ отображение $f$ является циклическим сдвигом: $f(x_i^\beta) = x_{i+1}^\beta$ при $i < k$ и $f(x_k^\beta) = x_1^\beta$.

Так как $X \setminus W = M$ бесконечно, то и $X \setminus C$ бесконечно.

Доопределим на $X \setminus C$ отображение $f$ произвольным образом так, чтобы $X \setminus C$ отображалось на себя взаимно-однозначно и чтобы любая орбита состояла ровно из $k$ элементов.

Таким образом определено отображение $f : X \xrightarrow{на} X$ взаимно-однозначное и такое, что орбита каждой точки состоит ровно из $k$ элементов.

Рассмотрим $\Gamma = \{(x, fx, \dots, f^{k-1}x) : x \in X\} \subset X^k$.

Ясно, что $\Gamma \in k\,top\,(X)$ (из предложения 0.4).

Покажем, что $\dim \Gamma \geq d_c^{(k)}(X)$. Предположим, что $\dim \Gamma < d_c^{(k)}(X)$. Тогда по теореме Тумаркина [12] существует $G_\delta$-множество $G \subset X^k$, так что $\Gamma \subset G$ и

$\dim G = \dim \Gamma < d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(X)$ . Ясно, что $G \cap W^k$ – $G_\delta$-множество в $W^k$ размерности меньшей $d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(X)$ , Но тогда для некоторого $\beta < \mathfrak{c}$ $G \cap W^k = G_\beta$ , а тогда $\Gamma \cap W^k \subset G_\beta$ .

Рассмотрим точку $(x_1^\beta, \dots, x_k^\beta) \in \Gamma \cap W^k$ . По построению $x_\beta \notin G_\beta$ вопреки тому, что $\Gamma \cap W^k \subset G_\beta$ . Полученное противоречие показывает, что $\dim \Gamma \geq d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(X)$ .

Положим $Y = \Gamma$ . Ясно, что $Y \in k\,top(X)$ и $\dim Y \geq$ $\geq d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(X)$. Легко проверить, что $Y$ гомеоморфно пространству, определяемому такой топологией $\mathcal{T}^*$ на множестве $X$ , которая циклически порождается из первоначальной с помощью отображения $f$ .

Теорема доказана.

Из 1.2, 1.5.1 и 1.7 получаем

1.8 . <u>Теорема</u>. Для любого $k \geq 2$ , $n \geq 2$

$$k(n-1) \leq \max\{\dim Y : Y \in k\,top(I^n)\} \leq k(n-1)+1 .$$

Теорема 1.8 показывает, в частности, что для всякого $Y \in 2\,top(I^3)$ $\dim Y \leq 5$ и существует такое пространство $Y_0 \in 2\,top(I^3)$, что $\dim Y_0 \geq 4$ . Вопрос о существовании такого пространства $Y \in 2\,top(I^3)$, что $\dim Y = 5$, остается открытым. Также неизвестно, существует ли $Y \in 2\,top(I^2)$, для которого $\dim Y = 3$ . Сформулируем задачу в общей форме.

1.9. Задача. Доказать или опровергнуть одно из равенств:

для $k, n \geq 2$:
$$\max\{\dim Y : Y \in k\,top(I^n)\} = k(n-1)$$
$$\max\{\dim Y : Y \in k\,top(I^n)\} = k(n-1)+1$$

Теорема 1.7 позволяет получить следующее предложение:

1.10. Предложение. Для любого компакта $X$ такого, что $\dim X \geq 3$ $\max\{\dim Y : Y \in k\, top(X)\} \geq k(\dim X - 2) + 1$.

Доказательство. Предложение непосредственно следует из теоремы 1.7 и следующей леммы

1.11. <u>Лемма</u>. Для любого компакта $X$ размерности $\geq 3$

$$d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(X) \geq k(\dim X - 2) + 1 .$$

Доказательство: Пусть $S \subset X$ и $|S| < \mathfrak{c}$. Так как $\dim S = 0$ по теореме Тумаркина [12] существует $0$-мерное множество $G$ типа $G_\delta$, такое что $S \subset G$. Рассмотрим $\Phi = X \setminus G \subset X \setminus S$. Множество $\Phi$ имеет тип $F_\sigma$ в компакте $X$. Так как $\dim \Phi \geq \dim X - 1$, то существует компакт $F \subset \Phi$ такой, что $\dim F \geq \dim X - 1$. Ясно, что $F^k \subset (X \setminus S)^k$. Оценим $\dim F^k$. Воспользуемся следующим результатом В.И. Кузьминова [13]: для любого компакта $F$, такого, что $\dim F \geq 2$ размерность компакта $F^k$ может быть равна только одному из чисел $k \dim F$, $k(\dim F - 1) + 1$. Таким образом всегда $\dim F^k \geq k(\dim F - 1) + 1 \geq k(\dim X - 2) + 1$. Отсюда $d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(X) \geq k(\dim X - 2) + 1$.

1.12. Предложение. Если $X$ - компакт и $2 \leq \dim X < \infty$, то класс $\omega\, top(X)$ содержит пространства сколь угодно большой размерности и последовательность классов $k\, top(X)$ строго возрастает.

Доказательство. Для случая $\dim X \geq 3$ 1.12 является непосдредственным следствием 1.10. Если же $\dim X = 2$, то поскольку для любого $S \subset X$ такого, что $|S| < \mathfrak{c}$, существует компакт $F$ с $\dim F \geq 1$, то $d_{\mathfrak{c}}^{(k)}(X) \geq \dim F^k$. Если

$\dim F \geq 2$, то по упомянутому в 1.10 результату В.И. Кузьминова $\dim F^{k} \geq k+1$. Если же $\dim F = 1$, то, как известно, имеет место равенство $\dim F^{k} = k$. В любом случае $d_{c}^{(k)}(X) \geq k$, и, как следует из 1.7, существует $Y \in k\,top(X)$, так что $\dim Y \geq k$. Таким образом, $\omega\,top(Y)$ содержит пространства сколь угодно большой конечной размерности, и последовательность классов $k\,top(X)$, как легко видеть, строго возрастает.

Следующее предложение показывает, что компактность пространства $X$ в 1.12 важна.

1.13. Предложение. Для каждого $n < \infty$ существует пространство $X_n \subset R^{n+1}$ такое, что $\dim X_n = n$ и для любого $Y \in k\,top(X_n)$ при любом $k \leq \aleph_0$ выполнено $\dim Y \leq n$.

Справедливость предложения следует из следующей теоремы Андерсона и Кейслера [14]: для каждого $n < \infty$ существует такое пространство $X_n \subset R^{n+1}$, что $\dim X_n = \dim X_n^{\aleph_0} = n$.

В связи с предложением 1.12 возникает следующая задача

1.14. Задача. Существует ли несчетное пространство $X$ со счетной базой, для которого $\sigma\,top(X) = 2\,top(X)$ или хотя бы $3\,top(X) = 2\,top(X)$?

По-видимому, ни отрезок $I$, ни канторово совершенное множество $C$ не являются такими пространствами, хотя размерностные соотношения этому не мешают. Соответствующий вопрос для отрезка можно оформулировать в очень элементарной форме.

1.15. Задача. Пусть $\Gamma \subset I^3$ и $\Gamma$ - взаимно-однозначно проектируется на каждое ребро куба. Можно ли вложить $\Gamma$

в квадрат $I^2$ в качестве такого подмножества $\Gamma'$, которое взаимно-однозначно проектируется на каждую сторону квадрата? Положительный ответ означал бы, что $3\,top\,(I) = 2\,top\,(I)$, а из этого легко следовало бы, что $\omega\,top\,(I) = 2\,top\,(I)$.

Теперь подробнее рассмотрим $k\,top\,(X)$ для одномерных компактов. Из 1.5 следует, что суммирование конечного или счетного числа топологий, гомеоморфных отрезку $I$, дает всегда пространство размерности не больше $1$. Поэтому интересно следующее предложение:

1.16. Предложение. Существует компакт $\mathcal{K}$ такой, что $\dim \mathcal{K} = 1$ и $\max\{\dim Y : Y \in n\,top\,(\mathcal{K})\} = n$ для любого $n < \infty$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{K} = C \times I$, где $C$ - канторово совершенное множество. Тогда $\dim \mathcal{K} = 1$ и легко видеть, что $d_C^{(k)}(\mathcal{K}) = n$, откуда в силу 1.7 существует взаимно-однозначное отображение $\varphi : \mathcal{K} \xrightarrow{\text{на}} \mathcal{K}$, для которого $O^*(\varphi) = n$ и $\dim G_\varphi(\mathcal{K}) = n$. Тогда если $Y = G_\varphi(\mathcal{K})$, то $Y \in n\,top\,(\mathcal{K})$ и $\dim Y = n$. Так как по 0.1 пространство $Y$ вкладывается в $\mathcal{K}^n$ и $\dim \mathcal{K}^n = n$, то $Y$ имеет максимально большую размерность.

1.17. <u>Замечание</u>. Поскольку, как легко видеть, для компакта $\mathcal{K} = C \times I$ $\dim \mathcal{K}^n = n$ и $d_C^{(k)}(\mathcal{K}^n) = kn$, то $\mathcal{K}^n$ дает пример такого $n$-мерного компакта, для которого $\max\{\dim Y : Y \in k\,top\,(\mathcal{K}^n)\}$ принимает максимально возможное для $n$-мерного пространства значение - $kn$.

1.18. Универсальная кривая Серпинского, или "ковер" Серпинского [15, стр. 280; 16, стр. 207], $\mathcal{S}$ дает пример связного и локально связного одномерного компакта, для которого $d_C^{(n)}(\mathcal{S}) = n$. Таким образом, в предложении 1.4

компакт можно предполагать связным и локально связным.

Приведем простой результат о понижении размерности при суммировании топологий, гомеоморфных $I^n$.

1.19. Предложение. Для любого $n \leq \aleph_0$, $\min\{\dim Y;\ Y \in 2\,top\,(I^n)\} = 0$.

Доказательство. Пусть $Q$ – множество рациональных чисел на отрезке $I = [0,1]$ и $Q_0$, $Q_1$ таковы, что $|Q_0| = |Q_1|$, $Q_0 \cup Q_1 = Q$, $Q_0 \cap Q_1 = \Lambda$. Пусть $j: Q_0 \xrightarrow{\text{на}} Q_1$ взаимно-однозначно.

Положим $$\varphi(x) = \begin{cases} j(x) & : x \in Q_0 \\ j^{-1}(x) & : x \in Q_1 \\ x & : x \in I \setminus Q \end{cases}$$

Тогда $\dim \Gamma_\varphi = 0$, где $\Gamma_\varphi$ –график отображения $\varphi$. Рассмотрим $n$ экземпляров отрезка $I$: $I_1, I_2, I_3, \ldots$ и $\varphi_i: I_i \longrightarrow I_i$, где $\varphi_i$ совпадает с $\varphi$. Если $\Phi = \Pi\varphi_i: I^n \longrightarrow I^n$, то $G_\Phi(I^n) \underset{top}{=} (G_\varphi(I))^n \underset{top}{=} (\Gamma_\varphi)^n$, поэтому $\dim G_\Phi(I^n) = 0$. Так как $\Phi^2$ – тождественное отображение $I^n$, то $G_\Phi(I^n) \in 2\,top\,(I^n)$. Откуда $\min\{\dim Y: Y \in 2\,top\,(I^n)\} = 0$.

## § 2. <u>Счетные суммы топологий</u>

Сначала докажем теорему об одном свойстве $\sigma\,top\,(X)$ типа "конфинальности".

2.1. <u>Теорема</u>. Пусть $X$ – сепарабельное метрическое пространство мощности $c$. Тогда для всякого сепарабельного метрического пространства $(Y, \mathcal{T})$ мощности $c$ существует топология $\mathcal{T}_1$, содержащая $\mathcal{T}$, так что $(Y, \mathcal{T}_1) \in \sigma\,top\,(X)$. Другими словами, если $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}_0$ – две произвольные метризуемые топологии со счетной базой на некотором множестве $Y$ мощности $\mathfrak{c}$, то существует такое счетное семейство $\{\tau_i : i = 1, 2, \dots\}$ топологий на $Y$, что $(Y, \tau_i)$ гомеоморфно $(Y, \mathcal{T}_0)$ и $\mathcal{T} \subset \vee\{\tau_i : i = 1, 2, \dots\}$.

Для доказательства теоремы полезна следующая простая лемма.

2.2. <u>Лемма</u>. Пусть $X$ - бесконечное топологическое пространство, имеющее бикомпактное расширение, удовлетворяющее первой аксиоме счетности. Тогда найдутся два дизъюнктных открытых в $X$ подмножества $W_0$, $W_1$ полной мощности, то есть $|W_0| = |W_1| = |X|$.

Доказательство. Пусть $bX$ - бикомпактное расширение с первой аксиомой счетности, не исключается возможность $bX = X$. Пусть $\xi$ - точка полного накопления для множества $X$ в бикомпакте $bX$. Пусть $\{\mathcal{U}_n\}$ - счетная база окрестностей точки $\xi$ в $bX$, удовлетворяющая условию $[\mathcal{U}_{n+1}] \subset \mathcal{U}_n$ для всякого $n = 1, 2, 3, \dots$. Для каждого $n$ пусть $F_n = X \setminus \mathcal{U}_n$. Если существует номер $N$, для которого $|F_N| = |X|$, то положим $W_0 = X \setminus [\mathcal{U}_{N+1}]$, $W_1 = \mathcal{U}_{N+2} \cap X$. Тогда $W_0$, $W_1$ открыты в $X$ и $W_0 \cap W_1 = |X|$. Поскольку $F_N \subset W_0$ а $\xi$ - точка полного накопления для $X$, то $|W_0| = |W_1| = |X|$, и лемма в этом случае доказана.

Допустим теперь, что для каждого $n = 1, 2, 3, \dots$ выполнено $|F_n| < |X|$. Тогда поскольку $\cup\{F_n : n = 1, 2, 3, \dots\} = X \setminus \{\xi\}$, то найдется возрастающая последовательность $\{n_m\}$, такая, что мощности множеств $F_{n_m}$ строго возрастают и $\lim\limits_{m \to \infty} |F_{n_m}| = |X|$. Положим $V_m = \mathcal{U}_{n_m} \cap X$ и для каждого $\ell = 1, 2, 3, \dots$ обозначим $M_\ell = V_{2\ell-1} \setminus [V_{2\ell+1}]$. Тогда $\{M_\ell : \ell = 1, 2, \dots\}$ - дизъюнктная последовательность открытых в $X$ множеств. Легко видеть, что последовательность кардинальных чисел $|M_\ell| : \ell = 1, 2, \ldots$ строго возрастает и $\lim\limits_{\ell\to\infty} |M_\ell| = |X|$. Положим $W_0 = \cup\{M_\ell : \ell$ четно$\}$, $W_1 = \cup\{M_\ell : \ell$ нечетно$\}$; тогда $W_0$ и $W_1$ открыты в $X$, $W_0 \cap W_1 = \Lambda$ и $|W_0| = |W_1| = |X|$.

2.3. Лемма. Если $(X, \mathcal{T})$ - $T_1$- пространство счетного псевдо-характера и $cf(|X|) > \aleph_0$, то всякая база $\mathcal{B}_0$ и топологии $\mathcal{T}$ содержат такую базу $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0$, что для каждого множества $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ выполнено $|X \setminus \mathcal{U}| = |X|$.

Доказательство очевидно.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $|Y| = \mathfrak{c}$ и $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_0$ - две топологии со счетной базой на множестве $Y$. Так как $cf(\mathfrak{c}) > \aleph_0$, то в силу 2.3 существует такая счетная база $\mathcal{B} = \{\mathcal{U}_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ топологии $\mathcal{T}$, что $|Y \setminus \mathcal{U}_n| = \mathfrak{c}$ для каждого $\mathcal{U}_n \in \mathcal{B}$.

Пространство $(Y, \mathcal{T}_0)$, будучи сепарабельным метризуемым пространством, имеет компактное метризуемое расширение. Пользуясь 2.2, получаем, что найдется такое множество $W \in \mathcal{T}_0$, для которого $|W| = |Y \setminus W| = \mathfrak{c}$.

Рассмотрим $\mathcal{U}_n \in \mathcal{B}$.

Если $|\mathcal{U}_n| = \mathfrak{c}$, то, поскольку $|W| = \mathfrak{c}$ и $|Y \setminus W| = |Y \setminus \mathcal{U}_n|$, существует взаимно-однозначное отображение множества $Y$ на себя, для которого $\varphi_n(W) = \mathcal{U}_n$. Тогда $\mathcal{T}_n = \{\varphi_n(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathcal{T}_0\}$ - топология на $Y$, гомеоморфная $\mathcal{T}_0$ и содержащая $\mathcal{U}_n$.

Если же $|\mathcal{U}_n| < \mathfrak{c}$, то рассмотрим какие-либо множества $A_0, A_1$, удовлетворяющие условиям:

$$A_0 \cup A_1 \subset Y \setminus \mathcal{U}_n,\ A_0 \cap A_1 = \Lambda,\ |A_0| = |A_1| = \mathfrak{c}.$$

Пусть $\varphi_n^{(i)}$ $(i = 0, 1)$ - так же взаимно-однозначное отображение множества $Y$ на себя, так что $\varphi_n^{(i)}(W) = \mathcal{U}_n \cup A_i$

$(i=0,1)$. Тогда для $i=0,1$ $\mathcal{T}_m^{(i)}=\{\varphi_m^{(i)}(\mathcal{U}) : \mathcal{U}\in\mathcal{T}_0\}$ $(i=0,1)$ - топология на $Y$, гомеоморфная $\mathcal{T}_0$. Положим $\mathcal{T}_m=\mathcal{T}_m^{(0)}\vee\mathcal{T}_m^{(1)}$. Легко видеть, что $\mathcal{U}_m\in\mathcal{T}_m$ и, таким образом, $\mathcal{B}\subset\vee\{\mathcal{T}_m : m=1,2,\ldots\}$ и, следовательно,

$$\mathcal{T}\subset\vee\{\mathcal{T}_m : m=1,2,\ldots\}\in\mathfrak{S}\,\mathrm{top}\,(Y,\mathcal{T}_0).$$

Теорема доказана.

2.4. Замечание. Леммы 2.2, 2.3 и теорема 2.1 оформулированы не с той степенью общности, которая здесь возможна, однако данные формулировки вполне достаточны для их использования в теореме 2.8.

Напомним, что счетномерным называется пространство, представимое в виде объединения не более чем счетного числа своих нульмерных или, что эквивалентно, конечномерных подпространств.

Легко получить следующее предложение:

2.5. Если $X$ счетномерно, $\varphi : X\xrightarrow{\text{на}}X$ - взаимно-однозначно и орбита $\{\varphi^m(x) : m\in\mathbb{Z}\}$ каждой точки конечна, то $G_\varphi(X)$ счетномерно.

При изучении вопроса о том, когда $Y\in\mathfrak{S}\,\mathrm{top}\,(X)$ может быть несчетномерным, полезна следующая лемма.

2.6. Лемма. Если $A\subset X$ и $A$ счетномерно, то существует счетномерное множество $G$ типа $G_\delta$, содержащее $A$.

Лемма является непосредственным следствием теоремы Тумаркина и определения счетномерного пространства.

2.7. Лемма. $I^\infty\setminus\Delta_{(\infty)}(I)$ топологически содержит гильбертов куб $I^\infty$ (определение смотри в пункте 1.7.1.).

Доказательство. Пусть $\{I_k : k=1,2,\ldots\}$ бесконечная счетная система дизъюнктных отрезков $I_k \subset I = [0,1]$. Тогда $\Pi\{I_k : k=1,2,\dots\} \underset{top}{=} I^\infty$ и $\Pi\{I_k : k=1,2,\dots\} \subset I^\infty \setminus \Delta_{(\omega)}(I)$.

Напомним, что пространство, не содержащее несчетных компактов, называется вполне несовершенным [17, стр. 523].

2.8. <u>Теорема</u>. Существует одномерный компакт $\mathcal{X}$ и такое пространство $Y \in \sigma\, top\,(\mathcal{X})$, которое несчетномерное. Существует также несчетномернове пространство из $\sigma\, top\,(\mathcal{X})$, которое, кроме того, вполне несовершенно.

Доказательство. Пусть $C$ - канторово множество и $\mathcal{X} = C \times I$. Покажем сначала, что существует несчетномерное пространство из $\sigma\, top\,(\mathcal{X})$. Для этого построим такое взаимно-однозначное отображение $f : \mathcal{X} \xrightarrow{на} \mathcal{X}$, для которого $G_f(\mathcal{X})$ несчетномерно. Рассмотрим пространство $\mathcal{X}^{Z}$, где $Z$ - множество целых чисел. Элементы $\mathcal{X}^{Z}$ - двусторонне бесконечные последовательности $(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$ элементов из $\mathcal{X}$. Пусть $\{G_\alpha : \alpha < c\}$ - совокупность всех счетномерных подмножеств $\mathcal{X}^{Z}$, имеющих тип $G_{\delta\sigma}$. Аналогично построению в 1.7, пользуясь 2.7, несчетномерностью гильбертова куба [18] и тем фактом, что $I^\infty \setminus \Delta_{(\omega)} \underset{top}{\subseteq} \mathcal{X}^\infty \setminus \Delta_{(\omega)}(\mathcal{X})$, можно по трансфинитной индукции построить такое взаимно-однозначное отображение $f : \mathcal{X} \xrightarrow{на} \mathcal{X}$, для которого все орбиты бесконечны и такое, что график $\Gamma$ диагонального произведения отображений $f^m$, $m \in Z$, удовлетворяет тому условию, что для каждого $\alpha < c$ найдется $x_\alpha \in \Gamma$, для которого $x_\alpha \notin G_\alpha$. Пользуясь леммой 2.6, легко получаем, что $\Gamma$ - несчетномерное подпространство пространства $\mathcal{X}^{Z}$. Так как $\Gamma \underset{top}{=} G_f(\mathcal{X})$, то получаем первую часть теоремы.

Теперь покажем, что существует $Y_0 \in \sigma\, top\,(\mathcal{X})$, которое вполне несовершенно.

Пусть $E$ – произвольное вполне несовершенное пространство мощности $\mathfrak{c}$. Пользуясь теоремой 2.1, получим, что существует такое пространство $Y_0$ из $\sigma\,top(\mathcal{K})$, которое взаимно-однозначно и непрерывно может быть отображено на $E$. Очевидно, что тогда $Y_0$ также как $E$ не содержит несчетных компактов. Таким образом, $Y_0 \in \sigma\,top(\mathcal{K})$ и $Y_0$ вполне несовершенно. Пусть $Y$ несчетномерное пространство из $\sigma\,top(\mathcal{K})$. Рассмотрим $Y_0 \times Y$. Можно показать (построение мы опускаем), что существует такое множество $L \subset Y_0 \times Y$, что $L$ несчетномерно и $L$ взаимно-однозначно проектируется как на $Y_0$, так и на $Y$. Тогда из $Y_0 \times Y$ индуцируется на $L$ такая топология $\mathcal{T}$, что $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \vee \mathcal{T}_1$ и $(L, \mathcal{T}_0) \underset{top}{=} Y_0$, а $(L, \mathcal{T}_1) \underset{top}{=} Y$. Так как $Y_0, Y \in \sigma\,top(\mathcal{K})$, то $(L, \mathcal{T}) \in \sigma\,top(\mathcal{K})$. Тогда $L$ – несчетномерное вполне несовершенное пространство из $\sigma\,top(\mathcal{K})$.

2.9. <u>Следствие</u>. На множестве $X$ мощности $\mathfrak{c}$ существует счетная цепь $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \ldots$ метризуемых топологий со счетной базой такая, что $(X, \mathcal{T}_0)$ – одномерный компакт, для каждого $i = 1, 2, \ldots$ пространство $(X, \mathcal{T}_i)$ конечномерно, но $(X, \cup \mathcal{T}_i)$ несчетномерно.

Размерности пространств $(X, \mathcal{T}_i)$ здесь, конечно, не могут быть ограничены одним и тем же числом, так как имеет место следующий факт:

2.10. Предложение. Если $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \ldots$ счетная цепь метризуемых топологий на множестве $X$ и $\dim(X, \mathcal{T}_i) \leq n$ для каждого $i = 1, 2, \ldots$, то $\dim(X, \cup \mathcal{T}_i) \leq n$.

Действительно, достаточно заметить, что $(X, \cup \mathcal{T}_i)$ является пределом обратного спектра пространств $(X, \mathcal{T}_i)$ (проекции – естественные уплотнения), и применить следующий результат Нагами [19]:

Если $S = \{X_i : \pi^i_j\}$ – обратный спектр из метризуемых пространств, удовлетворяющих условию $\dim X_i \leq n$ для $i = 1, 2, \dots$, то $X = \varprojlim S$ также удовлетворяет условию $\dim X \leq n$.

Отметим в конце, что многие результаты из § 1, оформулированные для $n$-мерного куба $I^n$ легко обобщаются на топологические многообразия и полиэдры.

В заключение хочу выразить благодарность А.Г. Немцу за плодотворное обсуждение проблематики работы и А.В. Архангельскому и В.В. Филиппову за внимание и поддержку.

Литература

[1] Е.Г. ПЫТКЕЕВ: О верхних гранях топологий, Математические заметки 20, вып. 4(1976), 489-500.

[2] Е.Г. ПЫТКЕЕВ: К теории уплотнений на компакты, Докл. АН СССР 233(1977), 1046-1048.

[3] A.I. BASHKIROV: On supremum of compact topologies, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 21,N8(1973), 699-703.

[4] А.В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ: Пересечение топологий и псевдооткрытые бикомпактные отображения, Докл. АН СССР 226(1976), 745-748.

[5] В.П. ЗОЛОТАРЕВ: О пересечении топологий, Докл. АН СССР 195(1970), 540-543.

[6] В.П. ЗОЛОТАРЕВ: О факторных конечнократных отображениях, повышающих размерность, Докл. АН СССР 208(1973), 1016-1019.

[7] А.В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ, В.И. ПОНОМАРЕВ: Основы общей топологии в задачах и упражнениях, Москва, "Наука", 1974.

[8] Л.А. ТУМАРКИН: О рациональных одномерных компактах, Вестник Московского университета, Сер. естеств. наук и математ. 8(1953), 73-75.

[9] K. MENGER: Dimension theory, Leipzig, 1928.

[10] Д.В. РАНЧИН: О модификации топологий в связи с заданным разрывным отображением пространства в себя, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 1978 (в печати).

[11] Д.В. РАНЧИН: О верхних гранях компактных -мерных топологий, в сб. УII Всесоюзная топологическая конференция, Минск, 1977, стр. 162.

[12] L. TUMARKIN: Über die Dimension nicht abgeschlossener Mengen, Math. Ann. 98(1928), 637-656.

[13] В.И. КУЗЬМИНОВ: Гомологическая теория размерности, Успехи математических наук 23, № 4(1968), 3-49.

[14] R.D. ANDERSON, I.E. KEISLER: An example in dimension theory, Proc. Amer. Math. Soc. 18(1967), 709-713.

[15] К. КУРАТОВСКИЙ: Топология, т.2, перевод Москва, "Мир", 1969.

[16] П.С. АЛЕКСАНДРОВ: Введение в теорию множеств и функций, Москва, "Наука", 1977.

[17] К. КУРАТОВСКИЙ: Топология, т. 1, перевод Москва, "Мир", Москва, 1966.

[18] В. ГУРЕВИЧ, Г. ВОЛМЭН: Теория размерности, Москва, 1948.

[19] K. NAGAMI: Finite-to-one closed mapping and dimension, II, Proc. Japan. Acad. 35(1959), 437-439.

**Кафедра высшей математики**

**Московский лесотехнический институт**

**Москва**

С С С Р

(Oblatum 2.6. 1978)