Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

René Fourneau; Charles Leytem

Sur l'existence de n-losanges réguliers inscrits dans un corps compact convexe

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 19 (1978), No. 1, 151--164

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105842`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

19,1 (1978)

SUR L'EXISTENCE DE n-LOSANGES RÉGULIERS INSCRITS DANS UN CORPS COMPACT CONVEXE

René FOURNEAU et Charles LEYTEM, Liège

Résumé: Dans cet article, nous résolvons le problème généralisé des "carrés dans le Lac Michigan" pour certaines classes de convexes. Nous montrons que dans tout corps compact convexe de révolution autour d'un axe et dans tout corps compact convexe centré, on peut inscrire un n-losange régulier (généralisation du carré et de l'octaèdre régulier). Dans les deux cas, nous étudions l'éventuelle unicité d'un tel n-losange régulier inscrit.

Mots clef: Corps compact convexe, n-losange régulier.

AMS: 52A20 Ref. Ž.: 3.918.1

---

1. Introduction. Cet article se rattache à l'abondante littérature qu' à suscité le problème de l'existence de carrés dans le lac Michigan ([3],[4],[5],[6],[8],[9],[10]). Nous y établissons que dans tout corps compact convexe de révolution et dans tout corps compact convexe centré on peut inscrire un n-losange régulier, et nous étudions l'ensemble des n-losanges inscriptibles dans le dernier cas. Pour les corps compacts convexes de dimension deux, cette question a été résolue précédemment par Christensen [3], Dietschi [4] et Jerrard [6]. Cependant, on ne possède pas de réponse définitive pour les espaces de dimension supérieure, les preuves données par Pucci [9], Schnirelman [10]

et Guggenheimer [5] se révélant erronées. Notons cependant que Larman et Mani [8] mettent au point une preuve ingénieuse, reposant sur des méthodes homologiques, qui semble clore le problème pour un espace de dimension paire. Jusqu'à plus ample informé, le cas des dimensions impaires est encore ouvert et nos résultats apportent une réponse partielle.

2. Notations et terminologie. Nous adoptons les notations et la terminologie de [1] pour tout ce qui concernce la géométrie des convexes. L'espace n-dimensionnel $(n>0)$ dans lequel nous nous plaçons sera identifié à $\mathbb{R}^n$ et $\{e_1,\dots,e_n\}$ désignera la base canonique de cet espace.

Appelons *similitude* de $\mathbb{R}^n$ toute composée d'une homothétie de centre 0 et d'une transformation linéaire orthogonale; l'ensemble de ces similitudes sera noté $\mathcal{S}(n)$.

La généralisation à $\mathbb{R}^n$ de la notion de carré adoptée est la suivante: si $P = {}^{ce}\{e_1,\dots,e_n\}$, on appelle *n-losange régulier* le polytope convexe $\sigma(P)+x$, où $\sigma\in\mathcal{S}(n)$ et $x\in\mathbb{R}^n$. On remarquera qu'un 3-losange régulier est un octaèdre régulier.

Un n-losange régulier sera dit inscrit dans un corps compact convexe K de $\mathbb{R}^n$ si ses sommets appartiennent à la frontière de K.

Nous appellerons *(n -1)-simplexe régulier* de $\mathbb{R}^n$ tout translaté de l'image de $T_0 = {}^{c}\{e_1,\dots,e_n\}$ par une similitude de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire tout ensemble de la forme

$$\sigma(T_0)+x \qquad (\sigma\in\mathcal{S}(n),\ x\in\mathbb{R}^N).$$

Rappelons qu'un point p est un centre de symétrie pour un ensemble non vide A si $A - p = p - A$. Un ensemble possédant un centre de symétrie est dit centré. Enfin, on sait que le centre d'un corps compact convexe K est unique et intérieur à K ([2], 3).

3. Cas des corps compacts convexes de révolution

3.1. L'étude des n-losanges réguliers inscrits dans un corps compact convexe de révolution repose sur la propriété suivante.

Lemme. *Soient, dans $\mathbb{R}^n$, T un (n - 1)-simplexe régulier et y un point situé sur la normale à ${}^1T$ passant par le barycentre de T. L'ensemble $Q = {}^c[T \cup (2y - T)]$ est un n-losange régulier si et seulement si la distance β entre y et le barycentre de T est liée au rayon α de la (n - 1)-boule circonscrite à T par la relation*

$$\alpha = \sqrt{n-1}\,\beta .$$

L'ensemble $Q = {}^c[T \cup (2y - T)]$ est un n-losange régulier si et seulement s'il existe $\sigma \in \mathcal{S}(n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$= \sigma(P) + x .$$

Visiblement, le centre de ${}^c[T \cup (2y - T)]$ est y et celui de $\sigma(P) + x$ est x. Vu l'unicité du centre, $x = y$.

En vertu du théorème de Milman, ${}^pT \cup {}^p(2y - T) =$ $= {}^p[\sigma(P) + x] = \sigma({}^pP) + x$, donc les sommets t_i ($i =$ $= 1,\dots,n$) de T s'écrivent

$$t_i = \sigma(\varepsilon_i e_{j_i}) + x$$

où $\varepsilon_i = \pm 1$, et les sommets correspondants de $2y - T$ s'écrivent

$$t_i' = 2y - t_i = -\sigma(\varepsilon_i e_{j_i}) + x,$$

$(i = 1,\dots,n)$. De plus, les $\varepsilon_i e_{j_i}$, comme les t_i, sont linéairement indépendants, et la bijection linéaire définie par

$$\tau(e_i) = \varepsilon_i e_{j_i} \qquad (i = 1,\dots,n)$$

est orthogonale, donc $\sigma' = \sigma \circ \tau \in \mathcal{S}(n)$ et

$$t_i = \sigma'(e_i) + x,$$

ce qui montre que $T = \sigma'(T_0) + x$ et $2y - T = -\sigma'(T_0) + x$.

Le centre de la $(n-1)$-boule circonscrite à $\sigma'(T_0)$ est le barycentre de $\sigma(T_0)$, soit $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma'(e_i)$, et son rayon est

$$\left\| \sigma'(e_1) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma'(e_i) \right\| = \left\| \sigma'\left(1, -\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}\right) \right\| =$$

$$= \lambda \sqrt{\frac{n-1}{n}},$$

où λ est le rapport de similitude de σ' (c'est-à-dire le rapport de l'homothétie de centre O associée à σ'), ce qui livre $\alpha = \lambda\sqrt{\frac{n-1}{n}}$.

De plus, la distance de y au barycentre de T est égale à la distance de l'origine au barycentre de $\sigma'(T_0)$, soit

$$\beta = \left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma'(e_i) \right\| = \frac{\lambda}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi, la relation $\alpha = \sqrt{n-1}\,\beta$ est une condition nécessaire pour que Q soit un n-losange régulier.

Elle est aussi suffisante. Si $T = \sigma(T_0) + x$, ($\sigma \in \mathcal{S}(n)$, $x \in \mathbb{R}^n$), x est situé sur la normale à ${}^1T$ issue du barycentre de T, à une distance $\frac{\alpha}{\sqrt{n-1}}$, ce qui montre que x = y ou que x est le symétrique de y par rapport à ${}^1T$. Si l'on pose $\sigma' = \tau \circ \sigma$ où τ est la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace parallèle à ${}^1T$, $T = \sigma'(T_0) + y$ dans le second cas, donc on peut supposer que x = y. On a alors

$$2y - T = 2x - T = x - \sigma(T_0),$$

donc $Q = {}^c(\,[\sigma(T_0) + x\,] \cup [\,x - \sigma(T_0)]\,) = \sigma(P) + x$.

3.2. Dans $\mathbb{R}^n$, $(n > 2)$, appelons <u>corps de révolution autour de l'axe</u> A, où A est une droite de $\mathbb{R}^n$, tout corps invariant pour toute rotation d'axe A. A seule fin d'englober le cas de certains corps plans, on peut étendre cette définition au cas n = 2 en disant que le corps K est de révolution autour de A si la trace sur K de tout translaté de l'orthogonal du sous-espace parallèle à A est $\emptyset$, un singlet ou une (n - 1)-boule dont le centre est sur A.

3.3. <u>Si</u> K <u>est un corps compact convexe</u>, <u>de révolution autour d'un axe</u> A, <u>il existe un</u> n-<u>losange régulier</u> Q, <u>inscrit dans</u> K, <u>dont le centre est situé sur l'axe</u> A.

Pour tout $\lambda \geq 0$, considérons le cylindre $C(\lambda)$ d'axe A engendré par une (n - 2)-sphère de rayon λ dont le centre est situé sur A. Il existe $\alpha > 0$ tel que $C(\lambda) \cap K \neq \emptyset$ si et seulement si $\lambda \in [\,0, \alpha\,]$.

Si $\lambda \in \,]0,\alpha[$, $C(\lambda) \cap \dot{K}$ est réunion de deux $(n - 2)$-sphères parallèles de rayon λ , $C(0) \cap \dot{K}$ est constitué de deux points et $C(\alpha) \cap \dot{K}$ est un cylindre borné, de hauteur 2H (éventuellement nulle), d'axe A, engendré par une $(n - 2)$-sphère de rayon α . Nous désignerons par $\beta(\lambda)$ la demi-distance entre les deux $(n - 2)$-sphères [resp. points] constituant $C(\lambda) \cap \dot{K}$, si $\lambda \in \,]0,\alpha[$ [resp. $\lambda = 0$] , et poserons $\beta(\alpha) = H$.

La fonction $\beta : [0,\alpha] \longrightarrow [H, \beta(0)]$ est continue. Pour le prouver, il suffit d'établir que son graphe est fermé, puisque $[H, \beta(0)]$ est compact. Dans un plan L passant par A, prenons A pour axe des ordonnées et une droite $B \subset L$ perpendiculaire à A pour axe des abscisses. Le graphe de β s'identifie à la demi-différence des compacts S, constitué par les extrémités supérieures des segments interceptés par $K \cap L$ sur les verticales d'abscisses $\lambda \in [0, \alpha]$, et I, constitué par les extrémités inférieures des mêmes segments.

Si $\lambda \in \,]0,\alpha[$, soit T un $(n - 1)$-simplexe régulier inscrit dans la $(n - 1)$-boule déterminée par la $(n - 2)$-sphère supérieure. Si c désigne le milieu du segment trace de A sur la bande enveloppe convexe des hyperplans déterminés par les deux $(n - 2)$-sphères de $C(\lambda) \cap \dot{K}$, $2c - T$ est un $(n - 1)$-simplexe régulier inscrit dans la $(n - 1)$-boule déterminée par la $(n - 2)$-sphère inférieure.

Pour que ${}^{c}[T \cup (2c - T)]$ soit un n-losange régulier, il faut et il suffit (3.1) que

$$[\beta(\lambda)]^2 (n - 1) = \lambda^2.$$

Or, puisque $\beta(0) > 0$, la fonction continue

$$f(\lambda) = [\beta(\lambda)]^2 (n-1) - \lambda^2$$

est positive lorsque $\lambda = 0$. Si $\lambda = \alpha$, $f(\alpha)$ est négative pour autant que $H < \frac{2\alpha}{\sqrt{n-1}}$; dans ce cas, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence de $\lambda_0 \in]0,\alpha[$ tel que $f(\lambda_0) = 0$, ce qui livre immédiatement un n-losange inscrit. Si au contraire $H \geq \frac{2\alpha}{\sqrt{n-1}}$, le cylindre borné $C(\alpha) \cap \mathring{K}$ inclut un cylindre de hauteur $\frac{2\alpha}{\sqrt{n-1}}$, qui à son tour inclut un n-losange régulier inscrit dans K.

3.4. <u>Remarques</u>. Supposons que $n > 2$. Si Q est le n-losange régulier construit en 3.3, l'image de Q par toute rotation d'axe A est un n-losange régulier inscrit dans K, vu la symétrie de révolution de K. On pourrait penser que, si K ne présente pas d'autre symétrie de révolution, tout n-losange régulier inscrit dans K peut être obtenu de la sorte à partir de Q. Il n'en est rien, comme le montre l'exemple du corps

$$K = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1,\ x_3 \leq \frac{\sqrt{3}}{3}\}.$$

On vérifie en effet aisément que si T est un triangle équilatéral inscrit dans le disque supérieur, ${}^c[T \cup (-T)]$ est l'octaèdre régulier que livre la construction de 3.3 et que, si T' est un triangle équilatéral inscrit dans le disque $K \cap \{(x_1,x_2,x_3) : x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\}$, ${}^c[T' \cup (-T')]$ est un octaèdre régulier qui ne peut être déduit du précédent par une rotation d'axe A.

4. Corps compacts convexes centres

4.1. Le théorème ci-dessous, dont la preuve est très simple, semble ne pas avoir été noté jusqu'à présent.

Dans tout corps compact, convexe et centré K, on peut inscrire un n-losange régulier de même centre que K.

Il s'agit en fait du dual d'un théorème de Yamabe-Yujobo ([12]). Nous donnons la preuve complète, vu sa simplicité.

On peut, au prix d'une éventuelle translation, supposer que le centre de K est l'origine de $\mathbb{R}^n$. A tout $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, associons la longueur $f(u)$ du segment $[0:u) \cap K$. Comme 0 est intérieur à K, f est continue (une preuve utilise la continuité de l'application $g: \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \dot{K}$ définie par $\{g(u)\} = [0:u) \cap \dot{K}$ (voir, par exemple [7], VI.6.6) et celle de $h: x \longrightarrow \| x \|$).

Le théorème de Yamabe-Yujobo ([12]) assure qu'il existe n points $x_1,\ldots,x_n$ de $\mathbb{S}^{n-1}$ tels que les segments $[0: x_1],\ldots,[0: x_n]$ soient deux à deux orthogonaux et

$$f(x_1) = \ldots = f(x_n).$$

Comme f est une fonction paire,

$$f(\pm x_1) = \ldots = f(\pm x_n).$$

Dès lors,

$$^c\{(-x_i:x_i) \cap \dot{K}: i = 1,\ldots,n\}$$

est un n-losange régulier inscrit dans K.

4.2. Des travaux de Christensen relatifs aux losanges inscrits dans un corps compact convexe du plan ([3]), on peut déduire le corollaire

Dans un corps plan strictement convexe, on peut inscrire un et un seul losange dont on a fixé le couple des directions (orthogonales) des diagonales.

4.3. Le corollaire précédent permet de préciser la position du centre des losanges inscrits dans un corps compact, plan, centré, strictement convexe.

Tout losange inscrit dans un corps compact, plan, centré et strictement convexe K *a le même centre que* K.

Comme K est compact, centré et convexe, toute paire de droites orthogonales issues du centre c détermine quatre points de $\dot{K}$ qui sont les sommets d'un losange de centre c, inscrit dans K. Le corollaire 4.2 permet de conclure.

4.4. On ne peut supprimer l'hypothèse de stricte convexité qui figure dans 4.3, comme le montre l'exemple d'un long rectangle arrondi à ses deux bouts.

4.5. On va voir que l'analogue de 4.3 ne vaut pas dans $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$.

Dans $\mathbb{R}^n$, $(n > 2)$, *il existe un corps compact strictement convexe et lisse* K (*de classe* C_∞), *centré, dans lequel on peut inscrire un* n-*losange régulier dont le centre diffère de celui de* K.

Soient $P = {}^{ce}\{e_1, \ldots, e_n\}$, $q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $Q = P + 2q$.

Comme $R = {}^{c}[P \cup Q]$ est l'ensemble des

$$\theta x + (1 - \theta)(y + 2q) = [\theta x + (1 - \theta)y] + (1 - \theta)2q,$$

$\theta \in [0,1]$, $\{x,y\} \subset P$, on a

$$R = P + [0:2q].$$

Puisque $P = -P$,

$$R = -P + [0:2q] = -P - [0:2q] + 2q = -R + 2q,$$

q est centre de symétrie de R.

Désignons par u [resp. u_i $(1 \leq i \leq n)$] le vecteur $(1,\ldots,1)$ [resp. $(1,\ldots,1,-1,1,\ldots,1)$] normal à la face $F = {}^{c}\{-e_1,\ldots,-e_n\}$ [resp. $F_i = {}^{c}\{-e_1,\ldots,-e_{i-1},e_i,-e_{i+1},\ldots,-e_n\}$]. Soit $H = \{x: (x \mid u) = -1\}$ [resp. $H_i = \{x: (x \mid u_i) = -1\}$] l'enveloppe linéaire de la face F [resp. F_i] et soit $\Sigma = \{x: (x \mid u) > -1\}$ [resp. $\Sigma_i = \{x: (x \mid u_i) > -1\}$] le demi-espace ouvert associé à H [resp. H_i] contenant 0 et par suite P.

Supposons à présent que $q \in]0:u)$, soit $q = \lambda u$, $\lambda > 0$. Comme $P \subset \overline{\Sigma}$ et $(q \mid u) > 0$, $(x \mid u) > -1$ pour tout x de $Q = P + 2q$, donc $Q \subset \Sigma$. De même, $P \subset \overline{\Sigma}_i$ et $(q \mid u_i) = \lambda (u \mid u_i) > 0$, donc $Q \subset \Sigma_i$, $(i = 1,\ldots,n)$. Ainsi, $Q \subset \Sigma \cap \bigcap_{i=1}^{n} \Sigma_i$.

Montrons que, dans ce cas, ${}^{p}R = {}^{p}P \cup {}^{p}Q$. Le théorème de Milman permet d'affirmer que ${}^{p}R \subset {}^{p}(P \cup Q)$ et, comme manifestement ${}^{p}(P \cup Q) \subset {}^{p}P \cup {}^{p}Q$, ${}^{p}R \subset {}^{p}P \cup {}^{p}Q$.

Etablissons l'inclusion réciproque. Considérons un sommet $-e_i$ $(i \leq 1 \leq n)$ de P. Comme $Q \subset \Sigma$, $-e_i$ est aussi sommet de R, sinon il serait situé entre deux points, l'un de P, l'autre de Q, distincts de lui, ce qui est impossible, puisque $-e_i \in {}^{m}\Sigma$. Soit alors le sommet e_i $(1 \leq i \leq n)$ de P : $Q \subset \Sigma_i$ et $e_i \in {}^{m}\Sigma_i$ et on voit de même que e_i est un sommet de R. Par raison de symétrie, le même raisonnement vaut pour Q, ce qui établit l'égalité annoncée.

Pour conclure, il reste à utiliser un résultat de Weil ([11], Korollar 2) affirmant l'existence d'un corps compact strictement convexe et lisse (de classe C_∞), de centre q, et dont la frontière inclut ${}^pR$.

4.6. Pour terminer, relevons une différence intéressante entre les corps compacts convexes centrés du plan et ceux de $\mathbb{R}^n$ $(n>2)$. Pour alléger les énoncés, appelons <u>direction des diagonales</u> d'un n-losange régulier Q le n-uple $((-u_1:u_1),\dots,(-u_n:u_n))$ des sous-espaces parallèles aux diagonales de Q.

<u>Il existe un corps plan strictement convexe centré, lisse (de classe C_∞), distinct d'un disque, dans lequel on peut inscrire un carré pour toute direction des diagonales</u>.

Considérons le corps K limité par la courbe d'équation

$$x^4 + y^4 = 1,$$

soit en coordonnées polaires

$$r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) = 1 .$$

On montre que r varie dans l'intervalle $[1, \sqrt[4]{2}]$. Si (θ, r) vérifie l'équation précédente, il en est de même de $(\theta + \frac{\pi}{2}, r)$. En outre, K est de classe C_∞ et strictement convexe, puisque la dérivée seconde de $y = \sqrt[4]{1 - x^4}$, soit $D_x^2 y = -3x^2(1 - x^4)^{-7/4}$, est négative si $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$ et nulle si $x = 0$.

4.7. La proposition précédente est en défaut pour $n > 2$. <u>Soit</u> K <u>un corps compact convexe</u> n-<u>dimensional</u> $(n > 2)$

centré. Si pour toute direction des diagonales on peut inscrire un carré dans K, de même centre que K, K est une boule de dimension n.

Considérons deux droites D_1 et D_2 quelconques mais distinctes, passant par le centre de K. Puisque $n > 2$, il existe une droite D perpendiculaire à D_1 et D_2. Soient S_1, S_2 et S les segments $D_1 \cap K$, $D_2 \cap K$ et $D \cap K$, respectivement.

Par hypothèse, on a

$$l(S_i) = l(S), \quad i \in \{1,2\},$$

$l(S_i)$ [resp. $l(S)$] désignant la longueur de S_i [resp. S], ce qui livre $l(S_1) = l(S_2)$.

Comme D_1 et D_2 sont quelconques, la proposition en résulte.

En remarquant que la possibilité d'inscrire dans K pour toute direction des diagonales un n-losange régulier entraîne celle d'inscrire dans K pour toute direction des diagonales un carré, on a le corollaire suivant.

Corollaire. Soit K un corps compact convexe n-dimensionnel centré. Si pour toute direction des diagonales on peut inscrire dans K un n-losange régulier de même centre que K, K est une boule de dimension n.

Bibliographie

[1] BAIR J. et FOURNEAU R.: Etude géométrique des espaces vectoriels: une introduction, Lecture Notes in Math., vol. 489, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York. 1975.

[2] BAIR J. et JONGMANS F.: Sur les graves questions qui naissent quand la décomposition des ensembles atteint un stade avancé, à paraître dans Bull. Soc. Roy. Sc. Liège.

[3] CHRISTENSEN C.M.: Kvadrat indskrevet i konveks figur, Mat. Tidsskift, 1950 B, 22-26.

[4] DIETSCHI U.: Eilinien und unbeschriebene Rhomben, Diplomschrift, Universität Bern, 1974.

[5] GUGGENHEIMER H.: Finite sets on curves and surfaces, Israel J. Math. 3(1965), 104-112.

[6] JERRARD P.: Inscribed squares in plane curves, Trans. Amer. Math. Soc. 98(1961), 234-241.

[7] JONGMANS F.: Notions de topologie générale, édition ronéotypée, Liège, 1969.

[8] LARMAN D.G. et MANI P.: Regular crosspolytopes inscribed to spherical surfaces, à paraître.

[9] PUCCI C.: Sulla inscrivibilita di un ottaedro regolare in un insieme convesso limitato dello spazio ordinario, Atti della Ac. Naz. dei Lincei; Rendiconti, Classe delle Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali 8(1956), 61-65.

[10] SCHNIRELMAN L.G.: O nekotoryh geometriceskih svojstvah zamknutyh krivyh, Sbornik rabot matematičeskogo razdela sekcii estestvennyh i tocnyh nauk komakademii, Moskva, 1929. Reproduit dans Uspehi Matematiceskih Nauk 10(1944), 34-44.

[11] YAMABE H. et YUJOBO Z.: On the continuous functions defined on a sphere, Osaka Math. Journal 2(1950), 19-22.

[12] WEIL W.: Einschachtelung konvexer Körper, Archiv der Math. 26(1975), 666-669.

Institut de Mathématique
15, avenue des Tilleuls
B-4000 Liège
Belgique

(Oblatum 24.9. 1977)