Antonín Kučera; Boris A. Kušner

О типе рекурсивного изоморфизма некоторых понятий конструктивного анализа

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 19 (1978), No. 1, 97--105

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105836`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

19,1 (1978)

О ТИПЕ РЕКУРСИВНОГО ИЗОМОРФИЗМА НЕКОТОРЫХ ПОНЯТИЙ КОНСТРУКТИВНОГО АНАЛИЗА

А. КУЧЕРА (A. KUČERA), Прага, Б.А. КУШНЕР, Москва

Содержание: В настоящей заметке выясняется положение некоторых понятий конструктивного анализа в арифметической иерархии. Показана Π_3-полнота множества (номеров) конструктивных функций действительной переменной, а также множества определенного типа вычислимых чисел.

Ключевые слова: Частично рекурсивная функция, рекурсивно перечислимое множество, Σ_n и Π_n-(полное)множество, конструктивная функция, псевдочисло.

АМ : 02E99, 02F40 Реф. Ж.: 2.644.2

---

1. В предлагаемой работе выясняется тип рекурсивного изоморфизма множества (номеров) конструктивных функций (КФ), а также некоторой системы вычислимых действительных чисел, промежуточной между конструктивными действительными числами (КДЧ) и псевдочислами (непоясняемые понятия конструктивного анализа можно найти в [3],[4]). Эти результаты позволяют также определить точное положение изучаемых понятий в арифметической иерархии. Статья выполнена в рамках конструктивного направления в математике ([1]), все высказываемые суждения следует трактовать конструктивно ([2]). В частности, термин "арифметическая иерархия" (а также операция скачка и пр.) понимаются как в [6]. Заметим вместе с тем, что чи-

татель, не заинтересованный в конструктивной специфике, может трактовать полученные результаты традиционным образом. В частности, с этой точки зрения имеет место теорема о Π_3-полноте изучаемых понятий (при обычной трактовке арифметической иерархии, см. например [5]).
Результаты п. 3 получены независимо А. Кучера и В.А. Кушнером, результаты п. 4 принадлежат А. Кучера.

2. Мы будем пользоваться некоторой стандартной нумерацией всех частично рекурсивных функций (ЧРФ) одной переменной φ_k (порождаемой надлежащей ЧРФ двух переменных) и соответствующей ей нумерацией всех рекурсивно перечислимых (р.п.) множеств W_k. Множество всех натуральных чисел (НЧ) мы будем обозначать N. Буквы k, m, n, p, q, x, y служат переменными для НЧ. Множество всех рациональных чисел (РЧ) мы будем обозначать посредством Q. Мы алгорифмически перенумеруем все РЧ, причем каждому РЧ a будет соответствовать НЧ $[a]^N$, и каждому НЧ m – РЧ $[m]^Q$.
В статье используется аппарат ЧРФ, и в связи с этим понятия конструктивного математического анализа, обычно вводимые на основе нормальных алгорифмов, переформулируются нами на основе ЧРФ. Таким образом,

1) множеству КДЧ соответствует множество D НЧ k таких, что

$$\forall n (!\varphi_k(n)) \& \forall mn (|[\varphi_k(n)]^Q - [\varphi_k(n+m)]^Q| < 2^{-n});$$

2) множеству записей КФ соответствует множество $\mathcal{K}$ НЧ k таких, что

$$\forall pq [(p \in D \& !\varphi_k(p) \supset \varphi_k(p) \in D) \& (p \in D \& q \in D \& p \underset{D}{=} q \&$$

$$\& \, !\varphi_k(p) \supset !\varphi_k(q) \,\&\, \varphi_k(p) \underset{D}{=} \varphi_k(q))] ,$$

где $\underset{D}{=}$ обозначает отношение, определяющее на множестве D равенство, соответствующее равенству действительных чисел;

3) множеству псевдочисел соответствует множество Π НЧ k таких, что

$$\forall n (!\varphi_k(n)) \,\&\, \forall n \neg\neg \exists m \forall p q (m \leq p \supset |[\varphi_k(p)]^{Q} - [\varphi_k(p+q)]^{Q}| < 2^{-n});$$

4) множеству Π_1-чисел (см. [7]) соответствует множество S_1 НЧ k таких, что $\forall n (!\varphi_k(n))$ и существует (алгорифмическая) последовательность неинфинитных рекурсивных множеств $\{C_m\}_m$ такая, что для всяких НЧ m, p мера Лебега конечного объединения рациональных сегментов

$$\bigcup_{\substack{1 \leq n \leq p \\ n \notin C_m}} [[\varphi_k(n)]^{Q}, [\varphi_k(n+1)]^{Q}] \quad \text{меньше } 2^{-m}, \text{ где для любых}$$

РЧ a, b $\quad [a, b] \leftrightharpoons min(a, b) \,\Delta\, max(a, b)$;

5) множеству Π_2-чисел (см. [7]) соответствует множество $S_2 \leftrightharpoons \{ k \mid k \in \Pi \,\&\, k \notin S_1 \}$.

Заметим, что $D \subseteq S_1 \subseteq \Pi$, и что Π_1-числа обладают своего рода (алгорифмическим) регулятором сходимости в себе последовательности РЧ соответствующей Π_1-числу.

Естественным образом тоже вводятся отношения принадлежности элементов множества Π рациональному сегменту и интегралу.

Мы обозначим

$$E \leftrightharpoons \{ x \mid \neg\neg \exists y (y \in W_x \,\&\, W_y \quad \text{инфинитно}) \}.$$

Согласно [5], E является Σ_3-полным множеством.

3. <u>Теорема 1</u>. Множества $\mathcal{K}$ и $\bar{E}$ рекурсивно изоморфны.

Доказательство. 1) Согласно [6], $\mathfrak{D} \equiv_1 \overline{\emptyset^{(2)}}$, и, следовательно, $\mathfrak{D}$ является Π_2-множеством. По лемме 5.1 из [6], отношение $\underset{\mathfrak{D}}{=}$ является $\emptyset'$-общерекурсивным отношением, и, следовательно, тоже Π_2-отношением. Таким образом, формулу определяющую множество $\mathcal{K}$ можно выразить в кванторной форме

$$\forall[(\forall\neg\neg\exists \supset \forall\neg\neg\exists)\&(\forall\neg\neg\exists \supset \forall\neg\neg\exists)] .$$

Используя правила конструктивной математической логики, можно эту форму постепенно выразить через

$$\forall\neg\neg(\neg\forall\neg\neg\exists \vee \forall\neg\neg\exists),\ \forall\neg\neg(\forall\neg\neg\exists\forall),\ \forall\neg\neg\exists\forall .$$

Таким образом, множество $\mathcal{K}$ является Π_3-множеством. Ввиду Π_3-полноты множества $\overline{\overline{E}}$ отсюда получаем $\mathcal{K} \leq_1 \overline{\overline{E}}$.

2) Остается показать, что $\overline{\overline{E}} \leq_1 \mathcal{K}$. Для этого очевидно достаточно построить ОРФ h такую, что $\overline{\overline{E}} \leq_m \mathcal{K}$ посредством h. Пусть f -ОРФ такая, что для всякого НЧ x $\varphi_{f(x)}$ -ОРФ, перечисляющая множество $W_x \cup \{z_0\}$, где $W_{z_0} = \emptyset$.

Построим ЧРФ ω и ОРФ g такие, что для всех НЧ x, n, k

а) $!\,\omega(x,n,k)$ тогда и только тогда, когда множество $W_{\varphi_{f(x)}(n)}$ имеет по крайней мере k различных элементов,

б) если $!\,\omega(x,n,k)$, то $[\omega(x,n,k)]^{Q} = 0$,

в) $\omega(x,n,k) \simeq \varphi_{g(x,n)}(k)$.

Заметим, что для любого НЧ x, $x \in E$ в том и только том случае, когда не может не существовать НЧ n такое, что $\varphi_{g(x,n)}$-ОРФ. Ввиду б) и в) отсюда получаем

(1) $\qquad \forall x\,(x \in E \equiv \neg\neg\exists n\,(g(x,n) \in \mathfrak{D}))$.

Построим ЧРФ $\varkappa$ и ОРФ h такие, что для всяких НЧ x, p

а) $!\varkappa(x,p) \equiv \exists m\,(p = q(x,m))$,

б) если $!\varkappa(x,p)$, то $\varkappa(x,p) = w_0$, где $w_0 \notin \mathbb{D}$,

в) $\varkappa(x,p) \simeq \varphi_{h(x)}(p)$.

Из (1) получаем $\forall x\,(x \in \mathrm{E} \equiv h(x) \notin \mathcal{K})$, и, таким образом, $\overline{\mathrm{E}} \leqslant_m \mathcal{K}$. Теорема доказана.

<u>Замечание</u>. В доказательстве теоремы для $x \in \overline{\mathrm{E}}$ область определения $\varphi_{h(x)}$ относительно $\mathbb{D}$ пуста. С другой стороны, ОРФ q можно построить так, что она дополнительно обладает свойством $\forall x m\,(q(x,m) < q(x,m+1))$. Затем можно построить ОРФ $\varkappa_1$ и h_1 такие, что для любых НЧ x, p

$$\varkappa_1(x,p) \simeq \begin{cases} w_0 & \text{если } \exists k\,(0 \leqslant k \leqslant p \;\&\; q(x,k) = p) \\ w_1 & \text{если } \neg\exists k\,(0 \leqslant k \leqslant p \;\&\; q(x,k) = p), \end{cases}$$

$$\varkappa_1(x,p) \simeq \varphi_{h_1(x)}(p),$$

где $w_0 \notin \mathbb{D}$, $w_1 \in \mathbb{D}$. Тогда $\overline{\mathrm{E}} \leqslant_m \mathcal{K}$ посредством h_1, и для $x \in \overline{\mathrm{E}}$ $\varphi_{h_1(x)}$ определена и постоянна на $\mathbb{D}$. Итак, ввиду Π_3-полноты множества $\overline{\mathrm{E}}$, верно следующее.

<u>Следствие 1</u>. Следующие множества Π_3-полны:

1) $\mathcal{K}$,

2) $\mathcal{K}_{Tot} \leftrightharpoons \{x \mid x \in \mathcal{K} \;\&\; \forall p\,(p \in \mathbb{D} \supset\, !\varphi_x(p))\}$,

3) $\mathcal{K}_\emptyset \leftrightharpoons \{x \mid x \in \mathcal{K} \;\&\; \forall p\,(p \in \mathbb{D} \supset \neg !\varphi_x(p))\}$,

4) $\mathcal{K}_w \leftrightharpoons \{x \mid x \in \mathcal{K} \;\&\; \forall p\,(p \in \mathbb{D} \supset\, !\varphi_x(p) \;\&\; \varphi_x(p) \underset{\mathbb{D}}{=} w)\}$

для любого $w \in \mathbb{D}$.

4. <u>Теорема 2</u>. **Множества S_1 и $\overline{E}$ рекурсивно изоморфны.**

Доказательство. 1) Согласно [7] (теоремы 2 и 5), существует последовательность последовательностей рациональных сегментов $\{\{K^n_m\}_m\}_n$ такая, что для любого НЧ k

$$k \in S_1 \equiv k \in \Pi \,\&\, \forall n \neg\neg \exists m \,(k \in K^n_m).$$

Построим для всяких НЧ n, m рациональный интеграл H^n_m, для которого $K^n_m \subseteq H^n_m$, $|H^n_m| < |K^n_m| + \frac{1}{2^{n+m+1}}$.

Тогда из теоремы 2 и следствия 2 из [7] вытекает, что для любого НЧ k $k \in S_1 \equiv k \in \Pi \,\&\, \forall n \neg\neg \exists m \,(k \in H^n_m)$.

Согласно [6], $\Pi \equiv_1 \overline{\emptyset^{(3)}}$, и, следовательно, Π является Π_3-множеством. Далее, согласно [6], отношение меньше для псевдочисел является Σ_2-отношением. Таким образом, отношение $k \in H^n_m$ (определяющее для элементов множества Π принадлежность рациональному интервалу) является Σ_2-отношением. Итак, мы доказали, что S_1 является Π_3-множеством. Следовательно, $S_1 \leq_1 \overline{E}$.

2) Для завершения доказательства достаточно построить ОРФ h такую, что $\overline{E} \leq_m S_1$ посредством h. Мы для всякого р.п. множества W_x построим последовательность $\{W_x^{[k]}\}_k$ конечных множеств (систем) разных НЧ такую, что $W_x^{[0]} = \emptyset$, $\forall n \,(n \in W_x \equiv \exists k \,(n \in W_x^{[k]}))$, и для всякого НЧ k $W_x^{[k]} \subseteq W_x^{[k+1]}$. Возьмем ОРФ f такую, что для всякого НЧ x $\varphi_{f(x)}$ -ОРФ, перечисляющая р.п. множество $W_x \cup \{x_0\}$, где $W_{x_0} = \emptyset$. Мы для всяких НЧ p, k, x обозначим $x_p \leftrightharpoons \varphi_{f(x)}(p)$,

$$A(x,k,p) \leftrightharpoons p \leq k \,\&\, \exists n\,(n \in W_{x_p}^{[k]} \,\&\, n \notin W_{x_p}^{[k \dot{-} 1]}) \;.$$

Построим ОРФ ω и h такие, что для всяких НЧ x , k

а) $[\omega(x, 2k)]^{Q} = 0$,

б) $[\omega(x, 2k+1)]^{Q} = 0$ если $\neg \exists p\, A(x,k,p)$,

в) $[\omega(x, 2k+1)]^{Q} = \dfrac{1}{2^{q}}$ если $\exists p\, A(x,k,p)$,

где $q \leftrightharpoons \mu_p A(x,k,p)$,

г) $\omega(x,k) \simeq \varphi_{h(x)}(k)$.

Нетрудно проверить, что для любого НЧ x $x \in E \equiv h(x) \notin \Pi$. Далее, для любого НЧ x , если $x \in \overline{E}$, то $h(x)$ равно (в смысле равенства псевдочисел) нулю. Согласно следствию 1 из [7] отсюда следует, что $\forall x\, (x \in \overline{E} \supset h(x) \in S_1)$. Итак, мы доказали, что $\overline{E} \leq_m S_1$. Теорема доказана.

<u>Следствие 1</u>. Множество S_1 является Π_3 -полным. Обозначим через $\underset{\Pi}{=}$ отношение, определяющее на множестве Π равенство псевдочисел. Заметим, что согласно [6], $\underset{\Pi}{=}$ является Π_3 -отношением. Модификацией доказательства теоремы 2 получаем следующее.

<u>Следствие 2</u>. 1) Для всякого НЧ w , $w \in \Pi$ множество $\Pi(w) \leftrightharpoons \{x \mid x \in \Pi \,\&\, x \underset{\Pi}{=} w\}$ является Π_3 -полным,

2) $\overline{E} \leq_1 S_2$.

<u>Следствие 3</u>. Множество S_2 1) не является ни Π_3 , ни Σ_3 -множеством, 2) является Σ_4 и Π_4 -множеством.

Доказательство. Часть 2) проверяется непосредственно. Ввиду следствия 2, S_2 не является Σ_3 -множеством.

Допустим, что S_2 является Π_3-множеством. Тогда, ввиду следствий 1 и 2, множества S_1 и S_2 рекурсивно изоморфны. Используя теорему о рекурсии, получаем противоречие.

Литература

[1] МАРКОВ А.А.: О конструктивной математике, Труды Мат. инст. АН СССР им. В.А. Стеклова 67(1962), 8-14.

[2] ШАНИН Н.А.: О конструктивном понимании математических суждений, Труды Мат. инст. АН СССР им. В.А. Стеклова 52(1958), 226-311.

[3] ШАНИН Н.А.: Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Труды Мат. инст. АН СССР им. В.А. Стеклова 67(1962), 15-294.

[4] КУШНЕР Б.А.: Лекции по конструктивному математическому анализу, Наука, Москва 1973.

[5] ROGERS H.: Theory of recursive functions and effective computability, Mc Graw-Hill, New York 1967.

[6] DEMUTH O., KRYL R., KUČERA A.: Об использовании теории функций частично-рекурсивных относительно числовых множеств в конструктивной математике, Acta Univ. Carolinae - Math. et Physica 19 (1978).

[7] DEMUTH O.: О конструктивных псевдочислах Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 315-331.

Matematicko-fyzikální fakulta
Universita Karlova
Sokolovská 83
18600 Praha 8
Československo

Вычислительный центр Академии наук СССР
Лаборатория мат. логики
ул. Вавилова 40
Москва В-333
СССР

(Oblatum 30.1. 1978)