Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Siegfried Hahn

Ein elementarer Zugang zur Leray-Schauder-Theorie

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 19 (1978), No. 1, 71--87

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105834

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

19,1 (1978)

EIN ELEMENTARER ZUGANG ZUR LERAY-SCHAUDER-THEORIE

S. HAHN, Dresden

Abstract: In this note we shall give a simple proof of results of the Leray-Schauder-theory for set-valued compact fields in linear topological spaces. The conception of non-singular fields (T.W. Ma [17]) is in many cases unnecessary.

Schlüsselwörter: Kompakte Vektorfelder, Homotopieerweiterungssätze, mengenwertige Abbildungen, Abbildungsgrad.

AMS: 47H10 Ref. Ž.: 7.978.53

Einleitung: A. Granas (s. z. B. [2]) begründete für kompakte Vektorfelder in Banach-Räumen einen vom Abbildungsgrad freien Zugang zu vielen Ergebnissen der von J. Leray und J. Schauder 1934 geschaffenen Theorie nichtlinearer Operatorengleichungen in unendlichdimensionalen normierten Räumen. Wichtigstes Hilfsmittel bei Granas ist ein Homotopieerweiterungssatz, der auf dem grundlegenden Erweiterungssatz von J. Dugundji [1] basiert. Da dieser Erweiterungssatz nur für metrisierbare lokalkonvexe Räume anwendbar ist, scheiterte die vollständige Übertragung der Granas-Theorie auf allgemeine topologische Vektorräume zunächst. Zwar konnte V. Klee [14] einen Homotopieerweiterungssatz für allgemeine topologische Vektorräume und entsprechende Folgerungen beweisen, jedoch musste er dabei zusätzliche Voraussetzungen für den Definitionsbereich fordern. Die volle Übertragung der Granas-Ergebnisse für (nicht notwendig metrisierbare) lokalkonvexe Räume ermöglichte erstmals T.W. Ma [17], indem er statt unwesentliche (siehe Granas) sogenannte nicht-singuläre ("non-singular") kompakte (sogar mengenwertige) Vektorfelder untersucht. Mit Hilfe des verwandten Begriffs der approximationsunwesentlichen Vektorfelder konnte der Autor den Granas-Zugang auf allgemeine topologische Vektorräume übertragen ([5],[6]), ohne - wie bei Klee - zusätzliche Forderungen and den Definitionsbereich der betrachteten Abbildung zu stellen. Dadurch konnte auf die relativ aufwendigen Vorarbeiten zur Untersuchung der Eigenschaften dieser speziellen Definitionsbereiche bei Klee [11] verzichtet werden.

Der Nachteil der Homotopieerweiterungssätze in [6], [17] besteht darin, dass ihre Verwendung unübersichtlicher ist, als das bei Granas der Fall war.

Wir wollen in dieser Note zeigen, dass in vielen Fällen sowohl die Methoden aus [6],[17] als auch die Hilfsmittel bei Granas unnötig kompliziert sind, denn der Erweiterungssatz von Dugundji wird in diesen wichtigen Fällen nicht benötigt (auch nicht für endlichdimensionale normierte Räume).

Wir schränken uns in dieser Arbeit auf kompakte Vektorfelder ein. Die mit unseren Mitteln bewiesenen Aussagen der Leray-Schauder- Theorie wurden in den letzten Jahren auch auf umfangreiche Klassen nichtkompakter Abbildungen durch Abbildungsgrad übertragen. Siehe dazu z. B. [18], [23] - [26]. Dabei werden jedoch speziellere Räume verwendet.

1. **Bezeichnungen.** Alle topologischen Räume seien in unserer Arbeit separiert und alle topologischen Vektorräume (im folgenden mit tVR abgekürzt) reell und separiert. Ist A eine Teilmenge eines topologischen Raumes, so bezeichnen wir mit $\bar{A}$ die Abschliessung, mit int A das Innere und mit ∂A den Rand von A.

Sei Z eine Teilmenge eines tVR. $\mathfrak{K}(Z)$ bezeichne stets das System aller nichtleeren konvexen und kompakten (bezüglich der induzierten Topologie von Z) Teilmengen von Z. Sei weiterhin X ein topologischer Raum. Eine (mengenwertige) Abbildung $F: X \longrightarrow \mathfrak{K}(Z)$ heisst nach oben halbstetig auf X, wenn für jedes $a \in X$ folgendes gilt. Zu jeder offenen Teilmenge W von Z mit $F(a) \subseteq W$ existiert eine Umgebung V von a, so dass $F(V) \subseteq W$ erfüllt ist.

Eine nach oben halbstetige Abbildung $F: X \longrightarrow \mathfrak{K}(Z)$ heisst kompakt, wenn $F(X)$ relativ kompakt in Z ist. Die kompakte Abbildung $F: X \longrightarrow \mathfrak{K}(Z)$ heisst finit, wenn $F(X)$ in einem endlichdimensionalen (linearen) Teilraum von E enthalten ist.

Es sei Y eine Teilmenge eines tVR E. Eine Abbildung $f: Y \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$ heisst kompaktes (finites) Vektorfeld, wenn die durch $F(x) = x - f(x)$ $(x \in Y)$ erklärte Abbildung $F: Y \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$ kompakt (finit) ist. Wir nennen F dann die zum Vektorfeld f gehörige kompakte Abbildung. Die Abbildung $F: Y \longrightarrow \mathfrak{K}(Z)$ heisse gleichmässig finit approximierbar in Z, wenn es zu jeder Nullumgebung V aus E eine finite Abbildung $F_V: Y \longrightarrow \mathfrak{K}(Z)$ gibt, so dass $F_V(x) \subseteq F(x) + V$ $(x \in Y)$ gilt. Bekanntlich ist jede kompakte Abbildung $F: Y \longrightarrow \mathfrak{K}(Z)$ gleichmässig finit approximierbar in Z, sofern Z eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes ist (s. z. B. [4]). Bezeichnet $F: Y \longrightarrow E$ eine (punktwertige) kompakte Abbildung, so ist nach Klee [14] F genau dann gleichmässig finit approximierbar (in E), wenn E ein sogenannter zulässiger tVR ist. So sind alle lokalkonvexen Räume zulässig. Die nicht lokalkonvexen tRV $S(0,1)$, $L^p(0,1)$ $(0<p<1)$, ℓ^p $(0<p<1)$ stellen neben anderen tVR Beispiele für zulässige tVR dar. Bisher ist noch nicht geklärt, ob alle tVR zulässig sind.

Es seien X, Y, Z Teilmengen des tVR E mit $X \subseteq Y \subseteq Z \subseteq E$. Wir bezeichnen mit $CA\ (Y, \mathfrak{K}(Z))$ die Klasse aller kompakten Vektorfelder $f: Y \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$, für die die zugehörige kompakte Abbildung $F: Y \longrightarrow \mathfrak{K}(Z)$ gleichmässig finit in Z approximierbar ist. Ein kompaktes Vektorfeld $f: Y \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$ heisse auf X nullstellenfrei, wenn $o \notin f(X)$ gilt. Das Symbol CA_0 $(Y, \mathfrak{K}(Z), X)$ bedeute die Klasse aller auf X nullstellenfreien Vektorfelder aus $CA\ (Y, \mathfrak{K}(Z))$.

Zwei Abbildungen f, $g \in CA_0\ (Y, \mathfrak{K}(Z), X)$ heissen homotop in $CA_0\ (Y, \mathfrak{K}(Z), X)$, wenn es eine kompakte, in Z gleichmässig finit approximierbare Abbildung $H: Y \times [0,1] \longrightarrow \mathfrak{K}(Z)$ gibt, so dass die Beziehungen $x - H(x,0) = f(x)$ $(x \in Y)$, $x - H(x,1) = g(x)$ $(x \in Y)$, $x \notin H(x,t)$ $(x \in X,\ t \in [0,1])$ gelten. Die durch $h(x,t) = x - H(x,t)$ $(x \in Y,\ t \in [0,1])$ erklärte Abbildung $h: Y \times [0,1] \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$ heisst dann Homotopie zwischen f und g in $CA_0\ (Y, \mathfrak{K}(Z), X)$.

2. Ein Homotopieerweiterungssatz. Der folgende elementare Homotopieerweiterungssatz ist vielen Anwendungen geeignet angepasst.

Satz 1: Es seien E ein tVR, Z eine abgeschlossene Teilmenge von E, Y eine Teilmenge von Z und X eine abgeschlossene Teilmenge von Y. Die kompakten Vektorfelder $f \in CA_0\ (Y, \mathfrak{K}(Z), Y)$, $g \in CA_0\ (Y, \mathfrak{K}(Z), X)$ seien homotop in $CA_0\ (Y, \mathfrak{K}(Z), X)$. Dann hat $g_0 = g \mid X$ eine Erweiterung $\tilde{g}_0 \in$ $\in CA_0\ (Y, \mathfrak{K}(Z), Y)$. Ferner sind $\tilde{g}_0$ und f in $CA_0\ (Y, \mathfrak{K}(Z), Y)$ homotop.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert eine kompakte, in Z gleichmässig finit approximierbare Abbildung $H_0 : Y \times$ $\times [0,1] \longrightarrow \mathfrak{K}(Z)$ mit $y - H_0(y,0) = f(y)$ $(y \in Y)$, $y -$ $- H_0(y,k) = g(y)$ $(y \in Y)$ und $x \notin H_0(x,t)$ $(x \in X,\ t \in [0,1])$. Man erkennt leicht, dass die Menge

$$Y_0 = \{ y \in Y : y \in H(y,s) \text{ für ein } s \in [0,1] \}$$

eine kompakte Teilmenge von Y ist. Weil E ein vollständig regulärer topologischer Raum ist und $X \cap Y_0 = \emptyset$ gilt, existiert eine stetige Abbildung $\lambda : Y \longrightarrow [0,1]$ mit $\lambda(x) =$ $= 0$ $(x \in Y_0)$ und $\lambda(x) = 1$ $(x \in X)$. Sei

$$H(y,t) = H_0(y, \lambda(y)t) \qquad (y \in Y,\ t \in [0,1]).$$

Mit H_0 ist offenbar auch H in Z gleichmässig finit approximierbar und kompakt. Ferner gilt $y - H(y,0) = y - H_0(y,0) =$ $= f(y)$ $(y \in Y)$ und $x - H(x,1) = x - H_0(x, \lambda(x)) = x -$ $- H_0(x,1) = g(x)$ $(x \in X)$. Somit ist die durch $\tilde{g}(y) = y -$ $- H(y,1)$ $(y \in Y)$ erklärte Abbildung $\tilde{g} \in CA\ (Y, \mathfrak{K}(Z))$ eine Erweiterung von $g_0 = g \mid X$. Es gilt schliesslich $y \notin H(y,t)$ $(y \in Y,\ t \in [0,1])$. Anderenfalls wäre für ein $s_0 \in [0,1]$ und ein $y_0 \in Y$ die Beziehung $y_0 \in H_0(y_0, s_0)$ erfüllt, was zu $y_0 \in Y_0$, $\lambda(y_0) = 0$, also $o \in f(y_0)$ führt. Dies widerspricht der vorausgesetzten Nullstellenfreiheit von f auf Y. Somit ist speziell $\tilde{g} \in CA_o(Y, \mathfrak{K}(Z), Y)$ und $\tilde{g}$, f sind homotop in $CA_o(Y, \mathfrak{K}(Z), Y)$.

Wir erinnern an folgende im wesentlichen bekannte Aussage.

Hilfssatz 1: Es seien E ein tVR, Z eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E sowie X und Y abgeschlossene Teilmengen von Z mit $X \subseteq Y$. Weiter seien $f \in CA_o(Y, \mathfrak{K}(Z), X)$ und V eine sternförmige Nullumgebung aus E mit $f(X) \cap V = \emptyset$. Dann ist jedes $g \in CA(Y, \mathfrak{K}(Z))$ mit $g(x) \subseteq f(x) + V$ $(x \in X)$ auf X nullstellenfrei und zu f in $CA_o(Y, \mathfrak{K}(Z), X)$ homotop.

Folgerung 1: Es seien E ein tVR, Z eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E sowie X, Y abgeschlossene Teilmengen von Z mit $X \subseteq Y$. Die Vektorfelder $f \in CA_o(Y, \mathfrak{K}(Z), Y)$, $g \in CA_o(Y, \mathfrak{K}(Z), X)$ seien homotop in $CA_o(Y, \mathfrak{K}(Z), X)$. Ist g finit, so existiert ein endlichdimensionaler Teilraum E_o von E mit $X \cap E_o \neq \emptyset$ derart, dass $g_o = g \mid X \cap E_o$ eine Erweiterung $\tilde{g}_o \in CA_o(Y \cap E_o, \mathfrak{K}(Z \cap E_o), Y \cap E_o)$ hat.

Beweis: Wegen $o \notin f(Y)$ existiert eine sternförmige Nullumgebung V aus E mit $f(Y) \cap V = \emptyset$. Nach Voraussetzung gibt es ein finites Vektorfeld $f_V \in CA_o(Y, \mathfrak{K}(Z), Y)$ mit $f_V(y) \subseteq f(y) + V$ $(y \in Y)$. Aus Hilfssatz 1 und der Voraussetzung folgt, dass f_V und g in $CA_o(Y, \mathfrak{K}(Z), X)$ homotop sind. Weil f_V und g finit sind, existiert ein endlichdimensionaler Teilraum E_o von E mit $X \cap E_o \neq \emptyset$, so dass $f_o = f_V \mid Y \cap E_o$ und $g_o = g \mid Y \cap E_o$ in $C_o(Y \cap E_o, \mathfrak{K}(Z \cap E_o), X \cap E_o)$ homotop sind (s. [16], Th. 4.2, [3] Hilfssatz). Weil f_o auf $Y \cap E_o$ nullstellen frei ist, folgt die Behauptung aus Satz 1.

Wir können nun mit Satz 1 die meisten Ergebnisse aus [2],[6],[14],[17] beweisen. Wir beschränken uns in dieser Note auf einige Beispiele. Da die kompakten punktwertigen Abbildungen $F: Y \longrightarrow E$ in zulässigen tVR E in der Klasse $CA\ (Y, \mathfrak{K}(E))$ enthalten sind, umfassen die Ergebnisse dieser Arbeit die entsprechenden Resultaten aus [2],[6],[14],[17] .

Wir bemerken, dass unser Zugang auch für den Fall lokalkonvexer metrisierbarer Räume elementarer als in [2] ist, da wir an keiner Stelle den Erweiterungssatz von Dugundji benötigen.

3. Der verallgemeinerte Antipodensatz von Borsuk. Grundlage für alle Ergebnisse dieser Note ist die folgende bekannte Antipodenaussage für endlichdimensionale Räume.

Antipodensatz: Es seien E ein endlichdimensionaler tVR, W eine offene, symmetrische Nullumgebung aus E und $f: \overline{W} \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$ ein kompaktes Vektorfeld mit $f(x) = -f(-x)$ $(x \in \overline{W})$. Dann lässt sich $f \mid \partial W$ nicht zu einem auf $\overline{W}$ nullstellenfreien kompakten Vektorfeld $f: \overline{W} \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$ erweitern.

Wir folgern nun elementar den verallgemeinerten Antipodensatz für tVR.

Satz 2: Es seien E ein tVR, W eine offene, symmetrische Nullumgebung aus E sowie $f_0 \in CA_0\ (\partial W, \mathfrak{K}(E), \partial W)$. Es gelte $f_0(x) \cap \lambda f_0(-x) = \emptyset$ $(x \in \partial W,\ \lambda \in [0,1])$. Dann hat f_0 keine Erweiterung $f \in CA_0\ (\overline{W}, \mathfrak{K}(E), \overline{W})$.

Beweis: Angenommen, $f: \overline{W} \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$ wäre doch eine solche Erweiterung von f_0. Sei $g(x) = \frac{1}{2}\,[f(x) - f(-x)]$ $(x \in \overline{W})$. Dann ist $g \in CA_0\ (\overline{W}, \mathfrak{K}(E), \partial W)$. Es existiert also eine sternförmige Nullumgebung V mit $g(\partial W) \cap V = \emptyset$. Sei V_1 eine sternförmige, symmetrische Nullumgebung aus E mit $V_1 + V_1 \subseteq \subseteq V$. Es gibt ein finites Vektorfeld $g_1 \in CA_0\,(\overline{W}, \mathfrak{K}(E), \overline{W})$ mit $g_1(x) \subseteq f(x) + V_1$ $(x \in \overline{W})$. Wir setzen $g_0(x) = \frac{1}{2}[g_1(x) - - g_1(x)]$ $(x \in \overline{W})$. g_0 ist finit und man erkennt leicht die Beziehung $g_0(x) \subseteq g(x) + V$ $(x \in \partial W)$. Nach Hilfssatz 1 sind g_0 und g homotop in $CA_0\,(\overline{W}, \mathfrak{K}(E), \partial W)$. Sei

$h(x,t) = \dfrac{f(x) - tf(-x)}{1 + t}$ $(x \in \overline{W},\ t \in [0,1])$. Aus den Voraussetzungen folgt sofort, dass h eine Homotopie zwischen f und g in $CA_0\,(\overline{W}, \mathfrak{K}(E), \partial W)$ liefert. Insgesamt sind also f und g_0 in $CA_0\,(\overline{W}, \mathfrak{K}(E), \partial W)$ homotop. f ist auf $\overline{W}$ nullstellenfrei. Daher existiert nach Folgerung 1 ein endlichdimensionaler Teilraum E_0, so dass $g_0 \mid \partial W \cap E_0$ eine Erweiterung aus $CA_0(\overline{W} \cap E_0, \mathfrak{K}(E_0), \overline{W} \cap E_0)$ hat. Dies widerspricht dem Antipodensatz, denn g_0 war auf $\overline{W} \cap E_0$ ungerade.

Satz 2 wurde für punktwertige kompakte Vektorfelder in [11] mit Abbildungsgrad und in [6] ohne Abbildungsgrad, jedoch aufwendiger als hier bewiesen. Für mengenwertige kompakte Vektorfelder in lokalkonvexen Räumen und den Spezialfall, dass W eine konvexe Nullumgebung ist, erhielt Ma [17] ebenfalls relativ aufwendig dieses Ergebnis ohne Abbildungsgrad, während Petryshyn und Fitzpatrick [18] Satz 2 (für lokalkonvexe Räume) mit Abbildungsgrad bewiesen. Wir bemerken, dass im Unterschied zu [11],[17],[18] unsere Abbildung in Satz 2 nur auf ∂W (wie auch in [6]) und nicht auf $\overline{W}$ definiert ist. In (nicht metrisierbaren, lokalkonvexen) tVR ist dies i.a. eine etwas schwächere Voraussetzung als in [11],[17],[18].

4. **<u>Der Satz von Borsuk-Ulam</u>. Eine Teilmenge M eines linearen Raumes E heisst radial beschränkt, wenn der Durchschnitt von M mit jeder Geraden durch den Nullpunkt von E in einer Strecke enthalten ist. Ein tVR heisst lokal radial beschränkt, wenn er eine radial beschränkte Nullumgebung besitzt. Alle lokal beschränkten tVR sind offenbar lokal radial beschränkt, Der lokalkonvexe metrisierbare Raum der auf $[0,1]$ beliebig oft differenzierbaren Funktionen ist ein Beispiel für einen lokal radial beschränkten tVR, der nicht lokal beschränkt ist (s. [15],[19]).**

<u>Satz 3</u>: Es seien E ein lokal radial beschränkter tVR, W eine offene, symmetrische und radial beschränkte Nullumgebung aus E sowie $f \in CA\ (\overline{W}, \mathfrak{K}(E))$. Weiter sei L ein linearer Teilraum von E mit $f(\partial W) \subseteq L$, $\partial W \not\subseteq L$. Dann existiert ein $x_0 \in \partial W$ mit $f(x_0) \cap f(-x_0) \neq \emptyset$.

<u>Beweis</u>: Angenommen, es wäre für alle $x \in \partial W$ stets $f(x_0) \cap f(-x_0) = \emptyset$. Dann ist durch $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ $(x \in \overline{W})$ ein Element aus $CA_0\ (\overline{W}, \mathfrak{K}(E), \partial W)$ erklärt. Offenbar gilt auch $g(\partial W) \subseteq L$ und daher existiert ein $z_0 \in \partial W/L$ mit $\lambda z_0 \notin g(\ \ W)$ $(\lambda \geq 0)$. Weil $g(\overline{W})$ radial beschränkt ist, gibt es ein $k_0 > 0$, so dass $k_0 z_0 \notin g(\overline{W})$ gilt. Sei $h(x,t) = g(x) - tk_0 z_0$ $(x \in \overline{W},\ t \in [0,1])$. Dann ist $o \notin h(\partial W \times [0,1])$. Wir setzen $g_1(x) = g(x) - k_0 z_0$ $(x \in \overline{W})$. g_1 hat auf $\overline{W}$ keine Nullstelle und ist zu g in $CA_0\ (\overline{W}, \mathfrak{K}(E), \partial W)$ homotop. Nach Satz 1 hat $g_0 = g|\partial W$ eine Erweiterung $\tilde{g}_0 \in CA_0\ (\overline{W}, \mathfrak{K}(E), \overline{W})$. Weil g_0 ungerade ist, widerspricht das Satz 2.

Für punktwertige Vektorfelder bewiesen wir (aufwendiger) Satz 3 in [6]. Dort forderten wir allerdings nur, dass f auf ∂W definiert ist. Für konvexe Nullumgebungen in lokalkonvexen Räumen wurde Satz 3 mit ebenfalls grösserem Aufwand von Ma [17] bewiesen. Verallgemeinerungen in normierten Räumen findet man in [10],[18] .

5. Der Gebietsinvarianzsatz. Sei E ein tVR, Y ein topologischer Raum sowie V eine symmetrische Nullumgebung aus E. Wir nennen die Abbildung $f\colon Y \longrightarrow \mathfrak{K}(Y)$ eine V-Abbildung, wenn aus $f(x_1)\cap f(x_2)\neq\emptyset$ $(x_1,x_2\in Y)$ stets $x_1 - x_2 \notin \partial V$ folgt.

Satz 4: Es seien E ein tVR, W eine offene, sternförmige, symmetrische Nullumgebung aus E und $f\in CA\ (\overline{W}, \mathfrak{K}(E))$ eine W-Abbildung. Dann gilt $f(o)\subseteq \operatorname{int} f(W)$.

Beweis: Wir setzen $f_o(x) = f(x) - f(o)$ $(x\in\overline{W})$, $g_o(x) = f(\frac{x}{2}) - f(-\frac{x}{2})$ $(x\in\overline{W})$ und $h(x,t) = f(\frac{x}{1+t}) - f(-\frac{tx}{1+t})$ $(x\in\overline{W},\ t\in[0,1])$. Es gilt $o\notin h\ (\partial W\times[0,1])$, weil f eine W-Abbildung ist. Daher sind f_o und g_o in $CA_o\ (\overline{W}, \mathfrak{K}(E), \partial W)$ homotop. Es existiert eine sternförmige, symmetrische Nullumgebung V aus E mit $f_o(\partial W)\cap V = \emptyset$. Sei $v\in V$ und $y_o\in f(o)$ beliebig sowie $y = v + y_o$ und $f_y(x) = f(x) - y$ $(x\in\overline{W})$. Dann sind nach Hilfssatz 1 f_o und f_y und damit auch f_y und g_o in $CA_o\ (\overline{W}, \mathfrak{K}(E), \partial W)$ homotop. Hätte f_y in W keine Nullstelle, so würde nach Satz 1 für $g_o\,|\,\partial W$ eine Erweiterung $\tilde{g}_o\in CA_o\ (\overline{W}, \mathfrak{K}(E), W)$ existieren. Dies wäre ein Widerspruch zu Satz 2, denn g_o ist ungerade. Somit gibt es ein $x_o\in W$ mit $y\in f(x_o)\subseteq f(W)$, also $v + y_o\in f(W)$. Weil $v\in V$, $y_o\in f(o)$ beliebig war, gilt $V + f(o)\subseteq f(W)$. Daraus folgt die Behauptung.

Durch Translation erhalten wir sofort

Folgerung 2: Es seien E ein tVR, $x_0 \in E$, U eine offene Umgebung von x_0 derart, dass $W = U - x_0$ sternförmig und symmetrisch ist. $f \in CA\ (U, \mathfrak{K}(E))$ sei eine W-Abbildung. Dann gilt $f(x_0) \subseteq \operatorname{int} f(U))$.

Sei Ω eine offene Teilmenge eines tVR E. Wie in [17] heisst $f\colon \Omega \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$ eine lokale Randabbildung, wenn für jedes $a \in \Omega$ eine offene, symmetrische, sternförmige Nullumgebung W_a aus E existiert, so dass $a + W_a \subseteq \Omega$ gilt und aus $f(x_1) \cap f(x_2) \neq \emptyset$ $(x_1, x_2 \in a + \overline{W}_a)$ die Beziehung $x_1 - x_2 \notin \partial W$ folgt.

Wir beweisen nun mit unseren Mitteln den folgenden Gebietsinvarianzsatz.

Satz 5: Es seien E ein tVR, Ω eine offene Teilmenge von E und $f \in CA\ (\Omega, \mathfrak{K}(E))$. Ist f eine lokale Randabbildung, so muss $f(\Omega)$ eine offene Teilmenge von E sein.

Beweis: Sei $z \in f(\Omega)$. Es existiert ein $a \in \Omega$ mit $z \in f(a)$. Nach Voraussetzung gibt es eine offene, symmetrische, sternförmige Nullumgebung W mit $(\overline{W} + a) \subset \Omega$ derart, dass aus $f(x_1) \cap f(x_2) \neq \emptyset$ $(x_1, x_2 \in \overline{W} + a)$ stets $x_1 - x_2 \notin \partial W$ folgt. Offenbar ist dann $f' = f \mid (\overline{W} + a)$ eine W-Abbildung. Nach Folgerung 2 gilt $z_0 \in f(a_0) \subseteq \operatorname{int} f'(\overline{W} + a_0) \subseteq \operatorname{int} f(\Omega)$.

Satz 5 wurde mit Hilfe des Begriffs des nicht-singulären Vektorfeldes für lokalkonvexe Räume erstmals von Ma [17] bewiesen. Für punktwertige Abbildungen in zulässiger tVR siehe [6],[14].

6. Fixpunktaussagen

Hilfssatz 2: Es seien E ein tVR, K eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E mit $o \in K$ und W eine abgeschlossene Nullumgebung aus E. Dann hat die durch $f(x) = \{x\}$ $(x \in \partial W \cap K)$ erklärte Abbildung f keine Erweiterung $\tilde{f} \in CA_0$ $(W \cap K, \mathfrak{K}(K), W \cap K)$.

Beweis: Sei durch $\tilde{f}(x) = x - F(x)$ $(x \in W \cap K)$ eine solche Erweiterung gegeben. Dann ist $F: W \cap K \longrightarrow \mathfrak{K}(K)$ kompakt, fixpunktfrei und es gilt $F(x) = \{o\}$ $(x \in \partial W \cap K)$. Wir setzen

$$G(x) = \begin{cases} F(x) & (x \in W \cap K) \\ \{o\} & (x \in K/W) \, . \end{cases}$$

Dann ist G eine kompakte Abbildung von K in $\mathfrak{K}(K)$ mit $x \notin G(x)$ $(x \in K)$. Es existieren eine Nullumgebung V mit $\{x - G(x)\} \cap V = \emptyset$ $(x \in K)$, ein endlichdimensionaler Teilraum E_V von E und eine finite Abbildung $G_V: K \longrightarrow \mathfrak{K}(K)$ mit $G_V(x) \subseteq G(x) + V$ $(x \in K)$ und $G_V(K) \subseteq E_V$. Man sieht leicht, dass $x \notin G_V(x)$ $(x \in K)$ gilt. Andererseits hat $G_0 = G_V \mid K \cap E_0$ als kompakte Selbstabbildung der in E_0 abgeschlossenen und konvexen Teilmenge $K \cap E_0 \subseteq E_0$ nach dem Fixpunktsatz von Kakutani einen Fixpunkt. Dieser Widerspruch beehdet den Beweis.

Satz 6: Sei E ein tVR, W eine abgeschlossene Nullumgebung aus E, K eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E mit $o \in K$ und $f \in CA_0$ $(\partial W \cap K, \mathfrak{K}(K), \partial W \cap K)$. Es gelte $-\lambda x \notin f(x)$ $(x \in \partial W \cap K, \lambda \geq 0)$. Dann hat f keine Erweiterung $\tilde{f} \in CA_0$ $(W \cap K, \mathfrak{K}(K), W \cap K)$.

Beweis: Sei $\tilde{f}$ doch eine solche Erweiterung. Es gibt also eine fixpunktfreie kompakte Abbildung $F: W \cap K \longrightarrow \mathfrak{K}(K)$

mit $\tilde{f}(x) = x - F(x)$ $(x \in W \cap K)$. Sei $h(x,t) = x - tF(x)$ $(x \in W \cap K)$. Dann gilt $o \notin h(\partial W \cap K \times [0,1])$. Die durch $g(x) = \{x\}$ $(x \in W \cap K)$ erklärte Abbildung g ist also zu f homotop in $CA_0(W \cap K, \mathfrak{K}(K), \partial W \cap K)$. Nach Satz 1 hat $g_0 = g \mid \partial W \cap K$ eine Erweiterung $\tilde{g}_0 \in CA_0(W \cap K, \mathfrak{K}(K), W \cap K)$. Dies widerspricht Hilfssatz 2.

<u>Satz 7:</u> Es seien E, K und W wie in Hilfssatz 2 erklärt. Weiter sei $F: W \cap K \longrightarrow \mathfrak{K}(K)$ eine kompakte in K gleichmässig finit approximierbare Abbildung mit $\beta x \notin F(x)$ $(\beta > 1, x \in \partial W \cap K)$. Dann hat F einen Fixpunkt.

<u>Beweis</u>: Es gilt $(1 - \beta)x \notin x - F(x)$ $(\beta > 1, x \in \partial W \cap K)$. Mit $1 - \beta = \lambda > 0$ und $f(x) = x - F(x)$ folgt die Behauptung aus Satz 6.

Satz 7 stammt für lokalkonvexe Räume von G. Kayser [12], für K = E von Ma [16],[17], für punktwertige Abbildungen in allgemeinen tVR von S. Hahn und K.F. Pötter [8],[9] .

<u>Satz 8</u>: Es seien E ein tVR, W eine offene, symmetrische Nullumgebung aus E und $F: \overline{W} \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$ eine kompakte, gleichmässig finit approximierbare Abbildung. Für alle $x \in \partial W$ gehöre x nicht zur konvexen Hülle von $F(x) \cup (-F(-x))$. Dann hat F einen Fixpunkt.

<u>Beweis</u>: Sei $f(x) = x - F(x)$ $(x \in \partial W)$. Wir können $x \notin F(x)$ $(x \in \partial W)$ annehmen. Es ist $f(x) \cap \lambda f(-x) = \emptyset$ $(x \in \partial W, \lambda \in [0,1])$. Anderenfalls gäbe es ein $\lambda_0 \in [0,1]$, ein $y_0 \in F(x_0)$ und ein $y_0' \in F(-x_0)$, so dass $x_0 - y_0 = \lambda_0(-x_0 - y_0')$, also $x_0 = \frac{1}{1 + \lambda_0} y_0 + \frac{\lambda_0}{1 + \lambda_0} (-y_0')$ gilt. Dies widerspricht

der Voraussetzung. Somit können wir Satz 2 anwenden. Durch $\tilde{f}(x) = x - F(x)$ $(x \in \overline{W})$ ist eine Erweiterung aus CA $(\overline{W}, \mathfrak{K}(E))$ erklärt, die nach Satz 2 eine Nullstelle besitzen muss. Damit hat F einen Fixpunkt.

Wir bemerken abschliessend, dass wir mit unserem elementaren Homotopieerweiterungssatz in allgemeinen tVR auch gewisse Aussagen nicht beweisen können. Dies betrifft z. B. Eigenwertaussagen, bei denen die Abbildungen nur auf dem Rand der betrachteten Nullumgebung definiert sind. In solchen Fällen führen die Methoden aus [3],[6],[7] zum Ziel. Trotzdem konnten wir mit einfachsten Mitteln eine Reihe wichtiger und allgemeiner Resultate beweisen, die bisher wesentlich umständlicher hergeleitet wurden. Satz 2 lässt sich auch für sogenannte kondensierende Abbildungen (s. z. B. [18]) beweisen, wenn der tVR als lokalkonvex vorausgesetzt wird. Alle aufgeführten Resultate lassen sich dann in ähnlicher Weise für kondensierende Abbildungen herleiten, Dies zeigen wir für normierte Räume in [22].

L i t e r a t u r

[1] DUGUNDJI J.: An extension of Tietze's theorem, Pacific J. Math. 1(1952), 353-367.

[2] GRANAS A.: The theory of compact fields and some of its applications to the topology of functional spaces, I, Rozprawy Mat. 30(1962), 1-89.

[3] HAHN S.: Zur Leray-Schauder-Theorie in topologischen Vektorräumen, Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden 24 (1975), 375-378.

[4] HAHN S.: Fixpunktsätze für mengenwertige Abbildungen in lokalkonvexen Räumen, Math. Nachr. 73(1976), 269-283.

[5] HAHN S.: Ein Homotopieerweiterungssatz für kompakte Vektorfelder in topologischen Vektorräumen, Comment. Math. Univ. Carolinae 17(1976), 807-811.

[6] HAHN S.: Zur Theorie kompakter Vektorfelder in topologischen Vektorräumen, erscheint in: Math. Nachr.

[7] HAHN S.: Eigenwertaussagen und Gebietsinvarianzsatz für konzentrierende Abbildungen, Comment. Math. Univ. Carolinae 18(1977), 697-713.

[8] HAHN S., PÖTTER K.F.: Eine Verallgemeinerung eines Satzes von H.H. Schaefer, Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden 19(1970), 1383-1385.

[9] HAHN S., PÖTTER K.F.: Über Fixpunkte kompakter Abbildungen in topologischen Vektorräumen, Dissertation Dresden 1971. Teilweise publiziert in: Studia Math. 50(1974), 1-16.

[10] JOSHI K.D.: Infinite dimensional non-symmetric Borsuk-Ulam theorem, Fund. Math. 89(1975), 45-50.

[11] KABALLO W.: Zum Abbildungsgrad in Hausdorffschen topologischen Vektorräumen, Manuscripta Math. 8(1973), 209-216.

[12] KAYSER G.: Zur Existenz von Fixpunkten bei kompakten bzw. konzentrierenden mengenwertigen Abbildungen in lokalkonvexen Räumen, Berichte der Jahrestagung Num. Math. Potsdam-Cecilienhof, 25.11. - 1.12. 1973, 46-53, TH Karl-Marx-Stadt, Sektion Mathematik.

[13] KLEE V.: Shrinkable neighborhoods in Hausdorff linear spaces, Math. Ann. 141(1960), 281-285.

[14] KLEE V.: Leray-Schauder-theory without local convexity, Math. Ann. 141(1960), 286-296.

[15] LANDSBERG M.: Lineare beschränkte Abbildungen von einem Produkt in einem lokal radial beschränkten Raum und ihre Filter, Math. Ann. 146(1964), 427-431.

[16] MA T.W.: Topological degrees of set-valued compact fields in locally convex spaces, Diss. Math. 92 (1972), 1-47.

[17] MA T.W.: Non-singular set - valued compact fields in locally convex spaces, Fund. Math. 75(1972), 249-259.

[18] PETRYSHYN W.V., FITZPATRICK P.M.: A degree theory, fixed point theorems and mapping theorems for multivalued noncompact mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 194(1974), 1-25.

[19] RIEDRICH T.: Das Birkhoff-Kellogg-Theorem für lokal radial beschränkte Räume, Math. Ann. 166(1966), 264-276.

[20] WILLE F.: Borsuk's Antipodensatz für mehrwertige monotone Operatoren mit Störungen. ZAMM 54(1974), H.4, T. 204.

[21] ZEIDLER E.: Vorlesungen über nichtlineare Funktionanalysis I - Fixpunktsätze, Teubner-Texte in Math., Leipzig 1976.

[22] HAHN S.: Eine Bemerkung zur Theorie verdichtender Abbildungen. Erscheint in: Wiss. Zeitschr. Techn. Univ. Dresden 27(1978), 337-340.

[23] BROWDER F.E.: Asymptotically Orientation Preserving Mapping in B-spaces, J.F.A. 25(1977), 121-127.

[24] NUSSBAUM : Generalizing the fixed point index, Math. Ann. 228(1977), 259-278.

[25] PETRYSHYN W.V.: Invariance of domain theorem for locally A-proper mappings and its applications, J.F.A. 5(1970), 137-159.

[26] PETRYSHYN W.V.: A-proper mappings theory, in preparation.

Sektion Mathematik

Technische Universität Dresden

Dresden

D D R

(Oblatum 19.8. 1977)