Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Hans-Görg Roos

Ein singulär gestörtes Problem für eine lineare parabolische Differentialgleichung beliebiger Ordnung

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 19 (1978), No. 1, 13--25

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105828

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

19,1 (1978)

EIN SINGULÄR GESTÖRTES PROBLEM FÜR EINE LINEARE PARABOLISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNG BELIEBIGER ORDNUNG

H.-G. ROOS, Magdeburg

Zusammenfassung: Für die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon L_1 u + L_0 u = f$ werden gleichmässige asymptotische Approximationen für den Fall eines Operators erster Ordnung L_0 konstruiert. Die Beweise beruhen auf a priori-Abschätzungen.

Schlagworte: Randwertproblem, parabolische Differentialgleichung, singuläre Störungen.

AMS: 35K35, 35B25 Ref. Ž. 7.955.4

---

1. Einleitung. Betrachtet wird das Problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon L_1(x,D_x)u + L_0(x,t,D_x)u = f(x,t) \text{ in } Q_T$$

$$(1) \qquad \frac{\partial^s u}{\partial n^s} = 0 \qquad s = 0,\dots,m-1 \text{ in } S_T$$

$$u = 0 \text{ in } \Omega \;.$$

Dabei ist $Q_T = \Omega \times (0,T)$, L_1 sei linear, gleichmässig streng elliptisch in $\bar{\Omega}$ und habe die Ordnung $2m$, $\varepsilon > 0$ sei ein kleiner Parameter. Gleichmässige asymptotische Approximationen für $u(x,t,\varepsilon)$ für $\varepsilon \longrightarrow 0$ konstruierten Bobisud [4] im Fall $m = 1$ and Besjes [1] für den Fall, dass L_0 ebenfalls elliptisch ist. Ziel dieser Arbeit ist die Konstruktion gleichmässiger asymptotischer Approximationen, wenn $L_0(x,t,D_x)u =$

$= b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u.$

2. <u>Voraussetzungen</u>. Der Einfachheit halber sei Ω ein Gebiet im R^1, etwa $\Omega = (0,1)$, es sei $T = 1$. Dann ist $S_T = \{(x,t) \mid (x = 0,\ 0 \leq t \leq 1) \cup (x = 1,\ 0 \leq t \leq 1)\}$.
Wie bei Besjes werden die Funktionenräume $C^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2m}}(Q_T)$ $(l \geq 2m,\ 0 < \alpha < 1)$ mit der Norm $|\cdot|_{l+\alpha}$ verwendet, ferner sei $\| f \| = \sup_{(x,t)\in Q_T} |f(x,t)|$, $\| f \|_j = \sum_{2mr+s \leq j} \sup_{(x,t)\in Q_T} | D_t^r D_x^s f |$.

(A) $\quad L_1(x,D_x) = \sum_{\nu=0}^{2m} a_\nu(x) \frac{\partial^{2m-\nu}}{\partial x^{2m-\nu}} \quad (m \geq 2)$

sei gleichmässig streng elliptisch in $\bar{\Omega}$, die Koeffizienten $a_\nu(x)$ seien aus $C^{l-2m+\alpha}(\Omega)$

(B) $\quad L_0(x,t,D_x) = b(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + c(x,t)$

$b(x,t) \in C^{1+l-2m+\alpha,\frac{l-2m+\alpha}{2m}}$, $c(x,t) \in C^{l-2m+\alpha,\frac{l-2m+\alpha}{2m}}(Q_T)$,

ferner $b(x,t) > 0$ in $\bar{Q}_T$.

O.B.d.A wird vorausgesetzt, dass $c(x,t) > 0$ in $\bar{Q}_T$.

(C) $\quad$ Es sei $f(x,t) \in C^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2m}}(Q_T)$ und

$$\frac{\partial^K f}{\partial t^K}\Big|_{t=0} = 0 \qquad (K = 0,1,\dots,[\tfrac{l}{2m}]).$$

3. <u>a priori - Abschätzungen</u>. Unter den obigen Voraussetzungen bewies Besjes den

Satz 1 (Besjes). Für die Lösung $u(x,t,\varepsilon)$ des Problems (1) gilt

$$\| u \| \leq C\, \varepsilon^{1+\frac{l^2}{(2m-1)(2m-1-\alpha)} - \frac{l+\alpha}{2m}} |f|_{l-2m+\alpha} +$$

$$+ \sup_{0 \leq t \leq 1} C \varepsilon^{-\frac{\ell}{2(2m-1)(2m-1-\alpha)} - \frac{1}{2\ell}} \cdot \left(\int_\Omega u^2(x,t)dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Die Untersuchung von $\int_\Omega u^2(x,t)dx$ unterscheidet sich unter der Voraussetzung (B) von der für elliptische L_0. Aus der Gardingschen Ungleichung folgt

$$\varepsilon \int_\Omega u \, L_1 u \, dx \geq \varepsilon \, C_1 \int_\Omega u^2 dx,$$

nach Voraussetzung (B) existiert aber auch ein C_0, so dass

$$\int_\Omega u L_0 \, u dx = \int_\Omega \left[b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + cu^2 \right] dx \geq C_0 \int_\Omega u^2 \, dx.$$

Dann ergibt sich

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega u^2 dx = \int_\Omega u \frac{\partial u}{\partial t} dx \leq \int_\Omega uf dx - (C_0 + \varepsilon C_1) \int_\Omega u^2 \, dx \leq$$

$$\leq C_2 \int_\Omega u^2 \, dx + C_3 \int_\Omega f^2 dx$$

und damit

$$\int_\Omega u^2(x,t)dx \leq C_3 \int_0^t \int_\Omega f^2(x,\tau) e^{C_2(t-\tau)} dx d\tau .$$

Aus Satz 1 erhält man

Satz 2. Für die Lösung $u(x,t,\varepsilon)$ des Problems (1) gilt die a priori-Abschätzung

$$\| u \| \leq C \, \varepsilon^{1 + \frac{1^2}{(2m-1)(2m-1-\alpha)} - \frac{1+\alpha}{2m}} |f|_{1-2m+\alpha}$$

$$+ C \varepsilon^{-\frac{1}{2} \frac{1}{(2m-1)(2m-1-\alpha)} - \frac{1}{21}} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 f^2(x,\tau) dx d\tau \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

4. Formale Entwicklungen. Die Konstruktion formaler Entwicklungen erfolgt wie nach der MAE-Methode üblich (vgl. [1-3,5]). Es sei $\mu^{2m-1} = \varepsilon$,

$\tau^+ = \frac{x}{\mu}$, $\tau^- = \frac{1-x}{\mu}$,

$$\mu^{2m-1} L_1 + L_0 = \mu^{-1} M^+ + \sum_{\nu=0}^{\infty} M_\nu^+ \mu^\nu .$$

mit $M^+ = a_0(0)\frac{\partial^{2m}}{\partial \tau^{+2m}} + b(0,t)\frac{\partial}{\partial \tau^+}$

und analog

$$\mu^{2m-1}L_1+L_0 = \mu^{-1}M^- + \sum_{\nu=0}^{\infty} M^- \mu^\nu \quad , \quad M^- = a_0(1)\frac{\partial^{2m}}{\partial \tau^{-2m}} - b(1,t)\frac{\partial}{\partial \tau^-}.$$

Der Ansatz

$$(2) \qquad u(x,t,\mu) = \sum_{j=0}^{M} \mu^j w_j(x,t) + \mu \sum_{j=0}^{N^+} \mu^j \sigma_j^+(\tau^+,t) + \\ + \sum_{j=0}^{N^-} \mu^j \sigma_j^-(\tau^-,t) + R$$

führt zu

$$(L_0 + \tfrac{\partial}{\partial t})w_0 = f$$

$$(3) \qquad (L_0 + \tfrac{\partial}{\partial t})w_j = 0 \qquad (j = 1,\dots,2m-2)$$

$$(L_0 + \tfrac{\partial}{\partial t})w_j = -L_1 w_{j-(2m-1)} \qquad (j = 2m-1,\dots,M) \quad (M \geq 2m-1)$$

$$(L_0 + \tfrac{\partial}{\partial t})w_0 = f$$

$$(3^*) \quad (L_0 + \tfrac{\partial}{\partial t})w_j = 0 \qquad (j = 1,\dots,M) \quad (M < 2m-1)$$

$$M^+ \sigma_0^+ = 0$$

$$(4_1) \quad M^+ \sigma_j^+ = -\sum_{k=0}^{j-1} M_k^+ \sigma_{j-1-k}^+ - \frac{\partial}{\partial t}\sigma_{j-1}^+ \qquad (j = 1,\dots,N^+)$$

$$M^- \sigma_0^- = 0$$

$$(4_2) \qquad M^- \sigma_j^- = - \sum_{k=0}^{j-1} M_k^- \sigma_{j-1-k}^- - \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{j-1}^- \qquad (j = 1,\dots,N^-).$$

Der Rest genügt

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \mu^{2m-1} L_1 R + L_0 R = H - \mu^{N^+ +1} \frac{\partial \sigma_{N^+}}{\partial t} -$$

$$(5) \qquad - \sum_{i+j>N^+} \mu^{i+j} M_i^+ \sigma_j^+ - \mu^{N^-} \frac{\partial \sigma_{N^-}}{\partial t} - \frac{1}{\mu} \sum_{i+j>N^-} \mu^{i+j} M_i^- \sigma_j^- ,$$

$$H = \begin{cases} - \mu^{2m-1} \sum\limits_{j=M-(2m-1)+1}^{M} \mu^j L_1 w_j & \text{falls } M \geq 2m-1 \\ - \mu^{2m-1} \sum\limits_{j=0}^{M} \mu^j L_1 w_j & \text{falls } M < 2m-1. \end{cases}$$

Dies ergibt zunächst die Forderung $N^+ \geq M$, $N^- \geq M + 1$. Die Aufspaltung der Zusatzbedingungen liefert für die w_j

$$w_j|_{t=0} = 0 \qquad (j = 0,\dots,M)$$

$$(6) \quad w_0|_{x=0} = 0$$

$$w_j|_{x=0} = - \sigma_{j-1}^+|_{\tau=0} \qquad (j = 1,\dots,M),$$

die Bedingungen für die v_j^+ lauten

$$(7_1) \qquad \frac{\partial^s \sigma_j^+}{\partial \tau^{+s}}\Big|_{\tau=0} = \begin{cases} - \dfrac{\partial^s w_{j-s+1}}{\partial n^s} & (0 \leq j - s + 1 \leq M) \\ & j - s + 1 > M \\ 0 & j - s + 1 < 0 \end{cases}$$
$$(s = 1,\dots,m-1)$$

und die für die v_j

$$(7_2)\quad \left.\frac{\partial^s \sigma_j^-}{\partial \tau^s}\right|_{\tau=0} = \begin{cases} -\dfrac{\partial^s w_{j-s}}{\partial u^s} & (0 \leq j - s \leq M) \\ & (j - s > M,\ j - s < 0) \\ 0 & (s = 0,\dots,m - 1)\ . \end{cases}$$

Vor der Untersuchung der Bedingungen, denen der Rest R genügt, wird das Verhalten der v_j^+, v_j^- betrachtet. Es war

$$M^+ = a_o(0)\ \frac{\partial^{2m}}{\partial \tau^{+2m}} + b(0,t)\ \frac{\partial}{\partial \tau^+}\ ,\quad M^- = a_o(1)\ \frac{\partial^{2m}}{\partial \tau^{-2m}} -$$

$$- b(1,k)\ \frac{\partial}{\partial \tau^-}\ ,$$

d.h., die Differentialgleichungen (4) besitzen konstante Koeffizienten. Wegen der Voraussetzung (A) gilt $(-1)^m a_o(x) > 0$, nach (B) ist $b(x,t) > 0$. Die charakteristische Gleichung

$$a_o(0)\ \lambda^{2m} + b(0,t)\lambda = 0$$

besitzt demnach genau m - 1 Wurzeln mit negativem Realteil, die Gleichung

$$a_o(1)\ \lambda^{2m} - b(1,t)\lambda = 0$$

genau m. Deshalb besitzen die Differentialgleichungen (4_1) mit den Zusatzbedingungen (7_1) in τ exponentiell abklingende Lösungen, analoges gilt für (4_2) mit (7_2).

Bis auf exponentiell kleine Glieder gilt dann bei x = 0

$$\frac{\partial^s R}{\partial n^s} = \begin{cases} -\mu \sum\limits_{j=M}^{N^+} \mu^j \sigma_j^+ & s = 0 \\ -\sum\limits_{j=N^+-s+2}^{M} \mu^j \dfrac{\partial^s w_j}{\partial n^s} & s \geq 1 \end{cases}$$

und bei x = 1

$$\frac{\partial^s R}{\partial u^s} = \begin{cases} -\sum\limits_{j=M+1}^{N^-} \mu^j \sigma_j^- & s = 0 \\ -\sum\limits_{j=N^--s+1}^{M} \mu^j \dfrac{\partial^s w_j}{\partial n^s} & s \geq 1 \end{cases} .$$

Dies führt zu der Forderung $N^+ \geq M + m - 2$, $N^- \geq M + m - 1$, wegen $m \geq 2$ sind die Kleinstmöglichen N^+, N^- $N^+ = M + m - 2$, $N^- = M + m - 1$.

Die Uberprüfung der Bedingung bei $t = 0$ liefert $R|_{t=o} = 0$.

Der durch

$$u(x,t,\mu) = \sum_{j=0}^{M} \mu^j w_j(x,t) + \mu \sum_{j=0}^{M+m-2} \mu^j \sigma_j^+(\tau^+,t) + \\ + \sum_{j=0}^{M+m-1} \mu^j \sigma_j^-(\tau^-,t) + R_M$$

definierte Rest R_M genügt also

$$\frac{\partial R_M}{\partial t} + \varepsilon L_1 R_M + L_o R_M = F_M$$

(8)
$$R_M \,|\, _{t=o} = 0$$

$$\frac{\partial^s R_M}{\partial n^s} = G_{SM} \text{ in } S_T \quad (s = 0,\ldots,m-1),$$

F_M und die G_{SM} besitzen formal die Grossenordnung $O(\mu^{M+1})$.

5. Nachweis des asymptotischen Charakters der formalen Entwicklungen in einem Spezialfall.

Setzt man $w_j = -\sigma_{j-1}^+|_{\tau=o} + w_j^*$ $(j \geq 1)$, so erhält man für w_o und die w_j^* Probleme der Form

$$\frac{\partial z}{\partial t} + b(x,t)\frac{\partial z}{\partial x} + c(x,t)z = g(x,t)$$

$$z|_{t=o} = z\,|_{x=o} = 0,$$

wobei laut Voraussetzung $b(x,t) > 0$ ist.

Sei $X(t, \xi, \tau)$ die Lösung von

$$\frac{dx}{dt} = b(x,t) \quad \text{mit} \quad x(\tau) = \xi \ ,$$

D_1 das Gebiet zwischen $X(t,0,0)$ und der positiven x-Achse,

D_2 das Gebiet zwischen $X(t,0,0)$ und der positiven t-Achse.

Dann gilt

$$(9) \quad \begin{aligned} z(\xi,\tau) &= \int_0^{\tau} g(X(\sigma,\xi,\tau),\sigma) \exp\left\{\int_{\tau}^{\sigma} c(X(t,\xi,\tau),t)dt\right\} d\sigma \quad \text{in } D_1 \\ z(\xi,\tau) &= \int_{\gamma(\xi,\tau)}^{\tau} g(X(\sigma,\xi,\tau),\sigma) \exp\left\{\int_{\tau}^{\sigma} c(X(t,\xi,\tau),t)dt\right\} d\sigma \quad \text{in } D_2 \ , \end{aligned}$$

wobei $\gamma(\xi,\tau)$ der t-Wert ist, für den $X(t,\xi,\tau)$ $x = 0$ schneidet. Aus den Lösungsformeln (9) kann man ablesen, dass z genau dann stetige Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzt, wenn b, c und g hinreichend glatt sind und eine Umgebung von (0,0) existiert, in der g identisch Null ist. Es wird nun der Spezialfall betrachtet, dass eine Umgebung von (0,0) existiert, in der $f(x,t)$ identisch Null ist.

Dann ergibt sich sukzessive, dass mit genügend grossem l
$w_o, v_o^+, w_1, v_1^+, \dots, v_{M+m-2}^+, w_M, v_o^-, \dots, v_{M+m-1}^-$
hinreichend glatt sind. Daraus folgt

$$\| F_M \|_j \leq C\mu^{M+1-j}, \quad \| G_{sM} \| \leq C\mu^{M+1} \quad (s = 0,\dots,m-1).$$

Nun sei $\tilde{R}_M$ ein Polynom in x mit von t abhängigen Koeffizienten, so dass

$$\frac{\partial^s \tilde{R}^M}{\partial n^s} = G_{sM} \quad \text{in } S_T.$$

Für geeignetes gewähltes $\tilde{R}_M$ genügt dann $R_M - \tilde{R}_M$ dem Problem

$$
(10) \qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(R_M - \tilde{R}_M) + \varepsilon L_1(R_M - \tilde{R}_M) + L_o(R_M - \tilde{R}_M) = F_M^* \\
&(R_M - \tilde{R}_M)\big|_{t=o} = 0 \\
&\frac{\partial^s (R_M - \tilde{R}_M)}{\partial n^s} = 0 \text{ in } S_T \; (s = 0,\ldots,m-1),
\end{aligned}
$$

wobei $\| F_M^* \|_j \leq C\mu^{M+1-j}$.

Auf das Problem (10) wird die a priori-Abschätzung im Satz 2 angewandt. Damit genügt R_M folgenden Abschätzungen:

$$
\| R_M \| \leq \| R_M - \tilde{R}_M \| + \| \tilde{R}_M \|
$$

$$
\leq C\mu^{M+1} + C\mu^{(2m-1)[1+\frac{\ell^2}{(2m-1)(2m-1-\alpha)} - \frac{\ell+\alpha}{2m}]} [\mu^{M+1-(\ell-2m+1)} + \mu^{M+1}] +
$$

$$
+ C\mu^{(2m-1)[-\frac{1}{2}\frac{\ell}{(2m-1)(2m-1-\alpha} - \frac{1}{2\ell}]} \mu^{M+1}.
$$

$K \geq 0$ sei fest vergeben. Wählt man dann M hinreichend gross, so gilt

$$
\| R_M \| \leq C\mu^{K+1}.
$$

Dann ist aber laut Konstruktion

$$
\| R_K \| \leq \| R_M - R_K \| + \| R_M \| \leq C\mu^{K+1}
$$

also

$$
\| u - \sum_{j=0}^{K} \mu^j w_j - \mu \sum_{j=0}^{K+m-2} \mu^j {}^{+}_{j} - \sum_{j=0}^{K+m-1} \mu^j \sigma_j^- \| \leq
$$

$$
\leq C\mu^{K+1}.
$$

Bei gleicher Fehlerordnung sind einige Glieder der Entwicklung überflüssig.

Satz 3. Unter den Voraussetzungen (A),(B),(C) mit genügend grossem l existiere eine Umgebung von (0,0), in der f identisch Null ist. Dann ist für jedes $K \geq 0$

$$\| u - \sum_{j=0}^{K} \mu^j w_j - \mu \sum_{j=0}^{K-1} \mu^j \sigma_j^{+} - \sum_{j=0}^{K} \mu^j \sigma_j^{-} \| \leq$$
$$\leq C \mu^{K+1}.$$

6. <u>Der allgemeine Fall</u>

$z(x,t)$ sei eine beliebig oft differenzierbare Funktion, definiert in $x \geq 0$, $t \geq 0$,

$$z(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq \delta \text{ und } 0 \leq t \leq \delta \\ 0 & \text{für } x \geq 2\delta \text{ oder } t \geq 2\delta \\ 0 \leq z \leq 1 & \text{const}, \end{cases}$$

ferner $f_1(x,t) = (1 - z(x,t))f(x,t)$, $f_2(x,t) = z(x,t)f(x,t)$. u_1, u_2 seien die Lösungen der zugeordneten Probleme (1). Unter Berücksichtigung von Voraussetzung (C) folgt aus Satz 2

$$\| u_2 \| \leq C \varepsilon^{1 + \frac{l^2}{(2m-1)(2m-1-\alpha)} - \frac{l+\alpha}{2m}} \cdot |f_2|_{l-2m+\alpha} +$$
$$+ C \varepsilon^{-\frac{1}{2}\frac{l}{(2m-1)(2m-1-\alpha)} - \frac{1}{2l}} \delta^{1+[\frac{l}{2m}]} .$$

Setzt man

$$p = \frac{1}{3}\left\{\frac{2}{2m-1} - \frac{m}{(2m-1)(2m-1-\alpha)} - \frac{1}{4m}\right\} \quad (0 < p < \frac{1}{2m-1})$$

und

$$\delta = \varepsilon^{\frac{1}{2m-1} - p} ,$$

so ergibt sich die a priori-Abschätzung

$$\| u_2 \| \leq C \varepsilon^p .$$

Auf u_1 können die Ergebnisse vom Abschnitt 5 angewandt werden. Sei

$$u_1(x,t,\mu,\delta) = \sum_{j=0}^{M} \mu^j w_j(x,t,\delta) + \mu \sum_{j=0}^{M+m-2} \mu^i \sigma_j^+(\tau^+,t,\delta) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{M+m-1} \mu^j \sigma_j^-(\tau,t,\delta) + R_M^1,$$

die $w_j(x,t,\delta)$, $\sigma_j^+(\tau^+,t,\delta)$, $\sigma_j^-(\tau^-,t,\delta)$ seien die Lösungen von (3) bzw. (3*),(4),(6),(7) mit $f := f_1$. Mit Hilfe der expliziten Lösungsformel (9) kann man nun sukzessive die δ-Abhängigkeit der w_0, v_0^+, w_1, $v_1^+,\dots,v_{M+m-2}^+$, w_M, $v_0^-,\dots,v_{M+m-1}^-$ und damit der F_M^1, G_{SM}^1 studieren. Es ergibt sich

$$\| F_M^1 \|_j \leq C(\tfrac{\mu}{\delta})^{M+1-j} , \qquad \| G_{sM}^1 \| \leq C(\tfrac{\mu}{\delta})^{M+1} \; \delta^{-m+2}.$$

Analog wie in Abschnitt 5 erhält man

$$\| u_2 - \sum_{j=0}^{K} \mu^j w_j - \mu \sum_{j=0}^{K+m-2} \mu^j \sigma_j^+ - \sum_{j=0}^{K+m-1} \mu^j \sigma_j^- \| \leq C(\tfrac{\mu}{\delta})^{K+1},$$

wobei die u_2, w_j, v_j^+, v_j^- von δ abhängen.
Sei $K = 0$, es war $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{2m-1} - r}$. Dann folgt

$$\| u_2 - w_0 - \mu \sum_{j=0}^{m-2} \mu^j \sigma_j^+ - \sum_{j=0}^{m-1} \mu^j \sigma_j^- \| \leq C \varepsilon^p ,$$

wegen $p < \dfrac{1}{2m-1}$ kann man noch überflüssige Glieder weglassen:

$$\| u_2 - w_0 - \sigma_0^- \| \leq C \varepsilon^p .$$

Aus den expliziten Lösungsformeln (9) kann man ablesen, dass sich $w_0(x,t,\delta)$ und $w_0(x,t)$ nur um $O(\delta)$ unterscheiden, für

$v_0^-(\tau^-,t,\sigma)$ und $v_0^-(\tau^-,t)$ gilt dann das gleiche. Da $\min\left\{p, \frac{1}{2m-1} - p\right\} = p$, erhält man schliesslich

Satz 4. Unter den Voraussetzungen (A),(B),(C) gilt

$$\| u - w_0 - \sigma_0^- \| \leq C\,\varepsilon^p$$

mit

$$p = \frac{1}{3}\left\{ \frac{2}{2m-1} - \frac{m}{(2m-1)(2m-1-\alpha)} - \frac{1}{4m} \right\},$$

$w_0(x,t) + v_0^-(\tau,t)$ ist also einge gleichmässige asymptotische Approximation der Lösung $u(x,t,\varepsilon)$ des Ausgangsproblems.

Während für den Spezialfall, dass in einer Umgebung von (0,0) f identisch Null ist, nach Satz 3 gleichmässige asymptotische Approximationen beliebiger Ordnung angegeben werden konnten, ist das im allgemeinen Fall nicht ohne weiteres möglich. Satz 4 zeigt, dass insbesondere $\lim_{\varepsilon \to 0} u(x,t,\varepsilon)$ existiert und gleich $w_0(x,t) + v_0^-(\tau^-,t)$ ist. Ersetzt man Ω durch $\Omega^* = (0,1-a]$ $(a>0)$, so ist der Grenzwert von $u(x,t,\varepsilon)$ in $\overline{Q}_T^*$ gleich der Lösung des "reduzierten" Problems.

L i t e r a t u r

[1] BESJES, J.G.: Singular problems for linear parabolic differential operators of arbitrary order, J. math. anal. appl. 48(1974), 594-609.

[2] BESJES, J.G.: Singular perturbation problems for linear elliptic differential operators of arbitrary order, I, II, J. math. anal. appl. 49(1975), 24-46, 324-346.

[3] BESJES, J.G.: Singular perturbation problems for linear elliptic differential operators of arbitrary order

III, Nieuw archief v. Wisk. 25(1977), 1-39.

[4] BOBISUD, L.: Second order linear parabolic equations with a small parameter, Arch. Rat. mech. anal. 27(1968), 385-397.

[5] ECKHAUS, W.: Matched asymptotic expansions and singular perturbations, Amsterdam 1973.

Sektion Mathematik und Physik

TH Magdeburg

D D R

(Oblatum 27.9.1977)