Jacques Bair

Séparation forte k-branlante de deux convexes

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 18 (1977), No. 1, 195--203

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105763

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

18,1 (1977)

SEPARATION FORTE k-BRANLANTE DE DEUX CONVEXES

Jacques BAIR, Liège

Résumé: Nous répondons à une question posée par J.R. Reay et caractérisons la séparation forte k-branlante de deux convexes A, B, c'est-a-dire une séparation forte de A, B par k hyperplans indépendants.

Mots clefs: Ensembles convexes, séparation forte branlante.

AMS: 52A05, 52A30 Ref. Ž.: 3.918.1

---

0. Introduction. Au récent colloque d'Oberwolfach consacré aux corps convexes et à la géométrie ordonnée (mai 1976), j'ai présenté les résultats que F. Jongmans et moi avions obtenus sur la séparation forte branlante de deux ensembles convexes [3]. A l'issue de mon exposé, J.R. Reay me posa le problème suivant: ⟨⟨ dans la séparation forte branlante de deux ensembles A et B, on exige que deux hyperplans non parallèles séparent fortement A et B; ne peut-on généraliser cette notion en recherchant dans quelles conditions il existe une séparation forte k-branlante de A, B, c'est-à-dire une séparation forte de A, B par k hyperplans "indépendants" ? ⟩⟩

L'objet de cette note est de montrer que les idées exploitées dans [3] permettent d'obtenir à peu de frais des critères de séparation forte k-branlante pour deux ensembles convexes. Au surplus, la séparation forte k-branlante de deux polyèdres convexes est caractérisée.

1. __Définition__: Sauf mention explicite du contraire, les résultats seront toujours valables dans un espace vectoriel réel de dimension non nulle. Les définitions et notations de base seront celles de [1,2].

Deux ensembles A et B (toujours supposés non vides par la suite) sont fortement séparés par un hyperplan H si celui-ci est situé entre deux de ses translatés qui séparent également A et B; ils sont séparés fortement par une forme linéaire non nulle f si un hyperplan de niveau de f les sépare fortement [5; p. 249]; A et B admettent une __séparation forte__ k-__branlante__ s'il existe k hyperplans indépendants qui séparent fortement A et B; k hyperplans sont dits __indépendants__ si l'intersection de leurs sous-espaces vectoriels parallèles est de codimension k, ce qui revient à dire que les formes linéaires qui déterminent ces hyperplans sont linéairement indépendantes.

Lorsque k vaut 1 ou 2, on retrouve respectivement la séparation forte ou la séparation forte branlante de deux ensembles. Notons encore que cette notion de séparation forte k-branlante n'a de sens que dans un espace E de dimension supérieure à k - 1.

Dans l'étude initiale de la séparation branlante, il était fait appel à la notion de __cône d'obstruction__ $\Omega(A)$ d'un ensemble A: $\Omega(A)$ est, dans le dual algébrique E^* de

E, le cône pointé de toutes les formes linéaires qui admettent sur A un majorant fini [3].

2. Pour que les convexes A et B admettent une séparation forte k-branlante, il est nécessaire et suffisant que:

a) A et B admettent une séparation forte par une forme linéaire f non nulle;

b) les cônes d'obstruction de A et de -B (ou, indifféremment, de -A et de B) aient en commun k - 1 éléments qui forment avec f un ensemble de points linéairement indépendants.

Il suffit en fait de démontrer la suffisance.

Grace à la condition a), il existe un réel α tel que l'hyperplan $H = f^{-1}(\{\alpha\})$ sépare fortement a et B. Si $f_1, f_2, \dots, f_{k-1}$ sont les k - 1 éléments livrés par la condition b), le raisonnement formulé au paragraphe 1.3 de [3] garantit l'existence de réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$, strictement compris entre 0 et 1, tels que les hyperplans $H_1 = (\lambda_1 f + (1 - \lambda_1)f_1)^{-1}(\{\alpha\}), \dots, H_{k-1} = (\lambda_{k-1} f + (1 - \lambda_{k-1})f_{k-1})^{-1}(\{\alpha\})$ séparent fortement A et B. Les hyperplans $H, H_1, \dots, H_{k-1}$ sont visiblement indépendants, d'où A et B admettent une séparation forte k-branlante.

3. Cet énoncé est le pendant du résultat 2.1 de [3], duquel certains critères de séparation forte branlante avaient pu facilement être déduite. Il semble donc logique de reprendre dans le cas général la démarche effectuée pour k = 2.

Soient A et B deux cellules convexes. On sait que la séparation forte de A et B a lieu si et seulement si $0 \notin {}^{b}(A - B)$ [1;III.1.5, p. 78]. Si B est cerné (c'est-à-dire, si B admet E^* pour cône d'obstruction [3]), le cône d'obstruction de $-B$ coïncide également avec E^* ; pour remplir la condition b) de l'énoncé précédent, il suffit donc que le cône d obstruction de A contienne au moins k points linéairement indépendants c est-a-dire que la dimension de $\Omega(A)$ vaille au moins k. Cette dernière condition est équivalente au fait que la codimension du sous-espace caractéristique $\Gamma(A)$ de A soit supérieure à $k - 1$. En effet, ${}^{b}A$ est l'intersection des demi-espaces fermés qui la contiennent et qui sont associés à tous ses hyperplans d'appui [1; 1.1.7, p. 25]; il en résulte que $\Gamma(A)$ coïncide avec l'intersection des noyaux de tous les éléments non nuls de $\Omega(A)$, partant que la codimension de $\Gamma(A)$ se confond avec la dimension de $\Omega(A)$. En résumé:

3.1. <u>Un convexe d'internat non vide</u> A <u>et un convexe cerné</u> B <u>admettent une séparation forte</u> k-<u>branlante si et seulement si</u> $0 \notin {}^{b}(A - B)$ <u>et la codimension de</u> $\Gamma(A)$ <u>est supérieure à</u> $k - 1$.

3.2. <u>Corollaire</u>. Un point a et un convexe A d'internat non vide admettent une séparation forte k-branlante si et seulement si $a \notin {}^{b}A$ et la codimension de $\Gamma(A)$ est supérieure à $k - 1$.

4. Le même raisonnement peut être formulé dans un espace localement convexe en faisant appel aux hyperplans fer-

més séparant A, B et en remplaçant le dual algébrique E^* par le dual topologique E'. Des considérations semblables à celles développées dans l'article [3] et dans le paragraphe précédent livrent les énoncés suivants.

4.1. Dans un espace localement convexe, un convexe A et un convexe faiblement borné B admettent une séparation forte k-branlante par des hyperplans fermés si et seulement si O n'est pas adhérent à A - B et la codimension de $\Gamma(\bar{A})$ est supérieure à k - 1.

4.2. Dans un espace localement convexe, un convexe fermé A et un convexe faiblement compact B admettent une séparation forte k-branlante par des hyperplans fermés si et seulement si A est disjoint de B et la codimension de $\Gamma(A)$ est supérieure à k - 1.

5. Dans $\mathbb{R}^n$, soient A un convexe et B un convexe continu (c'est-à-dire dépourvu de demi-droite-frontière et de demi-droite asymptote, ce qui revient à dire que sa fonction d'appui est continue sur la sphère unitaire S [5; p. 259]). On sait que A et B peuvent être fortement séparés si et seulement si $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont disjoints [5; 2.13, p. 262]. Dans ces conditions, on peut trouver un élément f de S dans $\Omega(A) \cap \Omega(-B)$; comme B est continu, la fonction d'appui de -B reste finie dans un voisinage de f sur S, d'où f est intérieur à $\Omega(-B)$. Si, de plus, $\Omega(A)$ possède k - 1 éléments $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$ qui forment avec f un ensemble de vecteurs linéairement indépendants, ce qui a lieu si et seulement si la codimension de $\Gamma(A)$ est supérieure à k - 1, alors la con-

dition b) de l'énoncé 2 est satisfaite. En effet, comme f est intérieur à $\Omega(-B)$ et comme $\Omega(A)$ et $\Omega(-B)$ sont convexes, pour $j = 1,2,\ldots,k-1$, il existe un réel λ_j de $]0,1[$ tel que $\lambda_j f + (1-\lambda_j)f_j \in \Omega(A) \cap \Omega(-B)$; $f, \lambda_1 f + (1-\lambda_1)f_1, \ \lambda_2 f + (1-\lambda_2)f_2, \ldots, \lambda_{k-1}f + (1-\lambda_{k-1})f_{k-1}$ sont linéairement indépendants. En conclusion:

Dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq k)$, *un convexe* A *et un convexe continu* B *admettent une séparation forte* k-*branlante si et seulement si* $\bar{A}$ *et* $\bar{B}$ *sont disjoints et la codimension de* $\Gamma(A)$ *est supérieure* à $k-1$.

6. Les critères de séparation forte k-branlante obtenus jusqu'à présent font appel à des ensembles dont l'un est borné ou continu. Cela n'englobe pas le cas de deux polyèdres convexes A, B de $\mathbb{R}^n$. La séparation forte de A et B par une forme linéaire f non nulle équivaut à celle de $\{0\}$ et de $A - B$ par f [5; 2.5, p. 256], d'où la séparation forte k-branlante de A et B équivaut à celle de $\{0\}$ et $A - B$, ou encore à la double condition $0 \notin \overline{A - B}$ (c'est-à-dire $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$) et codim $\Gamma(A - B) > k - 1$ (4.2).
Or, tout polyèdre convexe est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points et de directions (ces dernières pouvant être appelées *points extrêmes à l'infini* ou *directions extrêmes* du polyèdre) [7; p. 170], étant entendu que les *directions* ou *points à l'infini* de $\mathbb{R}^n$ sont les classes d'équivalence de l'ensemble des demi-droites pointées par l'équivalence "être translaté de" [7; p. 60] et que l'*enveloppe*

convexe des points $x_1, x_2, \ldots, x_k$ et des directions des demi-droites $[0:x_{k+1})$, $[0:x_{k+2}), \ldots, [0:x_m)$ est l'ensemble des points x de la forme $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j$, où tous les coefficients λ_j sont non négatifs et tels que $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$ [7; pp. 153-154]. Ainsi, A est l'enveloppe convexe de points $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_p$ et de points à l'infini associés aux demi-droites $[o:u_1)$, $[o:u_2), \ldots, [o:u_r)$, tandis que B est l'enveloppe convexe de points $b_1, b_2, \ldots, b_q$ et de points à l'infini associés aux demi-droites $[o:v_1)$, $[o:v_2), \ldots, [o:v_s)$; A - B est alors l'enveloppe convexe des points $a_i - b_j$, et de directions des demi-droites $[o:u_1)$, $[o:u_2), \ldots, [o:u_r)$, $[o:-v_1)$, $[o:-v_2), \ldots, [o:-v_s)$. Le sous-espace caractéristique $\Gamma(A - B)$ de A - B coïncide donc avec la variété extrême V du cône polyédral $P = \sum_{j=1}^{r} [o:u_j) + \sum_{j=1}^{s} [o:-v_j)$. Mais V, qui est une facette de P, est la some d'une facette de $\sum_{j=1}^{r} [o:u_j)$ et d'une facette de $\sum_{j=1}^{s} [o:-v_j)$ [2; II.4.14] : il s'agit donc de l'enveloppe positive d'un sous-ensemble S de $T = \{u_1, u_2, \ldots, u_r, -v_1, -v_2, \ldots, -v_s\}$, et l'on peut même prendre pour S une base positive de V, étant entendu qu'un ensemble U est une base positive d'un espace E si pos U = E et si $u \notin$ pos $(U \setminus \{u\})$ pour tout point u de U [6; 2.1, p. 5]. Dans ces conditions, la codimension de $\Gamma(A - B)$ est supérieure à k - 1 si et seulement s'il n'existe aucun sous-ensemble de T qui forme une base positive d'un sous-espace vectoriel de dimension supérieure à n - k. De façon assez suggestive, on dira que les points à l'infini associés aux demi-droites $[o:z_1)$, $[o:z_2), \ldots, [o:z_t)$ sont j-positivement indépendants $(0 \leq j \leq n)$ si les points $z_1, z_2, \ldots, z_t$ forment une base positive d'un espace vectoriel de codimension j; ceci requiert évidemment que $t + j \geq n$. Moyennant cette définition, on aboutit au critère suivant:

6.1. Dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq k)$, deux polyèdres convexes admettent une séparation forte k-branlante si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

a) A et B sont disjoints;

b) parmi les directions extrêmes qui déterminent A et $-B$, il n'en existe pas qui soient j-positivement indépendants avec $j < k$.

Ce résultat devient facile à appliquer dans $\mathbb{R}^2$. En effet, deux polyèdres convexes A, B ne peuvent pas posséder des directions extrêmes a_1, a_2 et b_1 de manière que a_1, a_2 et $-b_1$ soient 0-positivement indépendants, sinon A et B se rencontreraient. Par ailleurs, si A et B admettend une séparation forte branlante, ils sont forcément dépourvus de droites. Partant, on obtient l'énoncé suivant:

6.2. Corollaire. Dans $\mathbb{R}^2$, deux polyèdres convexes A, B admettent une séparation forte branlante si et seulement s'ils sont disjoints, démunis de droites et dépourvus d'une direction extrême commune.

B i b l i o g r a p h i e

[1] BAIR J. - FOURNEAU R.: Etude géométrique des espaces vectoriels: une introduction. Lecture Notes in Math., vol. 489, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg -New York, 1975.

[2] BAIR J. - FOURNEAU R.: Etude géométrique des espaces vectoriels II: polyèdres et polytopes convexes, en préparation.

[3] BAIR J. - JONGMANS F.: De l'art d'ériger sans péril des séparations branlantes, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, 44(1975), 354-362.

[4] GALE D. - KLEE V.: Continuous convex sets, Math. Scand., 7(1959), 379-391.

[5] KLEE V.: Separation and support properties of convex sets - a survey, in Balakrishnan, Control theory and the calculus of variations, Acad. Press, New York,1969.

[6] REAY J.R.: Generalizations of a theorem of Carathéodory, Memoirs of the Am. Math. Soc., 54, 1965.

[7] ROCKAFELLAR R.T.: Convex analysis, Princeton University Press, 1970.

Université de Liège

Institut de Mathématique

15, avenue des Tilleuls

4000 Liège (Belgium)

(Oblatum 6.7. 1976)