Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Viacheslav I. Malykhin

Об одной задаче Э. Чеха

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 17 (1976), No. 4, 779--790

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105737`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

17,4 (1976)

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ Э. ЧЕХА

В.И. МАЛЫХИН, Москва

Резюме: В работе построено (при дополнительных теоретико-множественных предположениях, совместимых с системой аксиом теории множеств) счетное однородное Фреше-Урысона пространство с единственностью секвенциального предела, но в котором нет двух дизъюнктных непустых открытых подмножеств.

Ключевые слова: Единственность секвенциального предела, пространство Фреше-Урысона.

AMS : 54D10 Ref. Ž.: 3.961.1

Работа посвящена исследованию следующей проблемы, поставленной Э. Чехом (см. об этом, например, в [1]):

Существует ли топологическое T_1-пространство Фреше-Урысона с единственностью секвенциального предела, в котором никакие две точки не имеют дизъюнктных окрестностей?

Топологическое пространство, в котором никакие две точки не имеют дизъюнктных окрестностей называется антихаусдорфовым.

Ряд авторов впоследствии снова поднимали эту проблему, предпринимая ее решения и получая частичные результаты.

Так, в 1966 году С. Франклин [2] привел пример T_1-пространства Фреше-Урысона с единственностью секвенциального предела, в котором некоторые (но не все!) пары точек не имели дизъюнктных окрестностей.

Несколько позже, С. Франклин и М. Раджагопалан в совместной работе [1] сконструировали счетное однородное антихаусдорфово T_1-пространство с единственностью секвенциального предела, но не являющееся, однако, пространством Фреше-Урысона.

В настоящей работе мы доказываем, что положительный ответ на указанный выше вопрос Э. Чеха совместим с системой ZFC аксиом теории множеств.

§ 1. Напомним, что Y есть пространство Фреше-Урысона если и только если из того, что $y \in [A]$ и $A \subset Y$ следует, что к точке y из множества A сходится последовательность, а Z называется пространством с единственностью секвенциального предела, если никакая последовательность в этом пространстве не сходится сразу к двум точкам.

Известно (см. С. Хехлер [3]), что следующее предложение, обозначаемое нами через БОР, есть следствие аксиомы Мартина и, следовательно, не противоречит системе ZFC аксиом теории множеств.

БОР. Всякая максимальная система бесконечных почти дизъюнктных подмножеств на счетном бесконечном множестве имеет мощность $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Это предложение и близкие к нему были использованы Т.К. Боме и М. Розенфельдом [4], Р. Олсоном [5] и автором настоящей работы (см. [6, 8]) при построении бикомпактов Фреше-Урысона, произведение которых не есть пространство Фреше-

Урысона.

<u>Теорема 1</u> [БОР] x). Существует антихаусдорфово T_1-пространство (S,τ) Фреше-Урысона с единственностью секвенциального предела, обладающее вдобавок следующими свойствами:

1) $|S| = \mathfrak{c}$

2) всякое замкнутое множество в пространстве (S,τ) есть либо все пространство, либо бикомпакт

3) всякий бикомпакт в (S,τ) есть сумма конечного числа сходящихся последовательностей.

Построение пространства (S,τ).

Пусть S - какое-нибудь множество мощности $\mathfrak{c}$ и Σ - какая-нибудь максимальная система счетных бесконечных почти дизъюнктных подмножеств из S. Такая система, очевидно, существует.

Для всякого счетного бесконечного подмножества B из S следующим образом определим семейство

$$\Sigma(B) = \{A \in \Sigma \mid |A \cap B| = \aleph_0\}$$

Так как выполнимость предложения БОР нами предполагается, то для всякого счетного бесконечного подмножества B из S или $|\Sigma(B)| < \aleph_0$ или $|\Sigma(B)| = \mathfrak{c}$.

Пусть $\mathfrak{R} = \{B \mid B \subset S,\ |B| = \aleph_0$ и $|\Sigma(B)| = \mathfrak{c}\}$. Нетрудно видеть, что $|\mathfrak{R}| \leq \mathfrak{c}$.

Итак, семейство $\{\Sigma(B) \mid B \in \mathfrak{R}\}$ имеет мощность не

----

x) Знаком [T] сопровождаем утверждения, доказываемые в предположении выполнимости высказывания T или в модели T для системы ZFC аксиом теории множеств.

более $\mathfrak{c}$ и состоит из подмножеств мощности $\mathfrak{c}$ системы Σ, мощность которой также $\mathfrak{c}$.

Теперь нам нужна

Обобщенная лемма Куратовского. Пусть Σ - произвольное множество мощности m, где m - бесконечный кардинал; $\mathfrak{R}$ - семейство подмножеств этого множества, причем $|\mathfrak{R}| \leq m$ и для каждого A из $\mathfrak{R}$ $|A| = m$. Тогда Σ представляется в виде дизъюнктной суммы семейства $\mathcal{K}$ мощности m своих подмножеств, причем $K \cap A \neq \Lambda$ для всяких $K \in \mathcal{K}$ и $A \in \mathfrak{R}$.

Обобщенная лемма Куратовского доказывается точно также, как и соотвествующее классическое утверждение, принадлежащее К. Куратовскому [7].

Продолжим построение пространства (S, τ).

Согласно обобщенной лемме Куратовского (для $m = \mathfrak{c}$) систему Σ представим как дизъюнктную сумму семейства мощности $\mathfrak{c}$ своих подмножеств - $\Sigma = \cup\{\Sigma_s \mid s \in S\}$, таких, что $\Sigma_s \cap \Sigma(B) \neq \Lambda$ для всяких $s \in S$ и $B \in \mathfrak{R}$.

Определим теперь на множестве S топологию τ следующим образом.

Замкнутыми множествами в пространстве (S, τ) являются:

1) пустое множество, каждое одноточечное подмножество множества S и само множество S

2) множество $A' \cup \{s\}$, где $A' \subset S$ и $s \in S$ если и только если существует множество $A \in \Sigma_s$ и A' - его бесконечное подмножество

3) всевозможные конечные суммы множеств указанных в

пп. 1 и 2 типов

Очевидно, что τ - топология, причем (S,τ) - T_1 - пространство. Далее, каждое бесконечное подмножество A'' множества $A \in \Sigma_S$ представляет собой сходящуюся к точке s последовательность. Других сходящихся последовательностей в пространстве (S,τ) можно считать, нет. Так как система Σ есть система почти дизъюнктных подмножеств, то в пространстве (S,τ) секвенциальный предел единствен.

Докажем теперь, что (S,τ) - Фреше-Урысона пространство. Пусть $s \in [C]$ и $C \subset S$. Если $|C| = \aleph_0$, то или $C \in \mathfrak{R}$ или же $C \notin \mathfrak{R}$. В последнем случае $[C]$ есть, как нетрудно убедиться, счетный бикомпакт и, следовательно, из C к точке s сходится последовательност. Если же $C \in \mathfrak{R}$, то $\Sigma(C) \cap \Sigma_S \neq \Lambda$. Пусть $B \in \Sigma(C) \cap \Sigma_S$, тогда $B \cap C$ - последовательность, сходящаяся из множества C к точке s. В случае же несчетности множества C нетрудно найти во множестве C такое подмножество C', что $C' \in \mathfrak{R}$, но тогда, по только что доказанному, из C' и, значит, из C, к точке s сходится последовательность.

Остальные свойства (в том числе и антихаусдорфовость) пространства (S,τ), перечисленные в формулировке теоремы 1, очевидны.

Замечание. Если подмножество P из S таково, что $|\{A \mid A \in \Sigma, |A \cap P| = \aleph_0\}| > \aleph_0$, то P с топологией подпространства из (S,τ) само удовлетворяет формулировке теоремы 1 (за исключением, конечно, утверждения о мощности).

§ 2. Рассмотрим более подробно случай счетного множества.

Следующее предложение R_2 , как легко видеть, есть следствие предложения БОР .

R_2 . На счетном бесконечном множестве S существует такая максимальная система Σ бесконечных почти дизъюнктных подмножеств, что $|\Sigma(B)| < \aleph_0$ или $|\Sigma(B)| = \mathfrak{c}$ для любого бесконечного подмножества B из S .

(Определение операции $\Sigma(\cdots)$ см. в рассуждениях, приведенных в теореме 1.)

Это предложение (формально более слабое, чем БОР) было использовано автором настоящей работы при построении так называемых бикомпактов Франклина и бикомпактов Фреше-Урысона с определенными свойствами (см. [8]).

Теорема 1 допускает незначительное усиление.

<u>Террема 1'</u> [R_2] . Существует пространство (S,τ) удовлетворяющее формулировке теоремы 1, за исключением утверждения о мощности - пространство (S,τ) счетно.

Доказательство теоремы 1' полностью совпадает с доказательством теоремы 1.

В работе [3] С. Хехлер, исходя из произвольной счетной стандартной модели $\mathfrak{M}$ для системы ZFC аксиом теории множеств, строит такое же генерическое расширение $\mathfrak{N}$, что кардиналы и конфинальность кардиналов сохраняются и $[2^{\mathfrak{k}}]_{\mathfrak{M}} = [2^{\mathfrak{k}}]_{\mathfrak{N}}$ для любого кардинала $\mathfrak{k}$ из $\mathfrak{M}$. В этой модели $\mathfrak{N}$ выполняется следующее предложение:

Для всякого кардинала $\mathfrak{k}$ такого, что $\omega_0 < cf\mathfrak{k} \leq \mathfrak{k} \leq \mathfrak{c}$ на счетном множестве S существует максимальная система почти дизъюнктных счетных бесконечных подмножеств $- \Sigma = \{A_\alpha \mid \alpha \in \aleph\}$, обладающая свойством (v) : если $B \subseteq S$ и $|\Sigma(B)| > \aleph_0$, то существует такой ординал $\alpha(B) \in \aleph$, что $|B \cap A_\beta| = \aleph_0$ для каждого $\beta \in \aleph \setminus \alpha(B)$.

(На самом деле, в этой работе С. Хехлера не доказано существование в модели $\mathfrak{N}$ максимальных систем почти дизъюнктных бесконечных счетных подмножеств на счетном множестве, обладающих свойством (v) - это следует из дополнительного анализа модели $\mathfrak{N}$.)

Если в исходной модели $\mathfrak{M}$ континуум-гипотеза нарушалась, то она не имеет места и в полученной методом С. Хехлера модели $\mathfrak{N}$. Пусть $\mathfrak{N}'$ - какая-нибудь такая модель.

Справедлива

Теорема 2 $[\mathfrak{N}']$. Существует пространство (S,τ) удовлетворяющее формулировке теоремы 1, за исключением утверждения о мощности - пространство (S,τ) счетно; кроме того, характер в каждой точке пространства (S,τ) равен $\aleph_1$ (т.е. меньше $\mathfrak{c}$).

Построение пространства (S,τ). Пусть S - какое-нибудь счетное бесконечное множество и Σ - максимальная система почти дизъюнктных бесконечных подмножеств мощности $\aleph_1$ и обладающая свойством (v). Представим Σ в виде дизъюнктной счетной бесконечной суммы каких-нибудь своих несчетных подмножеств $- \Sigma = \dot{\bigcup}\{\Sigma_s \mid s \in S\}$. Определим далее на множестве S топологию τ точно также, как и в теореме 1. Нетрудно убедиться, что пространство (S,τ) удовлетворяет формулировке теоремы 2.

В некотором смысле значительным усилением теорем 1 и 2 является следующая

<u>Теорема 3</u> [БОР]. Существует однородное пространство (Ω, τ), удовлетворяющее формулировке теоремы 1, за исключением утверждения о мощности – пространство (Ω, τ) счетно.

Прежде чем доказывать саму теорему, приведем одну лемму, интересную и саму по себе.

Пусть $(\Omega, \cdot)$ – какая-нибудь счетная бесконечная группа. Положим, по определению, $A \cdot x \equiv \{a \cdot x \mid a \in A\}$ для любых $x \in \Omega$ и $A \subset \Omega$.

<u>Лемма</u>. На Ω существует максимальная система Σ почти диаъюнктных бесконечных подмножеств, такая, что $A \cdot x \in \Sigma$ всякий раз, когда $A \in \Sigma$ и $x \in \Omega$; кроме того, $A \cdot x \neq A$ если $A \in \Sigma$ и x не есть единица группы $(\Omega, \cdot)$.

В доказательстве этой леммы ключевым является следующее утверждение:

Пусть A и Σ – соотвественно, какие-нибудь бесконечное подмножество и система подмножеств из Ω, такие, что $|A \cap B \cdot x| < \aleph_0$ для любых $x \in \Omega$ и $B \in \Sigma$. Тогда существует бесконечное подмножество C из A такое, что $\{C \cdot x \mid x \in \Omega\}$ есть система попарно различных почти дизъюнктных подмножеств.

Докажем это утверждение.

Занумеруем элементы множества Ω натуральными числами – $\Omega = \{\sigma_m \mid m \in \omega_0\}$, причем σ_0 – единица группы $(\Omega, \cdot)$. Элемент a_0 из A выберем произвольно. Предположим, что для каждого натурального числа k, меньшего m, где $m > 0$, элемент a_k из A уже выбран, причем все эти элементы различны. Обозначим через C_i^m множество $C_0^m \cdot \sigma_i$, где $C_0^m = \{a_k \mid k < m\}$. Докажем, что существует такой элемент, обозначим его через a_m, из множества A, что $C_i^{m+1} \cap C_j^{m+1} = C_i^m \cap C_j^m$ для любых двух различных i, j меньших $(m+1)$.

Для этого достаточно выполнение условий $a_m \cdot \sigma_i \notin C_j^m$ и $a_m \cdot \sigma_j \notin C_i^m$ для всех различных i, j, меньших $(m+1)$, т.е. должно выполняться условие $a_m \notin C_p^m \cdot \sigma_q^{-1}$ для всех различных p, q, меньших $(m+1)$. Так как множество $\cup\{C_p^m \cdot \sigma_q^{-1} \mid p, q \leq m\}$ конечно, а множество A бесконечно, то элемент, обозначенный нами через a_m, существует.

Обозначим через C_i множество $C_0 \cdot \sigma_i$, где $C_0 = \{a_k \mid k \in \omega_0\}$ – последовательность элементов из множества A, выбранных по только что указанному правилу. Очевидно, что $\{C_i \mid i \in \omega_0\}$ – система попарно различных почти дизъюнктных подмножеств. Утверждение доказано.

Доказательство леммы.

Пусть Σ' – какая-нибудь система почти дизъюнктных бесконечных подмножеств на группе $(\Omega, \cdot)$ такая, что если $A \in \Sigma'$ то и $A \cdot x \in \Sigma'$ для любого $x \in \Omega$, и $A \cdot x \neq A$ если $A \in \Sigma'$ и x не есть единица группы $(\Omega, \cdot)$. Такую систему, очевидно, можно построить (см. доказательство рассуждения). Предположим, что Σ' не максимальна. Тогда существует бесконечное подмножество A из Ω, такое, что $|A \cap B| < \aleph_0$ для любого $B \in \Sigma'$. Согласно утверждению, существует бесконечное подмножество C из A, такое, что $\{C \cdot x \mid x \in \Omega\}$ – система попарно различных почти дизъюнктных подмножеств. Но тогда $\Sigma' \cup \{C \cdot x \mid x \in \Omega\}$ тоже система почти дизъюнктных подмножеств. Действительно, предположим, что $|B \cap C \cdot x_0| = \aleph_0$ для некоторых $B \in \Sigma'$ и $x_0 \in \Omega$. В таком случае $|B \cdot x_0^{-1} \cap C| = \aleph_0$. Однако это невозможно, ибо $B \cdot x_0^{-1} \in \Sigma'$, а $C \subset A$.

Итак, если Σ' не максимальна, то ее можно пополнить, причем пополненная система (оставаясь системой почти дизъюнктных подмножеств) опять таки инвариантна по правому сдвигу. Таким образом мы сможем построить максимальную систему, удовлетворяющую формулировке леммы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.

Пусть теперь $(\Omega, +)$ – какая-нибудь бесконечная счетная абелева группа и Σ -максимальная система бесконечных почти дизъюнктных подмножеств из Ω, удовлетворяющая формулировке леммы. Элементы этой системы, а также элементы семейства $\mathfrak{R}$ (определение этого семейства см. в доказательстве теоремы 1) занумеруем каким-нибудь образом ординалами, меньшими $\mathfrak{c}$. Элементы множества Ω также занумеруем натуральными числами – $\Omega = \{\sigma_m \mid m \in \omega_0\}$, причем σ_0 - единица группы $(\Omega, +)$. Опишем теперь некоторый индуктивный трансфинитный процесс. Цель этого процесса состоит в том, чтобы разбить систему Σ в дизъюнктную сумму - $\Sigma = \dot{\bigcup}\{\Sigma_\sigma \mid \sigma \in \Omega\}$, причем $\Sigma_\sigma = \Sigma_{\sigma_0} + \sigma$ (т.е. $\Sigma_\sigma = \{A + \sigma \mid A \in \Sigma_{\sigma_0}\}$ (и, кроме того, если $B \in \mathfrak{R}$ то $\Sigma(B) \cap \Sigma_\sigma \neq \Lambda$ для любого $\sigma \in \Omega$.

Первый шаг этого процесса состоит в следующем.

Пусть B_0 - элемент наименьшего номера из семейства $\mathfrak{R}$. Выберем из $\Sigma(B_0)$ элемент наименьшего номера, обозначим его через K_0. Далее, из $\Sigma(B_0) \setminus \{K_0 + \sigma \mid \sigma \in \Omega\}$ выберем опять элемент наименьшего номера, обозначим его через K_1, затем из $\Sigma(B_0) \setminus \{K_0 + \sigma \mid \sigma \in \Omega\} \setminus \{K_1 + \sigma \mid \sigma \in \Omega\}$ выберем опять элемент наименьшего номера, обозначим его через K_2 и т.д. - продолжим описанное построение по всем натуральным числам и получим последовательность $\{K_m \mid m \in \omega_0\}$ элементов из $\Sigma(B_0)$. Семейство $\{(K_m - \sigma_m) + \sigma \mid \sigma \in \Omega\}$ войдет затем составной частью во множество Σ_σ. На первом шаге мы обеспечим непустоту пересечения $\Sigma(B_0)$ и Σ_σ для каждого $\sigma \in \Omega$ и, кроме того, семейства $\{(K_m - \sigma_m) + \sigma \mid \sigma \in \Omega\}$ получаются друг из друга сдвигами.

Так как мы предполагаем предложение БОР выполненным, то $|\Sigma(B)| = \mathfrak{c}$ для всякого $B \in \mathcal{R}$. Это обстоятельство, а также то, что $cf\,\mathfrak{c} > \aleph_0$ позволяет благополучно провести описываемый трансфинитный процесс.

Определим теперь на множестве Ω топологию τ точно так же, как и в доказательстве теоремы 1. Нетрудно убедиться в том, что пространство (Ω, τ) удовлетворяет формулировке теоремы 3. Теорема 3 доказана.

Цитированная литература

[1] S.P. FRANKLIN and M. RAJAGOPALAN: Some examples in topology, Trans. Amer. Math. Soc. 155(1971). 305-314.

[2] S.P. FRANKLIN: On unique sequential limits, Nieuw Arch. Wiskunde 14(1966), 12-14.

[3] S.H. HECHLER: Short complete nested sequences in $\beta N \setminus N$ and small maximal almost-disjoint families. Gen. Top. and Appl. 2(1972),139-149.

[4] T.K. BOEHME, M. ROSENFELD: An example of two compact Hausdorff spaces whose product is not Fréchet, J. London Math. Soc. 8(1974), 339-334.

[5] R.C. OLSON: Bi-quotient maps, countable bi-sequential spaces and related topics, Gen. Top. and Appl. 4(1974), 1-28.

[6] В.И. МАЛЫХИН, Б.Э. ШАПИРОВСКИЙ: Аксиома Мартина и свойства топологических пространств, Доклады АН СССР 213(1973), 532-535.

[7] К. КУРАТОВСКИЙ: Топология, т.1. Перев. с польского, М., "Мир", 1966.

[8] В.И. МАЛЫХИН: Секвенциальные бикомпакты: π-точки и Чех-Стоуновские расширения, Вест. Москов. ун-та.Сер. математ. и мех. 30(1975), 23-29.

СССР, Москва

Московский институт управления

кафедры высшей математики

(Oblatum 6.10.1976)