Siegfried Hahn

Über die Stabilität von Lösungen nichtlinearer Operatorengleichungen in nicht notwendig lokalkonvexen topologischen Vektorräumen

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 17 (1976), No. 3, 421--440

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105707`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

17,3 (1976)

ÜBER DIE STABILITÄT VON LÖSUNGEN NICHTLINEARER OPERATORENGLEICHUNGEN IN NICHT NOTWENDIG LOKALKONVEXEN TOPOLOGISCHEN VEKTORRÄUMEN

Siegfried HAHN, Dresden

Inhalt: In der vorliegenden Arbeit wird die Stabilität von Lösungen nichtlinearer Operatorengleichungen bei "kleinen" Störungen untersucht. Durch ein sehr einfaches Beweisprinzip gelingt es, gewisse Störungssätze für allgemeine (nicht notwendig lokalkonvexe) topologische Vektorräume bereitzustellen.

Schlüsselwörter: Fixpunkte, Eigenwerte, kompakte Abbildungen, zulässige topologische Vektorräume, Homotopie.

AMS: 47H10 Ref. Ž.: 7.978

Einleitung. Bei der Untersuchung von Operatorengleichungen sind neben Aussagen über die Existenz einer Lösung auch solche über die Stabilität dieser Lösungen bei "kleinen" Störungen in den Gleichungen auftretenden Operatoren von Interesse. In diesem Zusammenhang sind für nichtlineare Probleme erst in den letzten Jahren grössere Fortschritte erreicht worden (s.z.B.[2],[14],[17],[18],[20] sowie die Literaturangaben in[19]). Naturgemäss ist es wünschenswert, zu bereits vorhandenen Existenzsätzen die zugehörigen Störungssätze aufzustellen. Wir formulieren in dieser Arbeit Störungssätze für kompakte (nicht notwendig lineare) Operatoren in allgemeinen topologischen Vektorräumen. Bei den zugehörigen Existenzsätzen handelt es sich um Fixpunktsätze, die von S. Hahn und K.F. Pötter in [6] veröffentlicht wurden, und um Eigenwertaussagen, die von M.A. Krasnoselski [11], M. Landsberg und T. Riedrich [13] sowie T. Riedrich [18] stammen. Riedrich [17],[18] bewies zu seinen Eigenwertaussagen bereits die entsprechenden Störungssätze. Jedoch liess die dabei verwendete Beweismethode nur die Formulierung der Störungssätze für vollständige metrisierbare lokalkonvexe Räume zu. Die Gültigkeit der entsprechenden Eigenwertaussagen auch in allgemeinen topologischen Vektorräumen war für den Verfasser Anlass, die Störungssätze von Riedrich auf topologische Vektorräume zu übertragen. Die dabei verwendete Beweismethode ist sehr einfach und gestattet praktisch einen elementaren Beweis ohne Hilfsmittel der Leray-Schauder-Theorie (also ohne Abbildungsgrad oder Homotopieerweiterungssätze). Ausserdem können damit auch zu Existenzsätzen, die zur bekannten Methode der monotonen Minorante gehören, gewisse Störungssätze aufgestellt werden.

1. <u>Begriffe und Bezeichnungen.</u> Alle betrachteten topologischen Räume setzen wir als separiert, die topologischen Vektrorräume als reell (und separiert) voraus. Für eine Teilmenge A eines topologischen Raumes bezeichnen die Symbole $\overline{A}$ und ∂A die Abschliessung bzw. den Rand von A. Eine Abbildung F von einem topologischen Raum X in den topologischen Raum Y heisst kompakt, wenn F stetig und die Menge $\overline{F(X)}$ eine kompakte Teilmenge von Y ist. Eine Abbildung G von einem topologischen Raum X in einen topologischen Vektorraum E heisse

finit, wenn G kompakt ist und $G(X)$ in einem endlichdimensionalen linearen Teilraum von E liegt.

Eine Teilmenge Z eines topologischen Vektorraumes E heisst zulässig, wenn für jede kompakte Teilmenge K von Z und jede Nullumgebung V aus E eine finite Abbildung $G_V: K \longrightarrow E$ existiert, so dass $x - G_V(x) \in V$ $(x \in K)$ gilt. Ist speziell $Z = E$, so wird der topologische Vektorraum E zulässig genannt (vgl. V. Klee [10], M. Landsberg u. T. Riedrich [13]). Alle lokalkonvexen Räume sind bekanntlich zulässig. Für wichtige Klassen nichtlokalkonvexer Räume ist die Zulässigkeit nachgewiesen worden, z.B. für die Räume $L^p(0,1)$ $(0<p<1)$ [15], ℓ^p $(0<p<1)$ [10], $S(0,1)$ [16]. Bisher ist noch kein topologischer Vektorraum bekannt, der nicht zulässig ist. Jede konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes ist zulässig. Es ist bisher nohh nicht geklärt, ob jede konvexe Teilmenge eines zulässigen Raumes wieder zulässig ist. Kriterien für die Zulässigkeit von Teilmengen eines allgemeinen topologischen Vektorraumes und entsprechende Beispiele werden in [13] angegeben.

Sei V eine Nullumgebung eines topologischen Vektorraumes E. Durch $m_V(x) = \inf \{\lambda > 0: \frac{1}{\lambda} x \in V\}$ $(x \in E)$ is bekanntlich das Minkowskifunktional der Nullumgebung V definiert. Ist V konvex, so ist m auf ganz E stetig. Auch in allgemeinen (nichtlokalkonvexen) topologischen Vektorräumen gibt es ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen, deren Minkowskifunktionale im ganzen Raum stetig sind. Eine Nullumgebung V eines topologischen Vektorraumes heisst einfachberandet, wenn für jedes $x \in \partial V$ und jedes $t \in (0,1)$ das Element tx zum Inneren von V gehört. Jede Nullumgebung enthält eine einfachberandete (und abgeschlossene) Nullumgebung und das Minkowskifunktional einer solchen Nullumgebung ist im ganzen Raum stetig (vgl.[9], dort "schrinkable neighborhood"). Eine Nullumgebung V eines topologischen Vektorraumes heisst sternförmig, wenn mit $x \in V$ und $t \in [0,1]$ auch tx zu V gehört. Sie heisst symmetrisch, wenn mit x auch (- x) ein Element von V ist. Eine nichtleere, konvexe, abgeschlossene Teilmenge K eines Vektorraumes heisst Kegel, wenn $K \neq \{0\}$ ist und mit $x \in K$ auch $tx \in$ $\in K$ $(t \geq 0)$, nicht aber $(-x) \in K$ gilt, sofern $x \neq 0$ ist.

2. <u>Hilfsmittel.</u> Wir formulieren nun drei Aussagen, die das einzige Hilfsmittel für den Beweis unserer Störungssätze darstellen. Besondere Bedeutung besitzt dabei der folgende

<u>Hilfssatz 1.</u> Es seien E ein topologischer Vektorraum, A und B zwei Teilmengen von E mit $A \subset B$, $A = \bar{A}$ und $o \notin A$ sowie $F:$ $: B \rightarrow E$ eine kompakte Abbildung. Weiter sei Λ eine abgeschlossene Menge von reellen Zahlen mit $0 \notin \Lambda$. Dann ist die Menge

$$M = \{z \in E \mid z = \lambda x - Fx,\ x \in A,\ \lambda \in \Lambda\}$$

abgeschlossen.

<u>Beweis.</u> Sei $z \in \bar{M}$. Dann existieren Netze $(x_j)_{j \in J, <<}$ mit $x_j \in A$ $(j \in J)$, $(\lambda_j)_{j \in J, <<}$ mit $\lambda_j \in \Lambda$ $(j \in J)$, so dass die Konvergenz $z_j = \lambda_j x_j - Fx_j \rightarrow z$ gilt. Weil die Menge F(A) relativ kompakt ist, existiert ein $y \in E$, so dass o. B. d. A. (s.z. B. J.L. Kelley [8]) $Fx_j \rightarrow y$ und damit $\lambda_j x_j \rightarrow z + y$ gilt. Weil o kein Berührungspunkt von A ist, existiert eine abgeschlossene, einfachberandete Nullumgebung V aus E mit

$V \cap A = \emptyset$. Sei m das Minkowskifunktional von V. Für alle $x \in A$ gilt $m(x) > 1$. Aus der Stetigkeit von m folgt $m(\lambda_j x_j) = \lambda_j m(x_j) \longrightarrow m(z + y)$. Deshalb existiert eine Konstante C mit $|\lambda_j m(x_j)| = |\lambda_j| \cdot m(x_j) \leq C$. Dann gilt auch $|\lambda_j| \leq C$ $(j \in J)$, denn x_j $(j \in J)$ gehört zu A. Für ein $\lambda \in \Lambda$ gilt somit o. B. d. A. die Konvergenz $\lambda_j \longrightarrow \lambda$, woraus $x_j \longrightarrow \frac{z + y}{\lambda} \in \bar{A} = A$ folgt. Die Stetigkeit von F bewirkt die Relation $Fx_j \longrightarrow F(\frac{z + y}{\lambda})$. Dann ergibt sich $y = F(\frac{z + y}{\lambda})$ und nach Umformung $z = \lambda \left[\frac{z + y}{\lambda}\right] - F(\frac{z + y}{\lambda})$. Also gehört z zu M, und Hilfssatz 1 ist bewiesen.

Hilfssatz 2. Es seien E ein lokalbeschränkter topologischer Vektorraum, W eine abgeschlossene und beschränkte Nullumgebung aus E, y ein Element von E sowie $F: \overline{E \setminus W} \longrightarrow E$ eine kompakte Abbildung. Dann ist die Menge

$$M = \{z \in E \mid z = x - Fx - ty,\ x \in \partial W,\ t \geq 0\}$$

abgeschlossen.

Beweis. Sei $u \in \bar{M}$. Da jeder lokalbeschränkte topologische Vektorraum metrisierbar ist, existiert eine Folge $u_n \in N$ $(n = 1,2,\dots)$ mit $u_n \longrightarrow u$. Somit gibt es Folgen (x_n), (t_n) mit $x_n \in \partial W$, $t_n \geqq 0$ $(n = 1,2,\dots)$ und $u_n = x_n - Fx_n - t_n y \longrightarrow u$. Weil F kompakt ist, existiert ein $w \in E$, so dass o. B. d. A. $Fx_n \longrightarrow w$ gilt. Die Mengen $\{x_n, n \in N\}$, $\{Fx_n, n \in N\}$, $\{u_n, n \in N\}$ sind beschränkt. Dann ist auch die Zahlenfolge (t_n) beschränkt. Somit existiert ein $t \geqq 0$, so dass o. B. d. A. die Konvergenz $t_n \longrightarrow t$ gilt. Damit ergibt sich $x_n \longrightarrow (u + w + ty) \in \partial W$ und $Fx_n \longrightarrow F(u + w + ty) = w$. Daraus folgt die zu beweisende Beziehung

$u = [(u + w + ty) - F(u + w + ty) - ty] \in M.$

Bereits bekannt ist folgendes Ergebnis (vgl. z.B. [10]):

Hilfssatz 3. Es seien E ein topologischer Vektorraum, A eine abgeschlossene Teilmenge von E, a und b zwei reelle Zahlen mit $a \leqq b$ sowie $F: A \times [a,b] \longrightarrow E$ eine kompakte Abbildung. Dann ist die Menge

$$M = \{z \in E \mid z = x - F(x,t),\ x \in A,\ t \in [a,b]\}$$

abgeschlossen.

3. Störungssätze zu Fixpunktaussagen. In [6] wurde folgender Existenzsatz bewiesen.

Existenzsatz 1. Es seien E ein topologischer Vektorraum, W eine abgeschlossene Nullumgebung, K eine abgeschlossene, konvexe, zulässige Teilmenge von E mit $o \in K$ sowie $F: W \cap K \longrightarrow E$ eine kompakte Abbildung mit $F(W \cap K) \subset K$. Für alle $x \in \partial W \cap K$ folge aus $Fx = \alpha x$ stets $\alpha \leqq 1$. Dann hat F einen Fixpunkt. In sehr einfacher Weise beweisen wir nun einen zugehörigen Störungssatz. Das Beweisprinzip verwendet lediglich die durch die Hilfssätze ausgenutzte Struktur der kompakten Abbildungen und den zugehörigen Existenzsatz.

Störungssatz 1. Es seien die Voraussetzungen des Existenzsatzes 1 erfüllt. L sei die Menge aller Fixpunkte von F und es gelte $L \cap (\partial W \cap K) = \emptyset$. Dann existiert zu jeder Nullumgebung U aus E eine Nullumgebung V aus E derart, dass jede kompakte Abbildung $\tilde{F}: W \cap K \longrightarrow E$ mit $\tilde{F}(W \cap K) \subset K$ und $Fx - \tilde{F}x \in V$ $(x \in W \cap K)$ einen Fixpunkt x_1 mit $x_1 \in U + L$ besitzt.

Beweis. Sei $U_0 \subset U$ eine offene Nullumgebung. Weil die kompakte Abbildung F auf der abgeschlossenen Menge $A = (W \cap K) \setminus (U_0 + L)$ keinen Fixpunkt besitzt, existiert nach Hilfssatz 3 eine Nullumgebung V_1 mit $Fx - x \notin V_1$ $(x \in A)$. Aus $Fx - \beta x \neq o$ $(x \in \partial W \cap K,\ \beta \geqq 1)$ folgt mit Hilfssatz 1 $(\Lambda = [1,\infty))$ die Existenz einer Nullumgebung V_2 derart, dass $Fx - \beta x \notin V_2$ für alle $x \in \partial W \cap K$ und alle $\beta \geqq 1$ gilt. Sei nun $V = V_1 \cap V_2$ und $\tilde{F}: \partial W \cap K \longrightarrow E$ eine beliebige kompakte Abbildung mit $\tilde{F}(\partial W \cap K) \subset K$ und $Fx - \tilde{F}x \in V$. Dann gilt für alle $x \in \partial W \cap K$ mit $Fx = \alpha x$ stets $\alpha < 1$. Sonst gäbe es nämlich ein $\beta_0 \geqq 1$ und ein $x_0 \in \partial W \cap K$ mit $\tilde{F}x_0 = \beta_0 x_0$. Daher wäre die Beziehung $Fx_0 - \beta_0 x_0 = Fx_0 - \tilde{F}x_0 \in V \subset V_2$ im Widerspruch zu $Fx - \beta x \notin V_2$ $(x \in \partial W \cap K,\ \beta \geqq 1)$ gültig. Nach Existenzsatz 1 hat die Abbildung $\tilde{F}$ einen Fixpunkt $\tilde{x}_0$. Wäre $x_0 \notin U_0 + L$, so stünde die Relation $F\tilde{x}_0 - \tilde{x}_0 = F\tilde{x}_0 - \tilde{F}x_0 \in V \subset V_1$ im Widerspruch zu $Fx - x \notin V_1$ $(x \in A)$. Somit gilt $\tilde{x}_0 \in (U_0 + L) \subset (U + L)$, und unser Beweis ist vollständig geführt.

Setzen wir im Existenzsatz 1 speziell $K = E$, so erhalten wir eine Fixpunktaussage, die erstmalig in [5] bewiesen wurde. Sie enthält als Spezialfall viele bekannte Fixpunktsätze, z.B. von J. Schauder [22], E. Rothe [21], M. Altman [1], V. Klee [10], M. Landsberg [12] (vgl. dazu [5],[6]). Durch den Störungssatz 1 ist damit auch die Stabilität der Fixpunkte (im obigen Sinne) solcher Operatoren gezeigt, die den Voraussetzungen der genannten Fixpunktsätze genügen.

Existenzsatz 2 (Hauptsatz 3 aus [6]). Es seien E ein zulässiger, lokalbeschränkter topologischer Vektorraum, W eine abgeschlossene, beschränkte Nullumgebung aus E, $F: \overline{E \setminus W} \longrightarrow E$

eine kompakte Abbildung und y ein Element aus E. Es gelte $x - Fx \neq ty$ ($x \in \partial W$, $t \geqq 0$). Dann hat F einen Fixpunkt.

Störungssatz 2. Es seien die Voraussetzungen des Existenzsatzes 2 erfüllt. L bezeichne die Fixpunktmenge von F. Dann existiert zu jeder Nullumgebung U aus E eine Nullumgebung V aus E derart, dass jede kompakte Abbildung $\tilde{F}: \overline{E \setminus W} \longrightarrow E$ mit $Fx - \tilde{F}x \in V$ ($x \in \overline{E \setminus W}$) einen Fixpunkt $\tilde{x}_0$ besitzt, für den die Beziehung $\tilde{x}_0 \in U + L$ gilt.

Auf den Beweis dieser Aussage verzichten wir, da er unter Verwendung von Hilfssatz 2 entsprechend dem vorigen Beweis verläuft.

Aufgrund der Eigenschaften der kompakten Abbildungen in zulässigen topologischen Vektorräumen ist die Möglichkeit gegeben, finite Abbildungen als Resultat "beliebig kleiner" Störungen der gegebenen Abbildung zu erhalten. Dies ist, insbesondere für numerische Zwecke, von besonderem Interesse. Konkretere Untersuchungen in diesem Zusammenhang für allgemeine topologische Vektorräume wurden vom Verfasser in [3] vorgenommen, die sich auf den in [7] eingeführten Abbildungsgrad in allgemeinen topologischen Vektorräumen stützen.

4. Störungssätze für Eigenwertprobleme.

In [18] bzw. [13] bewiesen Riedrich bzw. Landsberg und Riedrich folgende Aussagen.

Existenzsatz 3 (s. [18]). Es seien E ein vollständiger metrisierbarer lokalkonvexer Raum, W eine abgeschlossene Nullumgebung aus E und $F: \partial W \longrightarrow E$ eine kompakte Abbildung. Es existiere ein $y \in E \setminus W$ derart, dass kein Element $x \in \partial W$ auf der Verbindungsstrecke von y und Fx liegt. Dann existiert ein

$x_0 \in \partial W$ und ein $\lambda_0 > 1$ mit $Fx_0 = \lambda_0 x_0$.

Existenzsatz 4 (s.[13]). Es seien E ein topologischer Vektorraum, K ein abgeschlossener und zulässiger Kegel in E und W eine abgeschlossene Nullumgebung aus E mit beschränktem $W \cap K$. Ist $G = \partial W \cap K$ und $F: G \longrightarrow E$ eine kompakte Abbildung mit $F(G) \subset K$ und $o \notin \overline{F(G)}$, so existiert ein $x_0 \in G$ und ein $\lambda_0 > 0$ mit $Fx_0 = \lambda_0 x_0$.

Existenzsatz 5 (s.[13]). Die Aussage von Existenzsatz 4 bleibt erhalten, wenn man in den Voraussetzungen dieses Satzes die Forderung der Beschränktheit von $W \cap K$ durch die der radialen Beschränktheit abschwächt und für W zusätzlich die Sternförmigkeit verlangt. (Eine Teilmenge A eines Vektorraumes E heisst radial beschränkt, wenn der Durchschnitt von A mit jeder Geraden durch $o \in E$ in einer Strecke enthalten ist.) Riedrich [17],[18] formulierte entsprechende Störungsaussagen für vollständige metrisierbare lokalkonvexe Räume (F-Räume). Existenzsatz 3 lässt sich durch Anwendung eines vom Verfasser in [4] vorgestellten Homotopieerweiterungssatzes, der in allgemeinen topologischen Vektorräumen gültig ist, auf zulässige topologische Vektorräume übertragen. Diese Tatsache und die Gültigkeit der Existenzsätze 4 und 5 in allgemeinen topologischen Vektorräumen veranlasst uns, die entsprechenden Störungsaussagen ebenfalls für allgemeine topologische Vektorräume bereitzustellen.

Wir geben nun einen Störungssatz an, der das Hauptergebnis dieser Arbeit darstellt. Aus ihm lassen sich relativ einfach die zu den Existenzsätzen 3 - 5 gehörigen Störungssätze ableiten.

Theorem. Es seien E ein topologischer Vektorraum und G eine abgeschlossene Teilmenge von E mit $o \notin G$. Weiterhin sei $F: G \to E$ eine kompakte Abbildung von G in E. Die Gleichung $Fx = \lambda x$ ($x \in G$, λ reell) besitze genau eine Lösung (x_0, λ_0), und es gelte $\lambda_0 \neq 0$. Es sei $\sigma > 0$ eine Zahl mit $|\lambda_0| > \sigma$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jeder Nullumgebung U aus E eine Nullumgebung V aus E derart, dass für jede Abbildung $\tilde{F}: G \to E$ mit $Fx - \tilde{F}x \in V$ ($x \in G$) aus dem Bestehen der Gleichung $\tilde{F}\tilde{x} = \tilde{\lambda}\tilde{x}$ für ein $\tilde{x} \in G$ und ein reelles $\tilde{\lambda}$ mit $|\tilde{\lambda}| > \sigma$ die Relationen

$$(x_0 - \tilde{x}) \in U \quad \text{und} \quad |\lambda_0 - \tilde{\lambda}| < \varepsilon$$

folgen.

Beweis. Es sei $U_0 \subset U$ eine offene symmetrische Nullumgebung aus E und ε_0 eine reelle Zahl mit $0 < \varepsilon_0 < \min(\varepsilon, |\lambda_0| - \sigma)$. Die Menge $A = G \setminus (U_0 + x_0)$ ist abgeschlossen und enthält das Nullelement nicht. Wegen der Unität von (x_0, λ_0) gilt $Fx \neq \lambda x$ ($x \in A$, $|\lambda| \geqq \sigma$). Nach Hilfssatz 1 ist die Menge $M = \{z \in E \mid z = \lambda x - Fx,\ x \in A,\ \lambda \in \Lambda\}$ ($\Lambda = (-\infty, -\sigma] \cup [\sigma, +\infty)$) abgeschlossen. Da o nicht zu M gehört, existiert eine Nullumgebung $\tilde{V}$ derart, dass

$$(1) \qquad \lambda x - Fx \notin \tilde{V} \quad (x \in A,\ |\lambda| \geqq \sigma)$$

gilt.

Ferner muss für alle $x \in G$ und alle reellen λ mit $|\lambda| \geqq \sigma$ und $|\lambda - \lambda_0| \geqq \varepsilon_0$ stets $\lambda x \neq Fx$ gelten. Die Menge

$$N = \{z \in E \mid z = \lambda x - Fx,\ x \in G,\ |\lambda| \geqq \sigma,\ |\lambda - \lambda_0| \geqq \varepsilon_0\}$$

ist nach Hilfssatz 1 ebenfalls abgeschlossen. Daher existiert eine Nullumgebung $V \subset \tilde{V}$ mit

(2) $\lambda x - Fx \notin V \quad (x \in G, \ |\lambda| \geqq \sigma, \ |\lambda - \lambda_0| \geqq \varepsilon_0)$.

Sei nun $\tilde{F}: G \longrightarrow E$ eine kompakte Abbildung mit $Fx - \tilde{F}x \in V$ $(x \in G)$, für die die Gleichung $\tilde{F}x = \lambda x$ durch ein $\tilde{\lambda}$ mit $|\tilde{\lambda}| \geqq \sigma$ und ein $\tilde{x} \in G$ lösbar ist. Dann gilt

$$(*) \qquad F\tilde{x} - \tilde{\lambda}\tilde{x} = F\tilde{x} - \tilde{F}\tilde{x} \in V.$$

Nun erkennt man leicht die Beziehungen $(x_0 - \tilde{x}) \in U_0 \subset U$ und $|\lambda_0 - \tilde{\lambda}| \leqq \varepsilon_0 < \varepsilon$. Wäre nämlich $(x_0 - \tilde{x}) \notin U_0$, so müsste $\tilde{x}$ zu $G \setminus (U_0 + x_0) = A$ gehören. Dann ist die Beziehung (1) erfüllt. Dies widerspricht wegen $V \subset \tilde{V}$ der Beziehung $(*)$. Ebenso liefert die Annahme $|\lambda_0 - \tilde{\lambda}| \geqq \varepsilon_0$ die zu $(*)$ widersprechende Relation (2), womit das Theorem vollständig bewiesen ist. Wir formulieren und beweisen nun die zu den angegebenen Existenzsätzen gehörigen Störungssätze.

<u>Störungssatz 3</u>. Es seien die Voraussetzungen des Existenzsatzes 3 erfüllt (E kann dabei als zulässiger, nicht notwendig lokalkonvexer vollständiger metrisierbarer, topologischer Vektorraum angesehen werden). Es sei (x_0, λ_0) mit $x_0 \in \partial W$, $\lambda_0 > 1$ die einzige Lösung der Gleichung $Fx = \lambda x$ $(x \in \partial W, \ \lambda > 1)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jeder Nullumgebung U aus E eine Nullumgebung V aus E derart, dass jede kompakte Abbildung $\tilde{F}: \partial W \longrightarrow E$ mit $Fx - \tilde{F}x \in V$ $(x \in \partial W)$ einen Eigenvektor $\tilde{x}_0 \in \partial U$ mit einem Eigenwert $\tilde{\lambda}_0 > 1$ besitzt, für die die Beziehungen

$$(x_0 - \tilde{x}) \in U, \ |\lambda_0 - \tilde{\lambda}_0| < \varepsilon$$

gelten.

<u>Beweis.</u> Das vorhergehende Theorem liefert die Existenz einer Nullumgebung V_o derart, dass für jede kompakte Abbildung $\tilde{F}: \partial W \longrightarrow E$ mit $Fx - \tilde{F}x \in V_o$ $(x \in \partial W)$ aus $\tilde{F}\tilde{x} = \tilde{\lambda}\tilde{x}$ für ein $\tilde{\lambda} > 1$, $\tilde{x} \in \partial W$ die Beziehungen $(x_o - \tilde{x}) \in U$ und $|\lambda_o - \tilde{\lambda}_o| < \varepsilon$ folgen. Wir zeigen nun, dass V_o so gewählt werden kann, dass auf $\tilde{F}$ Existenzsatz 3 anwendbar ist. Sei dazu die Abbildung $H: \partial W \times [0,1] \longrightarrow E$ durch die Vorschrift $H(x,t) = t\,Fx + (1-t)\,y$ $(x \in \partial W,\ t \in [0,1])$ erklärt. Weil H kompakt ist, muss nach Hilfssatz 3 die Menge $X = \{z \in E \mid z = x - H(x,t),\ x \in \partial W,\ t \in [0,1]\}$ abgeschlossen sein. Nach Voraussetzung gilt $o \notin X$. Deshalb finden wir eine sternförmige symmetrische Nullumgebung $V \subset V_o$ aus E, so dass $x - t\,Fx - (1-t)\,y \notin V$ für jedes $x \in \partial W$, $t \in [0,1]$ gilt. Es erfüllt jede kompakte Abbildung $\tilde{F}: \partial W \longrightarrow E$ mit $Fx - \tilde{F}x \in V$ $(x \in \partial W)$ die Voraussetzungen von Existenzsatz 3. Sonst gäbe es nämlich ein $x_o \in \partial W$ und ein $t_o \in [0,1]$ mit $x_o = t_o\tilde{F}_o x_o + (1-t_o)\,y$. Dann würde die Relation

$$x_o - t_o F\,x_o - (1-t_o)\,y = t_o(\tilde{F}\,x_o - F\,x_o) \in t_o\,V \subset V$$

folgen, was ein Widerspruch zur Wahl von V wäre. Somit ist für jede kompakte Abbildung $\tilde{F}: \partial W \longrightarrow E$ mit $Fx - \tilde{F}x \in V$ $(x \in \partial W)$ die Gleichung $\tilde{F}x = \lambda x$ für ein $\tilde{\lambda} > 1$ und ein $\tilde{x} \in \partial W$ lösbar. Wegen $V \subset V_o$ folgt die Behauptung unseres Satzes aus dem Theorem.

<u>Störungssatz 4.</u> Es seien die Voraussetzungen des Existenzsatzes 4 erfüllt. Es sei (x_o, λ_o) mit $x_o \in G$, $\lambda_o > 0$ die einzige Lösung von $Fx = \lambda x$ $(x \in G,\ \lambda > 0)$. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ und jede Nullumgebung U aus E eine Nullum-

gebung V aus E derart, dass jede kompakte Abbildung $\widetilde{F}$: $: G \to E$ mit $\widetilde{F}(G) \subset K$ und $Fx - \widetilde{F}x \in V$ $(x \in G)$ einen Eigenwert $\widetilde{\lambda} > 0$ mit einem Eigenvektor $\widetilde{x} \in G$ besitzt, für die die Beziehungen

$$|\lambda_0 - \lambda| < \epsilon \quad \text{und} \quad (\widetilde{x} - x_0) \in V$$

gelten.

Beweis. Wir zeigen die Existenz einer Nullumgebung V derart, dass eine positive Zahl σ zu finden ist, so dass für jede kompakte Abbildung $\widetilde{F}: G \to E$ mit $Fx - \widetilde{F}x \in V$ $(x \in G)$ und $F(G) \subset K$ die Voraussetzungen des Existenzsatzes 4 erfüllt sind und für den damit existierenden positiven Eigenwert $\widetilde{\lambda}$ stets die Abschätzung $\widetilde{\lambda} > \sigma$ gültig ist. Speziell gilt dann auch $\lambda_0 > \sigma$, und wir können aus unserem Theorem die Behauptung dieses Störungssatzes folgern.
Wegen $o \notin \overline{F(G)}$ existiert eine Nullumgebung V_1 mit $V_1 \cap \overline{F(G)} = \emptyset$. Ferner gibt es symmetrische Nullumgebungen V_2 und V_3 mit $V_2 + V_2 \subset V_1$ und $V_3 + V_3 \subset V_2$. Dann gilt für jede kompakte Abbildung $F': G \to E$ mit $Fx - F'x \in V_2$ $(x \in G)$ stets $V_3 \cap \overline{F'(G)} = \emptyset$. Wäre das nämlich nicht der Fall, so würde ein Netz $(x_j)_{j \in J, <<}$ mit $x_j \in G$ und $F'x_j \to z$ für ein $z \in V_3$ existieren. Dann gäbe es ein $j_0 \in J$, so dass $F'x_j \in z + V_3$ für alle $j >> j_0$ gilt. Daraus erhielten wir
$Fx_j = (Fx_j - F'x_j) + F'x_k \in [V_2 + (V_3 + z)] \subset (V_2 + V_3 + V_3) \subset V_1$ $(j >> j_0)$ im Widerspruch zu $V_1 \cap F(G) = \emptyset$. Sei nun F': $: F \to E$ eine kompakte Abbildung mit $F'(G) \subset K$ und $Fx - F'x \in V_2$ $(x \in G)$. Dann gilt $o \notin \overline{F'(G)}$, und nach Existenzsatz 4 existiert ein $x' \in G$ und ein $\lambda' > 0$ mit $F'x' = \lambda' x'$. Sei

m das Minkowskifunktional von V_3. Weil G beschränkt ist, existiert eine Konstante $k>0$, so dass $m(x)< k$ $(x\in G)$ gilt. Ferner folgt aus $F'x\notin V_3$ $(x\in G)$ stets $m(F'x)\geqq 1$. Deshalb ergibt sich $m(F'x') = m(\lambda' x') = \lambda' m(x') < \lambda' k$, also $\lambda' > \frac{m(F'x')}{k} \geqq \frac{1}{k} = \sigma > 0$. Nun finden wir nach unserem Theorem eine Nullumgebung V derart, dass für jede kompakte Abbildung $\widetilde{F}: G \longrightarrow E$ mit $\widetilde{F}(G)\subset K$ und $Fx - \widetilde{F}x\in V$ $(x\in G)$ aus $\widetilde{F}\widetilde{x} = \widetilde{\lambda}\,\widetilde{x}$ für ein $\widetilde{x}\in G$ und ein $\widetilde{\lambda} > \sigma$ die Relationen $(x_0 - \widetilde{x})\in U$ und $|\lambda_0 - \widetilde{\lambda}| < \varepsilon$ folgen, falls $\lambda_0 > \sigma$ ist. Weil wir o. B. d. A. $V\subset V_2$ wählen können, ist damit alles bewiesen.

Störungssatz 5. Die Aussage von Störungssatz 4 bleibt erhalten, wenn wir für $W\cap K$ statt der Beschränktheit nur die radiale Beschränktheit und für W zusätzlich die Sternförmigkeit fordern.

Beweis. Wie im vorigen Beweis zeigt man die Existenz einer Nullumgebung V_2, so dass es für jede kompakte Abbildung $F': G\longrightarrow E$ mit $F'(G)\subset K$ und $F'x - Fx\in V_2$ $(x\in G)$ ein $x'\in G$ und ein $\lambda' > 0$ mit $F'x' = \lambda' x'$ gibt. Weil G hier nicht notwendig beschränkt ist, muss die Existenz einer positiven Zahl σ, für die $\lambda' > \sigma$ gilt (für einen Eigenwert, der zu einer beliebigen Abbildung $F': G\longrightarrow E$ mit $Fx - F'x\in V_2$ $(x\in G)$ gehört), anders gezeigt werden. Sei m das Minkowskifunktional von W. W ist sternförmig und damit m halbstetig nach unten (s.[9]). Deshalb nimmt m auf der kompakten Menge $\overline{F(G)}$ sein Minimum an. Da $m(x) = 0$ $(x\in K)$ genau dann gilt, wenn $x = 0$ ist, muss für alle $z\in\overline{F(G)}$ stets

$m(z) > 0$ sein. Somit existiert ein $\alpha \in (0,1)$ mit $m(z) \geqq \alpha$ $(z \in \overline{F(G)})$. Weil W abgeschlossen und sternförmig ist, muss $W = \{x \in E \mid m(x) \leqq 1\}$ gelten (s.[9]). Deshalb ist die Menge $\Omega = \{x \in E \mid m(x) > \frac{\alpha}{2}\} = E \setminus \{x \in E \mid m(x) \leqq \frac{\alpha}{2}\} = E \setminus (\frac{\alpha}{2} W)$ offen. Wegen $F(G) \subset \Omega$ existiert zu jedem $z \in \overline{F(G)}$ eine offene Nullumgebung V_z mit $z + V_z + V_z \subset \Omega$. Infolge der Kompaktheit von $\overline{F(G)}$ existieren Elemente $z_1, \ldots, z_n$ mit $F(G) \subset$ $\subset \bigcup_{\mu=1}^{n} (z_\mu + V_{z_\mu}) \subset \Omega$. Sei $V_3 \subset V_2 \cap [\bigcap_{\mu=1}^{n} V_{z_\mu}]$ eine symmetrische Nullumgebung und $F: G \longrightarrow E$ eine kompakte Abbildung mit $F'(G) \subset K$ und $Fx - F'x \in V_3$ $(x \in G)$. Dann gilt $F'(G) \subset$ $\subset \Omega$. Sei nämlich $x \in G$. Es gibt ein $x' \in V_3$ mit $F'x = Fx +$ $+ x'$ und damit ein $\mu \in \{1, \ldots, n\}$ mit $F'x \in z_\mu + V_{z_\mu} + V_{z_\mu}$. Dies führt zur Relation $F'x \in \Omega$. Wegen $Fx - F'x \in V_3 \subset V_2$ $(x \in G)$ existiert ein $\lambda' > 0$ und ein $x' \in G$ mit $F'x' = \lambda' x'$. Daraus folgt $m(F'x) = m(\lambda' x') = \lambda' m(x')$ und $\lambda' =$ $= \frac{m(F'x')}{m(x')} > \frac{\alpha}{2}$, weil $F'x' \in \Omega$ und (wegen $G \subset W$) $m(x') \leqq 1$ gilt. Also ist für jeden Eigenwert λ' einer Abbildung F': $: G \longrightarrow E$ mit $Fx - F'x \in V_3$ $(x \in G)$ (speziell für λ_0) die Abschätzung $\lambda' > \frac{\alpha}{2} = \sigma > 0$ gültig. Die Behauptung von Störungssatz 5 ergibt sich nun ebenso wie im vorigen Beweis aus dem Theorem, denn wir wählen o. B. d. A. V so, dass $V \subset V_3$ gilt.

Die Störungssätze 3 - 5 konnten also mit Hilfssatz 1 und unter Verwendung der dazugehörigen Existenzsätze ohne die relativ komplizierten Homotopiebetrachtungen aus [17],[18],[19] bewiesen werden. Gerade dies ermöglichte uns die Ubertragung der Störungssätze von Fréchet-Räumen (F-Räumen) auf allgemeine topologische Vektorräumen. Wie inzwischen von T. Riedrich mitgeteilt wurde, lässt die Anwendung der Homotopiemethode eine Verallgemeinerung der Störungssätze 3 - 5 in F-Räumen zu. Die "Nähe" der Abbildungen F und $\tilde{F}$ muss dann nicht mehr global (auf ganz G) gefordert werden, sondern nur lokal, nämlich in $U + x_o$.

Dass die hier vorgestellte Methode nicht nur in allgemeinen topologischen Vektorräumen nützlich ist, sondern auch in normierten Räumen, zeigt unser letzter Störungssatz. Für die bekannte Methode der monotonen Minorante von M.A. Krasnoselski und gewissen Verallgemeinerungen (E. Zeidler [23]) liess sich bisher mittels Homotopiebetrachtungen kein Störungssatz beweisen. Wir zitieren zunächst die entsprechende Existenzaussage [23].

<u>Existenzsatz 6.</u> Es sei B ein durch den Kegel K halbgeordneter Banach-Raum und $G = K \cap \{x \in B: \| x \| = r\}$. Weiter sei $F: G \longrightarrow B$ eine kompakte Abbildung. Auf G existiere für F eine Minorante T, d.h., es ist $Fx \geqq Tx$ $(x \in G)$. T habe folgende Eigenschaften:

1. T ist auf K erklärt.

2. Es existiert ein festes Element $x_o > o$, und es gibt Zahlen $s \in (0,1]$ und $\gamma_o(r) > 0$ mit

$$Tx \geqq [\alpha(x)]^s \gamma_o(r)\, x_o \quad (x \in G).$$

Dabei ist $\alpha(x) = \sup \{\alpha : \alpha \geqq 0,\ x \geqq \alpha x_o$. Dann existiert ein $\lambda_o > 0$ und ein $y_o \in \partial G$ mit $Fx_o = \lambda_o y_o$. (Die Voraussetzungen des Satzes sind z.B. erfüllt, wenn T eine positive, monotone Minorante darstellt, die homogen vom Grade s ist und einen Eigenvektor $x_0 > o$ besitzt.)

Für diesen Satz, der interessante physikalische Anwendungen hat ([24]), wäre ein Störungssatz für numerische ~~An~~ Anwendungen von Interesse.

Im Beweis von Existenzsatz 6 (vgl.[23]) wird eine Folge von Hilfsoperatoren F_n durch $F_n x = Fx + \frac{x_0}{n}$, $n = 1,2,\ldots$, erklärt. Alle diese Operatoren haben eine Eigenlösung (x_n, λ_n) mit $x_n \in G$, $\lambda_n > 0$. Die gesuchte Eigenlösung von F erhält man dann als Grenzwert einer Teilfolge von (x_n) bzw. (λ_n). Natürlich wird diese Teilfolge i.a. unbekannt sein, so dass eine (näherungsweise) Berechnung der Eigenlösungen (y_0, λ_0) von F auf diesem Wege nicht zum Ziel führen wird. Mit unserem Theorem lässt sich jedoch folgender Störungssatz beweisen, der die Auswahl von Teilfolgen nicht benötigt.

<u>Störungssatz 6.</u> Es seien die Voraussetzungen von Existenzsatz 6 erfüllt. Es sei (y_0, λ_0) mit $y_0 \in G$, $\lambda_0 > 0$ die einzige Lösung der Gleichung $Fx = \lambda x$ $(x \in G, \lambda > 0)$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$ derart, dass für die Eigenwerte λ_n bzw. die Eigenvektoren x_n $(n \geqq n_0)$ der durch $F_n x = Fx + \frac{x_0}{n}$ $(x \in G)$ erklärten Abbildungen F_n die Beziehungen

$$|\lambda_n - \lambda_0| < \varepsilon \;, \quad \| x_n - y_0 \| < \varepsilon$$

gelten.

<u>Beweis.</u> In [23] wird ie Existenz einer positiven Konstane σ gezeigt, für die $\lambda_n \geqq 2\sigma > \sigma$ $(n = 1,2,\ldots)$ gilt. Da der Eigenwert λ_0 der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge von (λ_n) ist, muss auch $\lambda_0 \geqq 2\sigma > \sigma$ gel-

ten. Aus unserem Theorem ergibt sich dann die Behauptung.

Der Verfasser dankt Prof. Dr. Riedrich (Dresden) für wertvolle Anregungen.

L i t e r a t u r

[1] ALTMAN M.: A fixed point theorem in Banach spaces, Bull. Acad. Sci. 5(1957), 89-92.

[2] CAIN G.L., NASHED M.Z.: Fixed points and stability for a sum of two operators in locally convex spaces, Pacific J.Math. 39(1971), 581-592.

[3] HAHN S.: Über Näherungslösungen von nichtlinearen Operatorengleichungen in topologischen Vektorräumen, Wiss. Z. TU Dresden 22(1973), 489-493.

[4] HAHN S.: Zur Leray-Schauder-Theorie in topologischen Vektorräumen, Wiss. Z. TU Dresden 24(1975), 375-378.

[5] HAHN S., PÖTTER K.F.: Eine Verallgemeinerung eines Satzes von H.H. Schaefer, Wiss. Z. TU Dresden 19(1970), 1383-1385.

[6] HAHN S., PÖTTER K.F.: Über Fixpunkte kompakter Abbildungen in topologischen Vektorräumen, Studia Math. 50(1974), 1-16.

[7] HAHN S., RIEDRICH T.: Der Abbildungsgrad kompakter Vektorfelder in nicht notwendig lokalkonvexen topologischen Vektorräumen, Wiss. Z. TU Dresden 22 (1973), 37-42.

[8] KELLEY J.L.: General Topology, New York: D.van Nostrand Company,1955.

[9] KLEE, V.: Shrinkable neighborhoods in Hausdorff linear spaces, Math. Ann. 141(1960), 281-285.

[10] KLEE V.: Leray-Schauder-theory without local convexity, Math. Ann. 141(1960), 286-296.

[11] KRASNOSELSKI M.A.: Topological methods in the theory of nonlinear integral equations, Oxford-London-New York-Paris, 1964.

[12] LANDSBERG M.: Über die Fixpunkte kompakter Abbildungen, Math. Ann. 154(1964). 427-431.

[13] LANDSBERG M., RIEDRICH T.: Über positive Eigenwerte kompakter Abbildungen in topologischen Vektorräumen, Math. Ann. 163(1966), 50-61.

[14] REEKEN M.: Stability of critical values and isolated critical continua, Manuscripta Math. 12(1974), 163-193.

[15] RIEDRICH T.: Die Räume $L^p(0,1)$ $(0<p<1)$ sind zulässig, Wiss. Z. TU Dresden 12(1963), 1149-1152.

[16] RIEDRICH T.: Der Raum S(0,1) ist zulässig, Wiss. Z. TU Dresden 13(1964), 1-6.

[17] RIEDRICH T.: Über die Stabilität positiver Eigenwerte finiter Abbildungen, Math. Nachr. 41(1969), 301-307.

[18] RIEDRICH T.: Störungen nichtlinearer Operatorengleichungen, Wiss. Schriftenreihe der TH Karl-Marx-Stadt, 1975, 5. TMP Heft 2, 345-350.

[19] RIEDRICH T.: Nonlinear operator equations in topological vector spaces, Preprint 07-04-75 TU Dresden, 1975.

[20] RIEDRICH T.: Über die Stabilität positiver Halbeigenwerte kompakter Abbildungen. Erscheint in: Beiträge zur Numerischen Mathematik 4(1975),179-190.

[21] ROTHE E.: Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen, Compositio Math. 5(1937), 177-197.

[22] SCHAUDER J.: Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia Math. 2(1930), 171-180.

[23] ZEIDLER E.: Zur Methode der monotonen Minoranten von M.A. Krasnoselski, Math. Nachr. 49(1971),69-83.

[24] ZEIDLER E.: Topologischer Existenzbeweis für Kapillar-Schwerewellen, Math. Nachr. 49(1971), 85-99.

Technische Universität Dresden

Sektion Mathematik

Mommsenstr. 13, 8027 Dresden

D D R

(Oblatum 3.2. 1976)