Osvald Demuth

О конструктивнпм аналоге теоремы Данжуа-Янга о производных числах

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 17 (1976), No. 1, 111--126

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105679

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

17,1 (1976)

О КОНСТРУКТИВНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ДАНЖУА-ЯНГА О ПРОИЗВОДНЫХ ЧИСЛАХ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Прага

Содержание: Пусть $\mathcal{F}$ всюду на конструктивных действительных числах определенная конструктивная функция и пусть для всякого псевдочисла ξ выражение $\mathcal{P}(\mathcal{F},\xi)$ значит: не может не быть или нижнее производное число $\mathcal{F}$ в точке ξ равно $-\infty$ и верхнее производное число $\mathcal{F}$ в ξ равно $+\infty$ или $\mathcal{F}$ конечно псевдодифференцируема в точке ξ. Тогда, как доказано в настоящей заметке, а) для почти всех псевдочисел ξ верно $\mathcal{P}(\mathcal{F},\xi)$ и б) если $\mathcal{F}$ равномерно непрерывна, то для всех Π_2-чисел ξ выполнено $\mathcal{P}(\mathcal{F},\xi)$. (Ср. [1], стр. 271 .)

Ключевые слова: Конструктивная функция, псевдочисла, дифференцируемость, производные числа.

AMS: Primary 02E99 Ref. Ž.: 2.644.2

Secondary: 26A24

В следующем мы пользуемся без ссылок определениями и обозначениями из [2] и [3]. В отличие от [2] мы для всяких РЧ a и b обозначим

$$[\![a, b]\!] \rightleftharpoons \min(a,b) \,\Delta\, \max(a,b) .$$

Определения. Пусть $\mathcal{F}$ функция, а P слово, которое является или КДЧ или ПЧ.

а) Мы обозначим

$$\overline{D}_{\text{кл}}(+\infty,\mathcal{F},P) \rightleftharpoons \forall k \neg\neg \exists a b \left(a < P < b \;\&\; b - a < \frac{1}{2^k} \;\&\; \frac{\mathcal{F}(b)-\mathcal{F}(a)}{b \dot{-} a} > k\right)$$

и $\underline{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{F}, P) \rightleftharpoons \overline{D}_{кл}(+\infty, -\mathcal{F}, P)$.

б) Если $\overline{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{F}, P)$ (соотв. $\underline{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{F}, P)$), то мы скажем, что $+\infty$ (соотв. $-\infty$) является верхним (соотв. нижним) прозводным числом функции $\mathcal{F}$ в P .

Обозначение. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, а $\{x_k\}_k$ последовательность КДЧ. Тогда мы обозначим $\mathfrak{X}_1^D(\mathcal{F}, \{x_k\}_k)$, если верно $\mathfrak{X}^D(\mathcal{F}, \{x_k\}_k)$ (см.[3], стр. 586) и для всяких РЧ a_0, a_1, b и c, $a_0 < b < c < a_1$, последовательность $\{x_k\}_k$ не может не содержать члены равные супремуму и инфимуму множеств

$$\wedge y(\exists d(b \le d \le c \,\&\, \frac{\mathcal{F}(d) - j \cdot \mathcal{F}(a_i)}{d - a_i} = y)) ,$$

где $0 \le i \le 1 \,\&\, 0 \le j \le 1$.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция. Тогда существуют последовательность КДЧ $\{x_k\}_k$ такая, что $\mathfrak{X}_1^D(\mathcal{F}, \{x_k\}_k)$, и алгорифм $\mathfrak{R}$, для которого для всяких КДЧ x , ЦЧ i , рационального сегмента $b \vartriangle c$, РЧ e , $0 \le i \le 1 \,\&\, 0 < (-1)^i \cdot x \,\&\, \neg \exists k (x = x_k) \,\&\, (e < b \vee c < e)$, и слова P , $P \rightleftharpoons i \square x \square e \square b \vartriangle c$,верно

$$!\,\mathfrak{R}\llcorner P \lrcorner,\ \mathfrak{R}\llcorner P \lrcorner \rightleftharpoons \Lambda \text{ или } \mathfrak{R}\llcorner P \lrcorner \text{ КДЧ},$$

$$(\mathfrak{R}\llcorner P \lrcorner \rightleftharpoons \Lambda \equiv \neg \exists d (b \le d \le c \,\&\, \frac{\mathcal{F}(d)}{d-e} \cdot (-1)^i > x \cdot (-1)^i)) \,\&\, (\neg(\mathfrak{R}\llcorner P \lrcorner \rightleftharpoons \Lambda) \supset$$
$$\supset \forall a (0 < (b-e) \cdot (e-a) \supset (\exists d (\frac{\mathcal{F}(d)}{d-a} \cdot (-1)^i > x \cdot (-1)^i \,\&$$
$$\& \, b \le d \le c) \equiv a \in \min(e, \mathfrak{R}\llcorner P \lrcorner) \vartriangle \max(e, \mathfrak{R}\llcorner P \lrcorner)))) .$$

При помощи рассуждений, использованных в доказательствах теоремы 7 из [2] и леммы 4 из [3] легко доказать следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, $\{x_k\}_k$ последовательность КДЧ, $*$ один из знаков $<$ и $>$, а w_0 и w_1 КДЧ такие, что

$\mathfrak{X}_1^D(\mathcal{F},\{x_k\}_k) \& \neg \exists k (w_0 = x_k \vee w_1 = x_k) \& (\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(0)) * w_0 * w_1$.

Тогда существует р.п. множество НЧ C такое, что

$\mathcal{K}(C) \& \forall \ell (\ell \in C \supset w_0 \cdot |\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}| * \Delta(\mathcal{F}, \mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner})) \& \forall a b (0 < a < b < 1 \&$
$w_0 \cdot |a \Delta b| * \Delta(\mathcal{F}, a \Delta b) \supset \exists \ell (\ell \in C \& \frac{1}{2} \cdot |a \Delta b| \leq |\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}| \&$
$\neg (a \Delta b \cap \mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner} = \emptyset))) \& \forall x y (0 \leq x < y \leq 1 \supset \Delta([\mathcal{F}, C], x \Delta y) *$
$w_1 (y - x))$.

(Определение $[\mathcal{F}, C]$ см. в [3], стр. 585 .)

Определние. Мы скажем, что последовательность рациональных сегментов $\{R_k\}_k$ соответствует р.п. множеству рациональных сегментов $\mathcal{R}$, если а) всякий сегмент последоватеьности $\{R_k\}_k$ содержится в объединении конечного числа сегментов из $\mathcal{R}$ и б) всякий сегмент из $\mathcal{R}$ содержится в объединении конечного числа сегментов последовательности $\{R_k\}_k$.

Лемма 3. Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{r}$, $\{b_i\}_{i=1}^{r}$ и $\{c_i\}_{i=1}^{r}$ системы РЧ, а $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ и α РЧ такие, что

$$\forall i (1 \leq i \leq r \supset |[\![a_i, c_i]\!]| \leq \alpha \cdot |[\![a_i, b_i]\!]|) \&$$
$$\& \mathfrak{m}(\varkappa_1, \bigcup_{i=1}^{r} [\![a_i, b_i]\!]) \& \mathfrak{m}(\varkappa_2, \bigcup_{i=1}^{r} [\![a_i, c_i]\!]) \&$$
$$\& \mathfrak{m}(\varkappa_3, \bigcup_{i=1}^{r} [\![a_i, c_i]\!] \setminus \bigcup_{j=1}^{r} [\![a_j, b_j]\!]) .$$

Тогда $\varkappa_2 \leq (2\alpha + 1) \cdot \varkappa_1 \& \varkappa_3 \leq 2\alpha \cdot \varkappa_1$.

Замечание 1. Пусть $\mathcal{F}$ функция, C р.п. множество НЧ,

и ξ ПЧ такие, что $\mathcal{H}(C)\ \&\ \forall x\,(|\mathcal{F}(x)|>0 \supset \exists \ell\,(\ell\in C\ \&$
$x\in(\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner})^{\circ}))\ \&\ \neg\exists\ell\,(\ell\in C\ \&\ \xi\in\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner})$.

Тогда если для РЧ a и b и КДЧ x верно $a<\xi<b\ \&\ \Delta(\mathcal{F},$ $a\Delta b)>x\cdot|a\Delta b|$, то не могут не существовать РЧ a_1 и b_1 такие, что $a\le a_1<\xi<b_1\le b\ \&\ \Delta(\mathcal{F},a_1\Delta b_1)>x\cdot|a_1\Delta b_1|\ \&$
$\neg\exists\ell k\,(\ell\in C\ \&\ k\in C\ \&\ a_1\in(\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner})^{\circ}\ \&\ b_1\in(\mathcal{L}_{\llcorner}k_{\lrcorner})^{\circ})$.

<u>Теорема 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция. Тогда для всех Π_2-чисел ξ верно

$$\neg\neg(\underline{D}_{\text{кл}}(-\infty,\mathcal{F},\xi)\ \&\ \overline{D}_{\text{кл}}(+\infty,\mathcal{F},\xi)\vee D_{\text{кл}}(\mathcal{F},\xi))\ .$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $\{x_k\}_k$ последовательность КДЧ такая, что $\mathcal{Z}_1^{D}(\mathcal{F},\{x_k\}_k)$ (см. лемму 1). Мы построим КДЧ v, $|\mathcal{F}(1)-\mathcal{F}(0)|<v\ \&\ \neg\exists k\,(v=x_k)$, и для всяких НЧ t и ЦЧ i, $0\le i\le 1$, согласно лемме 2 р.п. множество НЧ $C_{i,t}$ такое, что

$$\mathcal{H}(C_{i,t})\ \&\ \forall\ell\,(\ell\in C_{i,t}\supset t\cdot v\cdot|\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}|<\Delta(\mathcal{F},\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner})\cdot(-1)^{i})\ \&$$
$$\forall ab\,(0<a<b<1\ \&\ t\cdot v\cdot|a\Delta b|<\Delta(\mathcal{F},a\Delta b)\cdot(-1)^{i}\supset\exists\ell\,(\ell\in C_{i,t}\ \&$$
$$\frac{1}{2}\cdot|a\Delta b|\le|\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}|\ \&\ \neg(a\Delta b\cap\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}=\emptyset)))\ \&\ \forall xy\,(0\le x<y\le 1\supset$$
$$\Delta([\mathcal{F},C_{i,t}],x\Delta y)\cdot(-1)^{i}<t\cdot v\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(y-x))$$

и, следовательно, ввиду следствия 2 теоремы 5 из [2]

$$\forall\xi(\xi\in\Pi_2\ \&\ \forall m\neg\neg\exists ab\,(a<\xi<b\ \&\ b-a<\frac{1}{2^m}\ \&\ t\cdot v\cdot|a\Delta b|<$$
$$\Delta(\mathcal{F},a\Delta b)\cdot(-1)^{i})\supset\neg\neg\exists\ell\,(\ell\in C_{i,t}\ \&\ \xi\in\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}))\ .$$

Для всяких НЧ t и ЦЧ i, $0\le i\le 1$, мы обозначим $\mathcal{F}_{i,t}\rightleftharpoons\mathcal{F}-[\mathcal{F},C_{i,t}]$ и заметим, что $[\mathcal{F},C_{i,t}]$ функция слабо ограниченной вариации, которая равномерно непрерывна,

$$(1)\qquad \forall m\,\Big(\sum_{j=1}^{2^m} |\Delta([\mathcal{F}, C_{i,t}],\ \frac{j-1}{2^m} \vartriangle \frac{j}{2^m})| < 3\cdot t\cdot v + v\Big)$$

и согласно теореме 3 из [3] верно $\forall\xi(\xi\in\Pi_2 \supset D_{кл}([\mathcal{F}, C_{i,t}], \xi))$.

Ввиду сказанного и леммы 2 из [3] ясно, что $\forall i\,\xi(0\le i\le 1\ \&\ \xi\in\Pi_2 \supset (\overline{D}_{кл}(+\infty, (-1)^i\cdot\mathcal{F}, \xi) \equiv \forall t\neg\neg\exists\ell(\ell\in C_{i,t}\ \&\ \xi\in\mathcal{L}_\llcorner\ell_\lrcorner)))$ и для всяких НЧ t_0 и t_1 верно $\forall\xi(\xi\in\Pi_2\ \&\ \neg\exists\ell(\ell\in\in(C_{0,t_0}\cup C_{1,t_1})\ \&\ \xi\in\mathcal{L}_\llcorner\ell_\lrcorner) \supset \sigma_{[\mathcal{F},C_{0,t_0}]}(\xi) = \sigma_{[\mathcal{F},C_{1,t_1}]}(\xi)\ \&$
$D_{кл}(0, [\mathcal{F}, C_{0,t_0}]-[\mathcal{F}, C_{1,t_1}], \xi)\ \&\ (\neg(\xi\in 0\vartriangle 1) \supset D_{кл}(0, \mathcal{F}, \xi)))$.

Для завершения доказательства достаточно показать, что для всяких НЧ t, ЦЧ i, $0\le i\le 1$, и Π_2Ч ξ, $\xi\in 0\vartriangle 1\ \&\ \neg\exists\ell(\ell\in C_{i,t}\ \&\ \xi\in\mathcal{L}_\llcorner\ell_\lrcorner)$, выполнено

$$\forall k\neg\neg\exists m\,\forall a\,b\,(a<\xi<b\ \&\ b-a<\frac{1}{2^m} \supset$$
$$\supset \Delta(\mathcal{F}'_{i,t}, a\vartriangle b)\cdot(-1)^i < \frac{1}{2^k}\cdot|a\vartriangle b|)\ \&\ \neg\underline{D}_{кл}(-\infty, (-1)^i\cdot\mathcal{F}_{i,t}, \xi).$$

Не теряя общности мы можем ограничиться исследованием функций $\mathcal{F}_{0,t}$, $1\le t$.

Пусть t НЧ, а ξ Π_2Ч, $\xi\in 0\vartriangle 1\ \&\ \neg\exists\ell(\ell\in C_{0,t}\ \&\ \xi\in\mathcal{L}_\llcorner\ell_\lrcorner)$.

I) Мы построим последовательность КДЧ $\{x^t_k\}_k$, КДЧ w_0 и для всякого НЧ σ согласно лемме 2 р.п. множество НЧ D_σ такие, что

$$\mathfrak{X}^D_1([\mathcal{F}, C_{0,t}], \{x^t_k\}_k)\ \&\ 4\cdot v\cdot t < w_0\ \&\ \neg\exists k\,(w_0 = x^t_k)\ \&\ \mathcal{K}(D_\sigma)\ \&$$
$$(2)\qquad \forall\ell(\ell\in D_\sigma \supset \Delta([\mathcal{F}, C_{0,t}], \mathcal{L}_\llcorner\ell_\lrcorner) < -2^\sigma\cdot w_0\cdot|\mathcal{L}_\llcorner\ell_\lrcorner|)\ \&$$
$$\forall a\,b\,(0<a<b<1\ \&\ \Delta([\mathcal{F}, C_{0,t}], a\vartriangle b) < -2^\sigma\cdot w_0\cdot|a\vartriangle b| \supset$$
$$\exists\ell(\ell\in D_\sigma\ \&\ \frac{1}{2}\cdot|a\vartriangle b| \le |\mathcal{L}_\llcorner\ell_\lrcorner|\ \&\ \neg(a\vartriangle b\cap\mathcal{L}_\llcorner\ell_\lrcorner = \emptyset)))$$

и, следовательно, ввиду (1) верно

$$\forall p \left(\sum_{\ell \in (D_\sigma)^{(p)}} |\mathscr{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}| < \frac{1}{2^\sigma} \right).$$

Согласно следствию 2 теоремы 5 из [2] не могут не существовать НЧ σ_0 и для всякого НЧ q нат. числа ℓ_0 и m_0 такие, что

$$(3)\quad \begin{aligned} &\neg \exists \ell (\ell \in D_{\sigma_0} \,\&\, \xi \in \mathscr{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}) \,\&\, \neg \exists \ell (\ell_0 < \ell \,\&\, \ell \in (C_{0,t} \cup D_{\sigma_0}) \,\&\, \xi \in \\ &(\Im_n(\mathscr{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}) - 2^{q+4} \cdot |\mathscr{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}|) \Delta (\Im_m(\mathscr{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}) + 2^{q+4} \cdot |\mathscr{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}|)) \,\&\, \\ &\frac{1}{2^{m_0}} < \xi < 1 - \frac{1}{2^{m_0}} \,\&\, \forall \ell (\ell \leq \ell_0 \,\&\, \ell \in (C_{0,t} \cup D_{\sigma_0}) \supset \\ &\frac{1}{2^{m_0}} < \min(|\xi - \Im_n(\mathscr{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner})|, |\xi - \Im_m(\mathscr{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner})|)). \end{aligned}$$

Пусть σ_0, q, ℓ_0 и m_0 НЧ такие, что (3).

Пусть $a \Delta b$ рациональный сегмент,

$$0 < a < b < 1 \,\&\, \Delta(\mathscr{F}_{0,t}, a \Delta b) > \frac{1}{2^q} \cdot (w_0 \cdot 2^{\sigma_0} + v \cdot t) \cdot |a \Delta b|.$$

Тогда ввиду свойств множества $C_{0,t}$ и (2) выполнено

$$\exists \ell (\ell \in (C_{0,t} \cup D_{\sigma_0}) \,\&\, |a \Delta b| \leq 2^{q+3} \cdot |\mathscr{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}| \,\&\, \neg (a \Delta b \cap \mathscr{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner} = \emptyset)).$$

Ввиду этого и (3) видно, что

$$\forall a b \left(a < \xi < b \,\&\, b - a < \frac{1}{2^{m_0}} \supset \Delta(\mathscr{F}_{0,t}, a \Delta b) \leq \right.$$
$$\left. \leq \frac{1}{2^q} \cdot (w_0 \cdot 2^{\sigma_0} + v \cdot t) \cdot |a \Delta b| \right).$$

II) Согласно лемме 1 мы для функции $\mathscr{F}_{0,t}$ построим последовательность КДЧ $\{x_k^0\}_k$, алгорифм $\mathfrak{R}$ и КДЧ x такие, что $\mathfrak{X}_1^D(\mathscr{F}_{0,t}, \{x_k^0\}_k) \,\&\, 0 < x \,\&\, \neg \exists k (x = x_k^0)$ и алгорифм $\mathfrak{R}$ обладает свойствами описанными в названной лемме.

Ввиду I и следствия 2 теоремы 5 из [2] не могут не существовать НЧ m_0 и ℓ_0 такие, что

(4) $$\forall a b (a < \xi < b \,\&\, (b - a) < \frac{1}{2^{m_0}} \supset 0 < a < b < 1 \,\&\, \Delta(\mathfrak{F}_{0,t}, a \Delta b) < x \cdot |a \Delta b|) \,\&\, \forall \ell (\ell_0 < \ell \,\&\, \ell \in C_{0,t} \supset \neg(\xi \in (\exists_n(\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner) - 2 \cdot |\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner|) \Delta \Delta (\exists_m(\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner) + 2 \cdot |\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner|)) \,\&\, \frac{1}{x} \cdot \langle \omega, \mathfrak{F}_{0,t} \rangle_\llcorner \mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner\lrcorner + 5 \cdot |\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner| < \frac{1}{2^{m_0+1}}) .$$

Пусть m_0 и ℓ_0 НЧ такие, что (4).

1) Пусть k НЧ .

а) Мы построим алгорифм $\mathfrak{A}$, $\forall \ell ((!\mathfrak{A}_\llcorner \ell_\lrcorner \equiv (\ell_0 < \ell \,\&\, \ell \in C_{0,t})) \,\&\, \forall i (!\mathfrak{A}_\llcorner \ell i_\lrcorner \equiv (!\mathfrak{A}_\llcorner \ell_\lrcorner \,\&\, 0 \leq i \leq 4)))$,

обладающий свойствами описанными ниже.

Пусть ℓ НЧ, $\ell_0 < \ell \,\&\, \ell \in C_{0,t}$. Мы обозначим для ЦЧ i и j, $0 \leq i \leq 1 \,\&\, 0 \leq j \leq 1$,

$$a_j^\ell \rightleftharpoons \exists_n(\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner) - (2 + j) \cdot (-1)^j \cdot |\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner|$$

и

$$P_{i,j}^\ell \rightleftharpoons \mathcal{R}_\llcorner i \,\square\, (-1)^i \cdot 2^{i \cdot (k+3)} \cdot x \,\square\, a_j^\ell \,\square\, \mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner\lrcorner .$$

α) Пусть j ЦЧ, $0 \leq j \leq 1$.

Если $P_{1,j}^\ell \mathrel{\overline{\overline{\circ}}} \Lambda$, то мы определим $c_j^\ell \rightleftharpoons a_j^\ell$ и $d_{1-j}^\ell \rightleftharpoons a_{1-j}^\ell$.

Пусть $\neg(P_{1,j}^\ell \mathrel{\overline{\overline{\circ}}} \Lambda)$. Тогда $\neg(P_{0,1-j}^\ell \mathrel{\overline{\overline{\circ}}} \Lambda)$ и $|P_{1,j}^\ell - a_j^\ell| < \frac{1}{2^{k+3}} \cdot |P_{0,1-j}^\ell - a_{1-j}^\ell|$. Мы построим РЧ c_j^ℓ и d_{1-j}^ℓ , для которых верно $0 < (c_j^\ell - P_{1,j}^\ell) \cdot (P_{1,j}^\ell - a_j^\ell) \,\&\, 0 < (P_{0,1-j}^\ell - d_{1-j}^\ell) \cdot (d_{1-j}^\ell - a_{1-j}^\ell) \,\&\, |c_j^\ell - a_j^\ell| < \frac{1}{2^{k+3}} \cdot |d_{1-j}^\ell - a_{1-j}^\ell|$

и, следовательно, $|c_j^\ell - a_j^\ell| < \frac{1}{2^{k+3}} \cdot |d_{1-j}^\ell - a_j^\ell|$.

β) Если $c_0^\ell \Delta c_1^\ell \subseteq d_0^\ell \Delta d_1^\ell$, то мы определим $\mathfrak{A}\llcorner \ell \lrcorner \rightleftharpoons \Lambda$ и $\forall i\,(0 \le i \le 4 \supset \mathfrak{A}\llcorner \ell i \lrcorner \rightleftharpoons \Lambda)$.

Пусть j ЦЧ, $0 \le j \le 1 \,\&\, \neg(c_j^\ell \in d_0^\ell \Delta d_1^\ell)$. Тогда $c_{1-j}^\ell \in d_0^\ell \Delta d_1^\ell$ и мы определим $\mathfrak{A}\llcorner \ell \lrcorner \rightleftharpoons \square$, $\mathfrak{A}\llcorner \ell 0 \lrcorner \rightleftharpoons$

$\rightleftharpoons [\![c_j^\ell, d_{1-j}^\ell]\!]$, $\mathfrak{A}\llcorner \ell 1 \lrcorner \rightleftharpoons d_0^\ell \Delta d_1^\ell$, $\mathfrak{A}\llcorner \ell 2 \lrcorner \rightleftharpoons [\![c_j^\ell, d_j^\ell]\!]$,

$\mathfrak{A}\llcorner \ell 3 \lrcorner \rightleftharpoons [\![c_j^\ell, c_j^\ell - (-1)^j \cdot \frac{1}{2^{k+3}} \cdot \frac{1}{2^\ell}]\!]$ и

$\mathfrak{A}\llcorner \ell 4 \lrcorner \rightleftharpoons [\![d_j^\ell, d_j^\ell + (-1)^j \cdot \frac{1}{2^{k+3}} \cdot \frac{1}{2^\ell}]\!]$; верно $|\mathfrak{A}\llcorner \ell 2 \lrcorner| < \frac{1}{2^{k+3}} \cdot |\mathfrak{A}\llcorner \ell 1 \lrcorner|$.

б) Мы на основании равномерной непрерывности функции $\mathcal{F}_{0,t}$ построим возрастающую последовательность НЧ $\{q_p\}_p$ такую, что для всяких НЧ p, s и ℓ верно

$$\ell_0 < s \,\&\, s \in (C_{0,t})^{(p)} \,\&\, \neg(\mathfrak{A}\llcorner s \lrcorner \equiv \Lambda) \,\&\, \ell_0 < \ell \,\&\, \ell \in (C_{0,t} \setminus (C_{0,t})^{(q_p)}) \,\&$$

$$\& \neg(\mathfrak{A}\llcorner \ell \lrcorner \equiv \Lambda) \supset |\mathfrak{A}\llcorner \ell 0 \lrcorner| < \frac{1}{2^{k+3}} \cdot \frac{1}{2^{s+1}}.$$

Пусть ℓ и p НЧ, $\ell_0 < \ell \,\&\, 1 < p \,\&\, \ell \in ((C_{0,t})^{(p)} \setminus (C_{0,t})^{(p-1)})$.

Если $\mathfrak{A}\llcorner \ell \lrcorner \equiv \Lambda$, то пусть E_ℓ пустая система.

Пусть $\neg(\mathfrak{A}\llcorner \ell \lrcorner \equiv \Lambda)$. Тогда E_ℓ система дизъюнктных рациональных сегментов, содержащихся в $\mathfrak{A}\llcorner \ell 2 \lrcorner$, и такая, что сегменты из E_ℓ не перекрываются с сегментами

(5) $\mathfrak{A}\llcorner s m \lrcorner$, $\ell_0 < s \,\&\, s \in (C_{0,t})^{(p-1)} \,\&\, \neg(\mathfrak{A}\llcorner s \lrcorner \equiv \Lambda) \,\&\, 2 \le m \le 4$,

и

(6) $\mathfrak{A}\llcorner s 1 \lrcorner$, $\ell_0 < s \,\&\, s \in (C_{0,t})^{(q_p)} \,\&\, \neg(\mathfrak{A}\llcorner s \lrcorner \equiv \Lambda)$,

и сегмент $\mathfrak{A}\llcorner \ell 2 \lrcorner$ содержится в объединении сегментов системы E_ℓ и сегментов (5) и (6).

Пусть $\{R^k_m\}_m$ последовательность неперекрывающихся рациональных сегментов, соответствующая множеству сегментов, образованному сегментами K^{k+3}_m, $1 \le m$ (см. теорему 2 из [2]), $\mathscr{C}\llcorner \ell 3 \lrcorner$ и $\mathscr{C}\llcorner \ell 4 \lrcorner$, $\ell_0 < \ell \,\&\, \ell \in C_{0,t} \,\&\, \neg(\mathscr{C}\llcorner \ell \lrcorner \equiv \Lambda)$, и сегментами систем E_ℓ, $\ell_0 < \ell \,\&\, \ell \in C_{0,t}$. Тогда мы на основании леммы 3 получаем

$$(7) \qquad \forall p \left(\sum_{m=1}^{p} |R^k_m| < \frac{1}{2^k} \right) .$$

2) Ввиду того, что $\xi \in \Pi_2$ и для всякого НЧ k имеет место (7), мы на основании следствия 2 теоремы 5 из [2] получаем $\neg \forall k \neg\neg \exists m (\xi \in R^k_m)$.

С другой стороны ввиду (4) и замечания 1 выполнено

$(\underline{D}_{кл}(-\infty, \mathscr{F}_{0,t}, \xi) \supset \forall k \neg\neg \exists m (\xi \in R^k_m))$

Итак, мы доказали $\neg \underline{D}_{кл}(-\infty, \mathscr{F}_{0,t}, \xi)$.

<u>Лемма 4</u>. Пусть s НЧ, $\mathscr{V}(\xi)$ свойство псевдочисел, $\{\{T^m_k\}_k\}_m$ последовательность последовательностей рациональных сегментов, а $\{D_m\}_m$ последовательность неинфинитных р.п. множеств НЧ такие, что $\forall \xi m (\xi \in \Pi \,\&\, \neg \exists k (\neg (k \in D_m) \,\&\, \xi \in T^m_k) \supset \mathscr{V}(\xi)) \,\&\, \neg\neg \exists m \forall p \left(\sum_{1 \le k \le p \,\&\, \neg(k \in D_m)} |T^m_k| < \frac{1}{2^s} \right)$.

Тогда существуют последовательность рациональных сегментов $\{T_k\}_k$ и неинфинитное р.п. множество НЧ D такие, что

$$\forall \xi (\xi \in \Pi \,\&\, \neg \exists k (\neg (k \in D) \,\&\, \xi \in T_k) \supset \mathscr{V}(\xi)) \,\&$$
$$\& \, \forall p \left(\sum_{1 \le k \le p \,\&\, \neg(k \in D)} |T_k| < \frac{1}{2^s} \right) .$$

Замечание 2. Если для всякого НЧ m $\mathcal{V}_m(\xi)$ свойство псевдочисел, которым обладают почти все псевдочисла, то для почти всех псевдочисел ξ верно $\forall m\, \mathcal{V}_m(\xi)$.

Лемма 5. Пусть $\mathcal{F}$ функция. Тогда существует алгорифм $\mathcal{Y}$ такой, что для всяких НЧ ℓ, k и t, РЧ c и d и ЦЧ i_1, i_2, i_3 и i_4 таких, что $0 < c \,\&\, 0 < d \,\&\, \forall j\,(1 \le j \le 4 \supset 0 \le i_j \le 1)$, и слова P, $P \rightleftharpoons i_1 \square i_2 \square i_3 \square i_4 \square \ell \square c \square d \square t \square k$, выполнено

$$!\mathcal{Y}\llcorner P \lrcorner \equiv (k = i_4 \vee i_4 < k \le t \,\&\, \exists a\,(a \in (\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner)^{\circ} \,\&\, \mathcal{F}(a)\cdot(-1)^{i_2} > c\cdot((k - i_3 - i_4)\cdot d + (a - \mathfrak{Э}_\pi(\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner) - i_1 \cdot |\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner|)\cdot(-1)^{i_1})))$$

и $$!\mathcal{Y}\llcorner P \lrcorner \supset \exists m\,(\mathcal{Y}\llcorner P \lrcorner \rightleftharpoons m \,\&\, (i_4 = k \supset m = \ell) \,\&\, (i_4 < k \supset \forall a\,(a \in \mathcal{L}\llcorner m \lrcorner \equiv a \in [\![\mathfrak{Э}_\pi(\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner) + i_1 \cdot |\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner| + (k - 1 - i_4)\cdot d\cdot(-1)^{i_1+1},\ \mathfrak{Э}_\pi(\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner) + i_1 \cdot |\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner| + (k - i_4)\cdot d\cdot(-1)^{i_1+1}]\!])))$$.

Замечание 3. Если $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{Y}$ алгорифм из леммы 5, ℓ, t, q и m НЧ, c и d РЧ, $0 < c \,\&\, d = \frac{1}{2q}\cdot|\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner|$, i_1 и i_2 ЦЧ, $0 \le i_1 \le 1 \,\&\, 0 \le i_2 \le 1$, а P_1, P_2 и P_3 слова такие, что $P_1 \rightleftharpoons i_1 \square i_2 \square 0 \square 1 \square \ell \square c \square d \square t \square$,

$P_2 \rightleftharpoons i_1 \square i_2 \square 1 \square 1 \square \ell \square c \cdot \frac{1}{2^m} \square d \square (t + 2q)\cdot 2^m \square$ и

$P_3 \rightleftharpoons (1 - i_1) \square i_2 \square 1 \square 0 \square \ell \square c \square d \square t + 2q \square$,

а k_1, k_2 и k_3 НЧ, для которых верно $\forall j\,(1 \le j \le 3 \supset !\mathcal{Y}\llcorner P_j k_j \lrcorner \,\&\, \neg !\mathcal{Y}\llcorner P_j (k_j + 1) \lrcorner)$, тогда выполнено

а) для НЧ j, $1 \le j \le 3$, $\{\mathcal{L}\llcorner \mathcal{Y}\llcorner P_j k \lrcorner \lrcorner\}_{k=1}^{k_j}$ система неперекрывающихся рациональных сегментов и б) $\sum_{k=1}^{k_2} |\mathfrak{B}_\llcorner \mathcal{J}_\llcorner P_2 k_\lrcorner{}_\lrcorner| \le 2^{m+1} \cdot \sum_{k=1}^{k_1} |\mathfrak{B}_\llcorner \mathcal{J}_\llcorner P_1 k_\lrcorner{}_\lrcorner|$

и $\sum_{k=1}^{k_3} |\mathfrak{B}_\llcorner \mathcal{J}_\llcorner P_3 k_\lrcorner{}_\lrcorner| \le 2 \cdot \sum_{k=1}^{k_1} |\mathfrak{B}_\llcorner \mathcal{J}_\llcorner P_1 k_\lrcorner{}_\lrcorner|$.

Лемма 6. Пусть C р.п. множество НЧ, $\mathcal{K}(C)$, α РЧ, $1 \le \alpha$, а $\mathfrak{A}$ алгорифм такой, что для всяких НЧ ℓ, $\ell \in C$, и ЦЧ λ_1 и λ_2, $0 \le \lambda_1 \le 1 \& 0 \le \lambda_2 \le 1$, верно

$$\mathfrak{A}_\llcorner \lambda_1 \square \ell_\lrcorner \simeq \partial_\lambda(\mathfrak{B}_\llcorner \ell_\lrcorner) + \lambda_1 \cdot |\mathfrak{B}_\llcorner \ell_\lrcorner| ,$$

$$\mathfrak{A}_\llcorner \lambda_1 \square 0 \square \ell \square 1_\lrcorner \simeq \ell \,\&\, !\,\mathfrak{A}_\llcorner \lambda_1 \square 1 \square \ell \square 1_\lrcorner ,$$

$\widetilde{\mathfrak{A}}_{\lambda_1 \square \lambda_2 \square \ell \square}$ стройный арифметический алгорифм, который не является арифметически полным, и такой, что если $k^{\ell}_{\lambda_1,\lambda_2}$ НЧ, для которого верно $!\,\mathfrak{A}_\llcorner \lambda_1 \square \lambda_2 \square \ell \square k^{\ell}_{\lambda_1,\lambda_2}{}_\lrcorner$, то $\{\mathfrak{B}_\llcorner \mathfrak{A}_\llcorner \lambda_1 \square \lambda_2 \square \ell \square k_\lrcorner{}_\lrcorner\}_{k=1}^{k^{\ell}_{\lambda_1,\lambda_2}}$ система неперекрывающихся рациональных сегментов и существует РЧ $d^{\ell}_{\lambda_1,\lambda_2}$ такое, что $[\![\mathfrak{A}_\llcorner \lambda_1 \square \ell_\lrcorner, d^{\ell}_{\lambda_1,\lambda_2}]\!]$ является объединением сегментов этой системы, причем в случае, что $\forall j (0 \le j \le 1 \supset \neg !\,\mathfrak{A}_\llcorner \lambda_1 \square j \square \ell \square (k^{\ell}_{\lambda_1,j}+1)_\lrcorner)$, выполнено $|[\![\mathfrak{A}_\llcorner \lambda_1 \square \ell_\lrcorner, d^{\ell}_{\lambda_1,1}]\!]| \le \alpha \cdot |[\![\mathfrak{A}_\llcorner \lambda_1 \square \ell_\lrcorner, d^{\ell}_{\lambda_1,0}]\!]|$.

Тогда для почти всех ЦЧ ξ верно $(\neg \exists \ell (\ell \in C \& \xi \in \mathfrak{B}_\llcorner \ell_\lrcorner) \supset (\xi \in \mathcal{P}_1 \supset \xi \in \mathcal{P}_0))$, где для ЦЧ j, $0 \le j \le 1$,

$$\mathcal{P}_j \rightleftharpoons \wedge \eta (\eta \in \Pi \,\&\, \forall m \neg\neg \exists i \ell k (0 \le i \le 1 \,\&\, \ell \in C \,\&\, !\,\mathfrak{A}_\llcorner i \square j \square \ell \square k_\lrcorner \,\&\, \eta \in \mathfrak{B}_\llcorner \mathfrak{A}_\llcorner i \square j \square \ell \square k_\lrcorner{}_\lrcorner \,\&\, |\eta - \mathfrak{A}_\llcorner i \square \ell_\lrcorner| < \frac{1}{2^m})) .$$

Доказательство. Мы построим алгорифмы $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{L}$ такие, что для всяких ЦЧ λ_1, $0 \le \lambda_1 \le 1$, НЧ k, ℓ и t и РЧ c,

$0 < c$, верно

$$!\vartheta\llcorner\lambda_1 \square \ell \square k \square t\lrcorner \ \& \ (\vartheta\llcorner\lambda_1 \square \ell \square k \square t\lrcorner \neq \Lambda \supset$$
$$\vartheta\llcorner\lambda_1 \square \ell \square k \square (t+1)\lrcorner \neq \Lambda \ \& \ \forall m \, (m < k \supset \vartheta\llcorner\lambda_1 \square \ell \square m \square t\lrcorner \neq$$
$$\neq \Lambda)) \ \& \ ((\ell \in C \ \& \ !\mathfrak{A}\llcorner\lambda_1 \square 0 \square \ell \square k\lrcorner) \equiv \exists s \, (\vartheta\llcorner\lambda_1 \square \ell \square k \square s\lrcorner \neq \Lambda)) \ \&$$
$$\mathfrak{E}\llcorner\lambda_1 \square \ell \square c\lrcorner \simeq (\mathfrak{A}\llcorner\lambda_1 \square \ell\lrcorner - c) \vartriangle (\mathfrak{A}\llcorner\lambda_1 \square \ell\lrcorner + c) \ .$$

1) Пусть q , t и s НЧ.

а) Если $\neg \exists i \ell k \, (0 \leq i \leq 1 \ \& \ \ell \leq q \ \& \ k \leq t \ \& \ \vartheta\llcorner i \square \ell \square k \square t\lrcorner \neq \Lambda)$, то мы построим последовательность неперекрывающихся рациональных сегментов $\{R_k^{q,t,s}\}_k$, которая соответствует множеству, образованному сегментами K_n^{s+3} , $1 \leq n$, и $\mathcal{L}\llcorner p\lrcorner$,

$$\exists i \ell k \, (0 \leq i \leq 1 \ \& \ \ell \in C \ \& \ !\mathfrak{A}\llcorner i \square 1 \square \ell \square k\lrcorner \ \& \ \forall a \, (a \in \mathcal{L}\llcorner p\lrcorner \equiv$$
$$a \in (\bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{L}\llcorner\mathfrak{A}\llcorner i \square 1 \square \ell \square j\lrcorner\lrcorner \cap \mathfrak{E}\llcorner i \square \ell \square \frac{\alpha}{2^s}\lrcorner))) \ .$$

Тогда, очевидно, $\forall \xi \, (\xi \in \Pi \ \& \ \xi \in \mathcal{R}_1 \supset \neg\neg \exists k \, (\xi \in R_k^{q,s,t}))$.

б) Пусть $\{\lambda_j \square \ell_j \square k_j\}_{j=1}^{r}$ непустая система всех троек ЦЧ $\lambda \square \ell \square k$, для которых верно $0 \leq \lambda \leq 1 \ \& \ 1 \leq \ell \leq q \ \& \ 1 \leq k \leq$ $\leq t \ \& \ \vartheta\llcorner\lambda \square \ell \square k \square t\lrcorner \neq \Lambda \ \& \ (k < t \supset \neg(\vartheta\llcorner\lambda \square \ell \square (k+1) \square t\lrcorner \neq \Lambda))$.

Мы построим систему дизъюнктных рациональных сегментов $\{Q_i\}_{i=1}^{\sigma}$ и НЧ σ такие, что

$$\forall a \, (a \in \bigcup_{i=1}^{\sigma} Q_i \equiv a \in \bigcup_{j=1}^{r} ((\bigcup_{k=1}^{k_j} \mathcal{L}\llcorner\mathfrak{A}\llcorner\lambda_j \square 0 \square \ell_j \square k\lrcorner\lrcorner) \cap \mathfrak{E}\llcorner\lambda_j \square \ell_j \square \frac{1}{2^s}\lrcorner))$$

и расстояние любых двух сегментов системы $\{Q_i\}_{i=1}^{\sigma}$ больше чем $\frac{1}{2^{\sigma}}$.

Пусть σ_1 и σ_2 НЧ такие, что $2 + \sigma < \sigma_1 \ \& \ 2^{s+4} \cdot \sigma < 2^{\sigma_1} \ \&$

$\& \alpha \cdot 2^{\sigma_1+1} < 2^{\sigma_2}$ и пусть $\{\mathrm{R}_k^{q,t,s}\}_k$ последовательность неперекрывающихся рациональных сегментов, которая соответствует множеству, образованному сегментами K_m^{s+3}, $1 \leq m$,

$(\mathfrak{Э}_n(Q_i) - \frac{1}{2^{\sigma_1}}) \Delta\, \mathfrak{Э}_n(Q_i)$ и $\mathfrak{Э}_m(Q_i) \Delta (\mathfrak{Э}_m(Q_i) + \frac{1}{2^{\sigma_1}})$, $1 \leq i \leq 6$,

и $\mathcal{B}\llcorner n \lrcorner$, $\exists i l k (0 \leq i \leq 1 \& q < l \& l \in C \& !\mathcal{U}\llcorner i \square 1 \square l \square k \lrcorner \&$
$(\frac{1}{2^{\sigma_1+1}} < \min\limits_{1 \leq j \leq 6} \min\limits_{a \in Q_j} |\mathcal{U}\llcorner i \square l \lrcorner - a|) \& \forall a (a \in \mathcal{B}\llcorner n \lrcorner \equiv a \in$
$\in (\bigcup\limits_{1 \leq j \leq k} \mathcal{B}\llcorner \mathcal{U}\llcorner i \square 1 \square l \square j \lrcorner\lrcorner \cap \mathcal{E}\llcorner i \square l \square \frac{\alpha}{2^{\sigma_2}} \lrcorner)))$.

Тогда, очевидно, $\forall \xi (\xi \in \Pi \& \neg \exists l (l \in C \& \xi \in \mathcal{B}\llcorner l \lrcorner) \& \xi \in$
$\in \mathcal{P}_1 \& \neg \exists i (1 \leq i \leq 6 \& \xi \in Q_i) \supset \neg\neg \exists k (\xi \in \mathrm{R}_k^{q,t,s}))$.

2) Для всякого НЧ s не могут не существовать НЧ q_0 и t_0 такие, что

(8) $$\forall p (\sum_{k=1}^{p} |\mathrm{R}_k^{q_0,t_0,s}| < \frac{1}{2^s}) .$$

Действительно, пусть q_0 и t_0 НЧ и $\{\{r_{q,t}\}_{q_0 \leq q}\}_{t_0 \leq t}$ последовательность последовательностей РЧ такие, что
$\forall i l k (0 \leq i \leq 1 \& l \in C \& l \leq q_0 \& !\mathcal{U}\llcorner i \square 0 \square l \square k \lrcorner \supset k \leq t_0 \&$
$(\vartheta\llcorner i \square l \square k \square t_0 \lrcorner \neq \Lambda)$ и для всяких НЧ q и t,

$q_0 \leq q \& t_0 \leq t$,

$$\mathfrak{m}(r_{q,t}, \bigcup_{\substack{0 \leq i \leq 1 \& l \leq q \& k \leq t \& \\ \vartheta\llcorner i \square l \square k \square t \lrcorner \neq \Lambda}} (\mathcal{B}\llcorner \mathcal{U}\llcorner i \square 0 \square l \square k \lrcorner\lrcorner \cap \mathcal{E}\llcorner i \square l \square \frac{1}{2^{s}} \lrcorner))$$

и $r_{q,t} < r_{q_0,t_0} + \frac{1}{2^{s+3}} \cdot \frac{1}{\alpha}$.

Тогда при помощи леммы 3 легко доказать (8).

3) Ввиду 1), 2) и леммы 4 доказательство закончено.

На основании лемм 5 и 6 и замечаний 1, 2 и 3 легко усмотреть, что верно следующее утверждение.

Лемма 7. Пусть $\mathcal{F}$ функция, а C р.п. множество НЧ такие, что $\mathcal{H}(C) \& \forall x (|\mathcal{F}(x)| > 0 \supset \exists \ell (\ell \in C \& x \in \mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner))$. Тогда для почти всех ПЧ ξ верно $(\neg \exists \ell (\ell \in C \& \xi \in \mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner) \supset$
$\neg\neg(\underline{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{F}, \xi) \& \overline{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{F}, \xi) \vee D_{кл}(0, \mathcal{F}, \xi)))$.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{F}$ функция. Тогда для почти всех псевдочисел ξ выполнено

$\neg\neg(\underline{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{F}, \xi) \& \overline{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{F}, \xi) \vee \exists \eta (\eta \in \Pi \& D_{кл}(\eta, \mathcal{F}, \xi)))$.

Доказательство. Мы построим КДЧ v , для которого выполнено $|\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(0)| < v \& \forall i\, k\, a\, b (0 \leq i \leq 1 \& a < b \supset$
$\supset \neg(\Delta(\mathcal{F}, a \Delta b) = (-1)^i \cdot k \cdot v \cdot |a \Delta b|))$.

Согласно лемме 4 из [3] мы для всяких ЦЧ i, $0 \leq i \leq 1$, и НЧ t построим р.п. множество НЧ $C_{i,t}$ и функцию $\mathcal{F}_{i,t}$ такие, что $\mathcal{H}(C_{i,t}) \& \forall \ell (\ell \in C_{i,t} \supset t \cdot v \cdot |\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner| < \Delta(\mathcal{F}, \mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner) \cdot (-1)^i) \&$
$\mathcal{F}_{i,t} = \mathcal{F} - [\mathcal{F}, C_{i,t}]$ и $[\mathcal{F}, C_{i,t}]$ функция слабо ограниченной вариации. Тогда ввиду леммы 7, замечания 2, теоремы 3 из [3] и того, что – очевидно –
$\forall i\, \xi (0 \leq i \leq 1 \& \xi \in \Pi \& \forall t \neg\neg \exists \ell (\ell \in C_{i,t} \& \xi \in \mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner) \supset$
$\overline{D}_{кл}(+\infty, (-1)^i \cdot \mathcal{F}, \xi))$, доказательство закончено.

Пример 1. Существуют псевдоравномерно непрерывная функция $\mathcal{F}$ и Π_2-числа ξ_1 и ξ_2 такие, что $\overline{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{F}, \xi_1) \&$
$\neg \underline{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{F}, \xi_1) \& \mathrm{B}\alpha(\mathcal{F}, \xi_2) \& \neg D_{кл}(\mathcal{F}, \xi_2)$.

Пример 2. Существует функция $\mathcal{F}$, $\mathfrak{A}(\mathcal{F})$ (см. [5]), такая, что для всяких $\{\mathfrak{M}_m\}_m \in S$ (см. [4]), последовательности рациональных сегментов $\{Q_k\}_k$ и Π_1Ч η, для которых верно $\mu(\{\mathfrak{M}_m\}_m) < 1 \& \forall m (\eta(m) = \sum_{k=1}^{m} |Q_k|) \& \eta < 1$, существуют КДЧ x и Π_1Ч ξ такие, что

$$x \in 0 \triangledown 1 \& \neg (x \in \{\mathfrak{M}_m\}_m) \& \mathrm{B}\alpha(\mathcal{F}, x) \& \neg \mathrm{D}_{\text{кл}}(\mathcal{F}, x) \&$$

$$\xi \in 0 \triangledown 1 \& \neg \exists k (\xi \in Q_k) \& \mathrm{B}\alpha(\mathcal{F}, \xi) \& \neg \mathrm{D}_{\text{кл}}(\mathcal{F}, \xi) .$$

На основании [2] и [3] легко доказать следующее.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция и ξ ПЧ. Тогда $(\xi \in \Pi_1 \& \sigma_{\mathcal{F}}(\xi) \in \Pi_2 \supset \neg\neg (\underline{\mathrm{D}}_{\text{кл}}(-\infty, \mathcal{F}, \xi) \& \overline{\mathrm{D}}_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{F}, \xi) \vee \mathrm{D}_{\text{кл}}(-\infty, \mathcal{F}, \xi) \vee \mathrm{D}_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{F}, \xi)))$ и

$$((\xi \in \Pi_2 \vee \sigma_{\mathcal{F}}(\xi) \in \Pi_2) \& \neg\neg \exists m \forall \eta (\eta \in \Pi \& |\eta - \xi| < \frac{1}{2^m} \&$$
$$\& \sigma_{\mathcal{F}}(\eta) = \sigma_{\mathcal{F}}(\xi) \supset \eta = \xi) \supset \neg (\underline{\mathrm{D}}_{\text{кл}}(-\infty, \mathcal{F}, \xi) \&$$
$$\& \overline{\mathrm{D}}_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{F}, \xi))) .$$

В связи с примером 2 интересно заметить, что теорему 2 из [3] можно усилить.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{F}$ функция и пусть существует последовательность функций $\{\mathcal{G}_m\}_m$ такая, что для всякого НЧ m функция $\mathcal{G}_m$ не может не быть полигональной и выполнено $\forall m (\sum_{i=1}^{2^m} |\Delta(\mathcal{F} - \mathcal{G}_m, \frac{i-1}{2^m} \triangle \frac{i}{2^m})| < \frac{1}{2^m})$. Тогда существуют последовательность последовательностей рационалных сегментов $\{\{R_k^m\}_k\}_m$, последовательность Π_1Ч $\{\xi_m\}_m$ и последовательность неубывающих последовательностей НЧ $\{\{p_k^m\}_k\}_m$ такие, что

$$\forall m\, n\, ((\underline{\xi_m}(n) = \sum_{k=1}^{n} |R_k^m|) \,\&\, \xi_m < \frac{1}{2^{m+1}}) \,\&\, \forall q\, \xi\, (\xi \in \Pi \,\&$$
$$\&\, \neg \exists k\, (\xi \in R_k^q) \supset \exists \eta\, (\eta \in \Pi \,\&\, D_{кл}(\eta, \mathcal{F}, \xi) \,\&$$
$$\&\, \forall m\, (q \le m \supset \mathcal{D}(\eta, \mathcal{F}, \xi, m, \{r_k^m\}_k)))) \,.$$

<u>Пример 3</u>. Существует функция $\mathcal{F}$, $\mathcal{Q}(\mathcal{F})$, которая удовлетворяет предположению теоремы 4 и вместе с тем $\forall x\, (x \in 0 \Delta 1 \supset \neg D_{кл}(\mathcal{F}, x))$.

Л и т е р а т у р а :

[1] SAKS S.: Theory of the Integral, New York 1937.

[2] ДЕМУТ О.: О конструктивных псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 315-331.

[3] ДЕМУТ О.: О дифференцируемости конструктивных функций слабо ограниченной вариации на псевдочислах, Comment.Math.Univ.Carolinae 16(1975), 583-599.

[4] ДЕМУТ О.: Пространства L_n и S в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10 (1969), 261-284.

[5] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 11(1970), 705-726.

Matematicko-fyzikální fakulta

Karlova universita

Sokolovská 83, 18600 Praha 8

Československo

(Oblatum 5.11.1975)