

Vojtěch Bartík

Общая теорема о замощениях непрерывных отображений

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 16 (1975), No. 4, 693--698

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/105657>

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1975

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ОБЩАЯ ТЕОРЕМА О ЗАМОЩЕНИЯХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В. БАРТИК, Прага

Содержание: Формулируется общая теорема о замощениях непрерывных отображений в ELCX-пространства, дается набросок ее доказательства и приводятся некоторые ее следствия.

Ключевые слова: Замощение непрерывного отображения, ELCX-пара, когомология Александрова-Чека.

AMS: 55B05

Ref. Ž.: 3.971.11

Согласно Милнору [9] ELCX-структурой для пар (E, F) топологических пространств называется пара $(\{G_q \mid q \in Q\}, \lambda)$, состоящая из открытого покрытия $\{G_q \mid q \in Q\}$ пространства E и непрерывного отображения $\lambda: G \times [0, 1] \rightarrow E$, где $G = \bigcup \{G_q \times G_q \mid q \in Q\}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

- (ELCX 1) $\lambda(e_0, e_1, 0) = e_0$, $\lambda(e_0, e_1, 1) = e_1$, для всех пар $(e_0, e_1) \in G$;
- (ELCX 2) $\lambda(G_q \times G_q \times [0, 1]) \subset G_q$ для всех пар $q \in Q$;
- (ELCX 3) $\lambda(e_0, e_1, t) \in F$ для всех пар $(e_0, e_1) \in G \cap (F \times F)$;
- и $t \in [0, 1]$;
- (ELCX 4) $\lambda(e, e, t) = e$ для всех $e \in E$ и всех $t \in [0, 1]$.

Пара (E, F) , обладающая по крайней мере одной ELCX-структурой, называется ELCX-парой.

В [3, Appendix] в качестве следствия общих теорем о чеховских продолжениях гомологических функторов сформулировано следующее утверждение, обобщающее теоремы о замощениях доказанные в [6], [7], [4], [5] и [8]:

Для клеточной пары (Y, B) , произвольной пары (X, A) и множества $\text{cov}(X)$ нормальных покрытий пространства X , кофинитного в классе всех нормальных покрытий пространства X , каноническое отображение

$$\Phi(X, A; Y, B): \lim_{\mathcal{U} \in \text{cov} X} [|N(\mathcal{U})|, |N(\mathcal{U} \cap A)|, Y, B] \rightarrow [X, A, Y, B],$$

индуцированное каноническими отображениями пространства X в геометрические нервы $|N(\mathcal{U})|$ покрытий $\mathcal{U} \in \text{cov}(X)$, биективно.

Оказывается, что это утверждение а также теорема В работы [1] допускают следующее обобщение, представленное автором еще в начале 1971 г на семинаре Е.Г. Складенко в Москве и летом 1971 г на семинаре М. Катетова в Праге, но до сих пор неопубликованное.

1. Теорема. Пусть m - бесконечное кардинальное число, (X, A) - произвольная пара, $\text{cov}_m(X)$ - кофинитное подмножество класса всех нормальных покрытий мощности $\leq m$ пространства X и (Y, B) - пара, которая доминируется ELCX-парой (E, F) с ELCX-структурой $(\{G_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Q}_+^*, \lambda\})$, где $\text{card } \mathbb{Q}_+ \leq m$.

Каноническое отображение

$$\Phi_m(X, A; Y, B): \lim_{\mathcal{U} \in \text{cov}_m(X)} [|N(\mathcal{U})|, |N(\mathcal{U} \cap A)|, Y, B] \rightarrow [X, A, Y, B],$$

индуцированное каноническими отображениями пространства X в геометрические нервы $|N(\mathcal{U})|$ покрытий $\mathcal{U} \in \text{cov}_m(X)$, биективно в каждом из следующих случаев:

(а) покрытие $\{G_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ нормально,

(б) покрытие $\{G_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ обладает σ -локально конечным открытым измельчением и пространство X счетно паракомпактно и нормально;

(в) пространство $X \text{ max} (\aleph_0, \text{card } \mathcal{A})$ -паракомпактно (в смысле [10]) и нормально.

2. Следствие. Если пара (E, F) обладает $ELCX$ -структурой $(\{G_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}, \lambda)$, в которой покрытие $\{G_\alpha\}$ нормально, то она гомотопически эквивалентна клеточной паре мощности $\leq \text{max} (\aleph_0, \text{card } \mathcal{A})$.

3. Следствие. Если пара (Y, B) доминируется клеточной парой мощности $\leq m$ ($m \geq \aleph_0$), то отображение $\Phi(X, A; Y, B)$ биективно для каждой пары (X, A) .

Доказательство. Следует из теоремы 1, так как не трудно показать, что - аналогично случаю $m = \aleph_0$, см. [9] - и при $m > \aleph_0$ клеточная пара мощности $\leq m$ гомотопически эквивалентна паре $(|K|, |L|)$, где (K, L) - симплициальная пара мощности $\leq m$, которая согласно [9] гомотопически эквивалентна $ELCX$ -паре (E, F) , где E - метризуемое пространство веса $\leq m$.

Напомним, что покрытие пар (X, A) называется парой $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_X, \mathcal{U}_A)$, где $\mathcal{U}_X = \{U_i \mid i \in \mathcal{I}_X\}$ - покрытие пространства X и $\mathcal{U}_A = \{U_i \cap A \mid i \in \mathcal{I}_A \subset \mathcal{I}_X\}$ - покрытие простран-

ства A и что мощностью такого покрытия называется $\text{card } \mathcal{U}_X$.

4. Следствие. Пусть \mathcal{M} - бесконечное кардинальное число и G - абелева группа. Если $\text{card } G \leq \mathcal{M}$, то для произвольной пары (X, A) , в которой пространства X, A паракомпактны и регуляры, имеет место канонический изоморфизм

$$\check{H}(X, A; G) \approx \varinjlim N(N(\mathcal{U}_X), N(\mathcal{U}_A); G),$$

где $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_X, \mathcal{U}_A)$ принадлежит конфинальному подмножеству класса всех открытых покрытий мощности $\leq \mathcal{M}$ пары (X, A) .

В частности, если группа G конечна или счетна и подпространство A замкнуто, то когомологии Александры-Чеха $\check{H}(X, A; G)$ полностью определяются классом счетных (звездно конечных) открытых покрытий пространства X .

Доказательство. Первая часть следствия в случае $A = \emptyset$ вытекает непосредственно из следствия 3 и [1, Теорема A], так как существуют полиэдры Эйленберга-Маклейна $K(G, m)$ мощности $\leq \mathcal{M}$ и общий случай легко сводится к этому частному с помощью 5-леммы.

Вторая часть следствия очевидна.

Доказательство теоремы 1. Так как биективность отображения $\Phi(X, A; Y, B)$ влечет за собой биективность отображения $\Phi(X, A; Y', B')$ для любой пары (Y', B') , которая доминируется парой (Y, B) , то можно предполагать $(Y, B) = (E, F)$. Но в этом случае доказательство отличается от доказательства теоремы B работы [1] существом

лишь тем, что ссылки на паракомпактность пространства X нужно заменить ссылками на известные свойства нормальных покрытий и следующие результаты:

(а) Если $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ - нормальное покрытие произведения $X \times [0, 1]$, то существуют нормальное открытое покрытие $\mathcal{V} = \{V_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ пространства X и такие конечные (регулярные) открытые покрытия $\mathcal{W}_j = \{W_{j,k} \mid 0 \leq k \leq k_j\}$ ($j \in \mathcal{J}$) отрезка $[0, 1]$, что покрытие $\{V_j \times W_{j,k} \mid j \in \mathcal{J}, 0 \leq k \leq k_j\}$ пространства $X \times [0, 1]$ (очевидно нормальное) вписано в покрытие \mathcal{U} и $\text{card } \mathcal{J} \leq \max(k_0, \text{card } \mathcal{J})$. См. [2, доказательство теоремы 4.8].

(б) Пространство нормально и m -паракомпактно тогда и только тогда, когда оно регулярно и каждое его открытое покрытие мощности $\leq m$ нормально [10, Теорема 1.1].

(в) Прямое произведение m -паракомпактного нормального пространства и бикompактного регулярного пространства веса $\leq m$ нормально и m -паракомпактно [10, Теорема 2.1, 2.2].

Л и т е р а т у р а

- [1] БАРИК В.: Когомологии Александрова-Чеши и отображения в полнотриангли Эйленберга-Маклеина, Мат. сб. (Н.С.) 76(118:2) (1968), 231-238.
- [2] DOLD Albrecht, Partitions of unity in the theory of fibrations, Ann. Math. 78(1963), 223-255.
- [3] DOLD A.: Lectures on Algebraic Topology, Springer-Verlag, 1972.
- [4] GOTO Tatsuo: Homotopical cohomology groups of paracompact spaces, Sci. Repts. Tokyo Kyoiku Dai-

gaku, A9(1967), N. 214-219, 163-169.

- [5] GOTO Tatsuo: A note on Künneth formula, Sci. Repts. Tokyo Kyoiku Daigaku, 10(1969), N. 249-262, 219-222.
- [6] HU S.T.: Mappings of a normal space into an absolute neighborhood retract, TAMS 64(1940), 336-358.
- [7] KODAMA Y.: Mappings of a fully normal space into an absolute neighborhood retract, Sci. Rept. Tokyo Kyoiku Daigaku, A5(1955), 37-47.
- [8] LEE C.N., RAYMOND F.: Čech extensions of contravariant functors, TAMS 123, 415-434(1968).
- [9] MILNOR J.: On spaces having the homotopy type of a CW-complex, TAMS 90(1959), 272-280.
- [10] MORITA K.: Paracompactness and product spaces, Fund. Math. 50(1962), 223-236.

Matematický ústav ČSAV

Žitná 25

Praha 1

Československo

(Oblatum 27.5. 1975)