Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Jacques Bair; René Fourneau

Une démonstration géométrique du théorème de Choquet-Kendall

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 16 (1975), No. 4, 683--691

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105656

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

16,4 (1975)

UNE DEMONSTRATION GEOMETRIQUE DU THEOREME DE CHOQUET - KENDALL

Jacques BAIR et René FOURNEAU, Liège

Résumé: Dans cette note, nous donnons une nouvelle preuve très simple du théorème de Choquet-Kendall qui caractérise les cônes convexes à base qui érigent un espace vectoriel en lattis vectoriel. Notre preuve est essentiellement géométrique à l'inverse des démonstrations classiques.

Mots clefs: Lattis vectoriels, simplexes de Choquet.

AMS: 46A40, 52A05 Ref. Ž.: 7.972.1,3.918.1

---

1. Introduction. Le théorème de Choquet-Kendall caractérise les cônes convexes à base qui érigent un espace vectoriel en lattis vectoriel, c'est-à-dire les cônes convexes à base qui rencontrent chacun de leurs translatés suivant un de leurs translatés ou, en d'autres termes, les cônes convexes à base qui sont des simplexes de Choquet de codimension nulle.

Au contraire de Kendall [IV] et de Peressini [V, 3.11, p. 30], nous avons rejeté de notre démonstration tout appel à la structure ordonnée sur E engendrée par le cône convexe considéré. Nous avons voulu mettre en évidence l'aspect géométrique du problème; ce procédé fournit une preuve dont l'idée fondamentale est fort simple.

Pour démontrer que si un cône convexe P de base B rencontre chacun de ses translatés suivant un de ses translatés, alors B est un simplexe de Choquet algébriquement fermé, algébriquement borné et de codimension 1, on utilise le fait que B est la trace sur P d'un certain hyperplan $f^{-1}(\{1\})$, où f est une forme linéaire strictement positive sur $P\setminus\{0\}$. La preuve de la réciproque se fait en quatre étapes très naturelles. On démontre tout d'abord que $P\cap(P+x)$ est la réunion d'intersections du type $\lambda B\cap[(\lambda - f(x))B + x)]$; ensuite, on vérifie que chacune de ces intersections est un ensemble de la forme $\gamma_\lambda B + y_\lambda$, avec $\gamma_\lambda \geq 0$ et $y_\lambda \in P\cap(P+x)$; puis on s'assure que le point y_λ est le même pour chaque λ, ce qui permet de conclure très rapidement.

2. __Généralités__. Nous nous placerons dans un espace vectoriel réel E de dimension non nulle.

Un ensemble A est dit __algébriquement fermé__ s'il coïncide avec son enveloppe algébrique ${}^bA = A\cup\{x\in E :$ $: \exists\, y\in A\setminus\{x\}, [y:x[\subset A\}$; un ensemble A est __algébriquement borné__ si son enveloppe algébrique ne contient aucune demi-droite; __l'enveloppe spatiale__ d'une partie A de E, notée ${}^sA$, est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A.

Un sous-ensemble convexe non vide S de E est un __simplexe de Choquet__ si, pour tous x, $y\in E$ et tous α, $\beta \geq 0$,

$$(x+\alpha S)\cap(y+\beta S)$$

est vide ou de la forme $z + \gamma S$ ($z \in E$, $\gamma \geq 0$). De façon équivalente, un convexe non vide S est un simplexe de Choquet si et seulement si, pour tout $x \in E$ et tout $\alpha \geq 0$,

$$S \cap (x + \alpha S)$$

est vide ou de la forme $y + \beta S$ ($y \in E$, $\beta \geq 0$).

Un ensemble S est appelé un <u>cône pointé</u> (<u>de sommet</u> 0) lorsque $\lambda S \subset S$ pour tout réel $\lambda \geq 0$. Une <u>base</u> d'un cône convexe P est en ensemble convexe B tel que, pour tout $x \in P \setminus \{0\}$, il existe un nombre positif unique $f(x)$ tel que $\dfrac{x}{f(x)} \in B$; bien entendu, $P \setminus \{0\} = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda B$. Il est bien connu [V, 3.6, p. 26] qu'un ensemble B est une base du cône convexe P si et seulement s'il existe une forme linéaire h sur E , strictement positive sur $P \setminus \{0\}$, telle que

$$B = h^{-1}(\{1\}) \cap P \text{ .}$$

Par ailleurs, on sait qu'un ordre linéaire de cône positif P érige E en lattis vectoriel si et seulement si P rencontre chacun de ses translatés suivant un de ses translatés [V, 3.8, p. 28] , ce qui entraîne évidemment que P est un simplexe de Choquet. De plus, si P admet une base B et si l'ordre associé à P érige E en lattis, cet ordre est archimédien [V, 3.5, p. 26] ou, en d'autres termes, P est algébriquement fermé [II, 1.3.4, p. 13] ; en corollaire, B est algébriquement fermé comme intersection de deux ensembles algébriquement fermés.

3. Théorème. Pour un cône convexe P de base B, les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) P rencontre chacun de ses translatés selon un de ses translatés,

(b) B est un simplexe de Choquet de codimension 1, algébriquement fermé et algébriquement borné.

Le résultat est banal lorsque la dimension de E vaut 1 ; nous nous placerons donc en dehors de ce cas.

Désignons par f la forme linéaire sur E, strictement positive sur $P\setminus\{0\}$ et telle que $B = P\cap f^{-1}(\{1\})$.

(a) $\Longrightarrow$ (b). Soient $\alpha \geq 0$ et $x\in E$ tels que $(\alpha B + x)\cap B \neq \emptyset$. Ceci exige que $f(x) = 1 - \alpha$. Exprimons $\alpha B + x$ en termes de f :

$$\begin{aligned}\alpha B + x &= \{u : u\in P + x,\ f(u) = \alpha + f(x) = 1\}\\ &= (P + x)\cap f^{-1}(\{1\}) .\end{aligned}$$

De là, comme il existe $y\in E$ tel que $P\cap (P + x) = P + y$, on trouve de même

$$\begin{aligned}B\cap (\alpha B + x) &= (P + y)\cap f^{-1}(\{1\})\\ &= [1 - f(y)]\, B + y\end{aligned}$$

avec $1 - f(y)\geq 0$. En conséquence, B est un simplexe de Choquet.

Du dernier énoncé rappelé dans le paragraphe précédent, il résulte que B est algébriquement fermé.

De plus, B est algébriquement borné. De fait, s'il existait une demi-droite D dans ${}^bB = B$, la translatée D' de D issue de 0 serait incluse dans $P\cap f^{-1}(\{0\})$ [III, 1.3, p. 263] donc la forme linéaire f ne serait pas strictement positive sur $P\setminus\{0\}$.

Enfin, la codimension de B vaut 1 puisque P doit engendrer E .

(b) $\Longrightarrow$ (a). Soit $x\in E$. On a

$$P\cap(P + x) = (\bigcup_{\lambda\geq 0}\lambda B)\cap[(\bigcup_{\mu\geq 0}\mu B) + x]$$

$$= \bigcup_{\lambda,\mu\geq 0}[\lambda B\cap(\mu B + x)] .$$

Or, si $\lambda B\cap(\mu B + x)\neq\emptyset$, on a $\lambda = \mu + f(x)$, donc

$$P\cap(+ x) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{\lambda B\cap[(\lambda - f(x))B + x]\}$$

où Λ désigne l'ensemble

$$\{\lambda\geq 0 : \{\lambda B\cap[(\lambda - f(x))B + x]\}\neq\emptyset\} ;$$

Λ n'est pas vide puisque, B étant de codimension 1 , $P\cap(P+ x)\neq\emptyset$.

Soit λ un élément arbitraire de Λ .

Comme B est un simplexe de Choquet, il existe $\gamma_\lambda\geq 0$ et $y_\lambda\in E$ tels que

$$\lambda B\cap[(\lambda - f(x))B + x] = \gamma_\lambda B + y_\lambda .$$

Montrons que $y_\lambda\in P$.

Traitons d'abord le cas où $\lambda\neq 0$ et $\gamma_\lambda\neq 0$.

Soit $b\in B$. La bijection affine $T_\lambda : E\longrightarrow E$ définie par

$$T_\lambda : u\longrightarrow\frac{\gamma_\lambda}{\lambda}u + y_\lambda$$

est telle que

$T_\lambda([\lambda b : \gamma_\lambda b + y_\lambda)) =$

$= [\gamma_\lambda b + y_\lambda : \frac{\gamma_\lambda}{\lambda}(\gamma_\lambda b + y_\lambda) + y_\lambda) \subset [\lambda b : \gamma_\lambda b + y_\lambda)$

si $\lambda b \neq \gamma_\lambda b + y_\lambda$. Il suffit en effet de remarquer que

$\frac{\gamma_\lambda}{\lambda}(\gamma_\lambda b + y_\lambda) + y_\lambda =$

$= \lambda b + (\frac{\gamma_\lambda}{\lambda} + 1)(\gamma_\lambda b + y_\lambda - \lambda b) \in [\lambda b : \gamma_\lambda b + y_\lambda) \setminus$

$\setminus [\lambda b : \gamma_\lambda b + y_\lambda]$.

Comme B (donc λB) est algébriquement fermé et algébriquement borné, il existe $b' \in B$ tel que

$$\lambda B \cap [\lambda b : \gamma_\lambda b + y_\lambda) = [\lambda b : \lambda b'] .$$

Considérons l'image $\gamma_\lambda b' + y_\lambda$ de $\lambda b'$ par T_λ ; on a

$\gamma_\lambda b' + y_\lambda \in T_\lambda(\lambda B) \cap T_\lambda([\lambda b : \gamma_\lambda b + y_\lambda)) =$

$(\gamma_\lambda B + y_\lambda) \cap [\gamma_\lambda b + y_\lambda : \frac{\gamma_\lambda}{\lambda}(\gamma_\lambda b + y_\lambda) + y_\lambda) \subset \lambda B \cap$

$\cap [\lambda b : \gamma_\lambda b + y_\lambda)$

d'où $\gamma_\lambda b' + y_\lambda \in [\gamma_\lambda b + y_\lambda : \lambda b']$.

Comme T_λ est une bijection affine, y_λ appartient à la parallèle à $[0 : \lambda b]$ menée par $\gamma_\lambda b + y_\lambda$, et à la parallèle à $[0 : \lambda b']$ menée par $\gamma_\lambda b' + y_\lambda$. Ces deux parallèles, qui sont situées dans le plan (sous-espace de dimension 2) engendré par λb et $\gamma_\lambda b + y_\lambda$, se rencontrent au point y_λ qui appartient alors à ${}^{c}\{0, \lambda b, \lambda b'\}$, donc à P.

Envisageons le cas où $\lambda b = \gamma_\lambda b + y_\lambda$. S'il existe $b_1 \in B$ tel que $\lambda b_1 \neq \gamma_\lambda b_1 + y_\lambda$, on peut reprendre le raisonnement ci-dessus. Sinon, $\{y_\lambda\} = (\lambda - \gamma_\lambda)B$, auquel cas on doit admettre que $\gamma_\lambda = \lambda$ et $y_\lambda = 0 \in P$.

Traitons enfin les deux cas laissés en suspens. Si $\gamma_\lambda = 0$, $y_\lambda \in \lambda B \subset P$. Si $\lambda = 0$, $\lambda B = \{0\}$, d'où $y_\lambda = 0 \in P$.

Dès lors, on a toujours $y_\lambda \in P$. De façon analogue, on peut montrer que $y_\lambda \in P + x$, donc

$$y_\lambda \in P \cap (P + x) .$$

A priori, y_λ pourrait varier avec λ ; montrons qu'il n'en est rien.

Comme $y_\lambda \in P \cap (P + x)$, il existe α, $\beta \geq 0$ et b_1, $b_2 \in B$ tels que

$$y_\lambda = \alpha b_1 = x + \beta b_2 = x + [\alpha - f(x)]\, b_2 ,$$

donc il existe $y \in E$ et $\gamma \geq 0$ tels que

$$\alpha B \cap \{x + [\alpha - f(x)]B\} = y + \gamma B$$

et on peut démontrer comme ci-dessus que $y \in P \cap (P + x)$.

Visiblement, $y_\lambda \in y + \gamma B \subset y + P$. Montrons que $y \in y_\lambda + P$.

Comme $f(y_\lambda) = \alpha$, on a $\lambda = \alpha + \gamma_\lambda$ et, de plus, $\gamma + f(y) = \alpha$, d'où $\gamma + \gamma_\lambda + f(y) = \lambda$.

Dès lors,

$$\begin{aligned} y + (\gamma + \gamma_\lambda)B &= (P + y) \cap f^{-1}(\{\lambda\}) \\ &\subset P \cap (P + x) \cap f^{-1}(\{\lambda\}) \\ &= \lambda B \cap \{x + [\lambda - f(x)]\, B\} \\ &= y_\lambda + \gamma_\lambda B , \end{aligned}$$

donc

$[y + (\gamma + \gamma_\lambda)B] \cap (y_\lambda + \gamma_\lambda B) = y + (\gamma + \gamma_\lambda)B$.

Un raisonnement analogue à celui qui a fourni $y_\lambda \in P \cap (P + x)$ livre $y \in P + y_\lambda$.

De là, $y = y_\lambda$, donc $\gamma = 0$, puisque $\alpha = f(y_\lambda) = f(y) + \gamma = f(y_\lambda) + \gamma$. Au total,

$$\alpha B \cap \{x + [\alpha - f(x)] B\} = \{y\} = \{y_\lambda\} .$$

Soit $\lambda' \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$. On obtient de même $y_{\lambda'}$, $\gamma_{\lambda'}$, α' tels que

$$\lambda' B \cap \{x + [\lambda' - f(x)]B\} = y_{\lambda'} + \gamma_{\lambda'} B ,$$

$$\{y_{\lambda'}\} = \alpha' B \cap \{x + [\alpha' - f(x)] B\} \subset P \cap (P + x) .$$

Supposons, pour fixer les idées, que $\alpha \geq \alpha'$. Considérons à présent $y_{\lambda'} + (\alpha - \alpha')B$: il vient

$$\begin{aligned} y_{\lambda'} + (\alpha - \alpha')B &= (P + y_{\lambda'}) \cap f^{-1}(\{\alpha\}) \\ &\subset P \cap (P + x) \cap f^{-1}(\{\alpha\}) \\ &= \alpha B \cap \{x + [\alpha - f(x)] B\} = \{y_\lambda\} , \end{aligned}$$

donc $\alpha = \alpha'$ et $y_\lambda = y_{\lambda'}$.

Désignons par u le point y_λ associé à chaque $\lambda \in \Lambda$. On a

$$P \cap (P + x) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\gamma_\lambda B + u) \subset P + u .$$

Comme $u \in P \cap (P + x)$, $P + u \subset P \cap (P + x)$, donc

$$P \cap (P + x) = P + u .$$

B i b l i o g r a p h i e

[I] J. BAIR - R. FOURNEAU: Introduction à l'étude géométrique des espaces vectoriels, Séminaire ronéotypé, Université de Liège,1974.

[II] G. JAMESON: Ordered Linear Spaces, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[III] F. JONGMANS: Théoreme de Krein-Milman et programmation mathématique, Bull. Soc. Royale Sc. Liège 37(1968),261-270.

[IV] D.G. KENDALL: Simplexes and vector lattices, J. London Math. Soc. 37(1962),365-371.

[V] A.L. PERESSINI: Ordered Topological Vector Spaces, Harper and Row, New York-Evanston-London, 1967.

Institut de Mathématique

Université de Liège

Avenue des Tilleuls, 15

B-4000 Liège (Belgium)

(Oblatum 11.6. 1975)