Osvald Demuth

О конструктивных псевдочислах

*Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, Vol. 16 (1975), No. 2, 315--331

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105626

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

16,2 (1975)

# О КОНСТРУКТИВНЫХ ПСЕВДОЧИСЛАХ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Прага

Содержание: В настоящей заметке исследуется сходимость в себе последовательностей рациональных чисел, образующих конструктивные псевдочисла. Определены $\Pi_1$-числа - подкласс псевдочисел замкнутый относительно равенства псевдочисел, у элементов которого имеется некоторая еффективность упомянутой сходимости.

Ключевые слова: Конструктивные псевдочисла, рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества, конструктивные функции.

AMS: 02E99 Ref. Ž.: 2.644.2

---

В следующем $k, \ell, m, n, p, q, s$ и $t$ переменные для НЧ (положительных целых чисел), $i$ и $j$ переменные для ЦЧ, $a, b, c, d$ и $r$ переменные для РЧ и $x$ и $y$ переменные для КДЧ.

Определение. Слово $P$ в алфавите $\{0, 1, -, /, \Diamond\}$ мы назовем определяющим значащим словом (ОЗС), если $P$ является РЧ или $P \rightleftharpoons \{\mathfrak{A}\}\Diamond$, где $\mathfrak{A}$ последовательность РЧ (ПРЧ). Если $P$ ОЗС, то $\ulcorner P \urcorner$ ПРЧ (ср. [1]), причем в случае, что $P$ РЧ, то $\forall n\, (\ulcorner P \urcorner(n) \rightleftharpoons P)$, а если $P \rightleftharpoons \{\mathfrak{A}\}\Diamond$, то $\forall n\, (\ulcorner P \urcorner(n) \rightleftharpoons \mathfrak{A}_{\llcorner n \lrcorner})$ .

В следующем $\xi$ и $\eta$ переменные для ОЗС.

Пусть $\mathcal{L}$ алгорифм перечисляющий без повторений все невырожденные рациональные сегменты, а $\mathcal{U}$ универсальный арифметический алгорифм ( [2], теорема 1.1).

Если $a$ и $b$ РЧ, то мы обозначим

$[a, b] \rightleftharpoons min(a, b) \triangle max(a, b)$ .

В следующем, пока не сказано другое, под сегментами понимаем невырожденные сегменты, краи которых КДЧ.

<u>Обозначение</u>. Пусть $x$ РЧ и $Q$ выражение представляющее собой или объединение конечного числа (невырожденных или вырожденных) рациональных сегментов или разнсоть таких объединений. Тогда $\mathfrak{M}(x, Q)$ обозначает: $x$ является мерой Лебега множества КДЧ $\lambda x(x \in Q)$ .

<u>Определения</u>. Пусть P ОЗС. Тогда мы скажем, что

1) P квазичисло (КЧ), и обозначим $P \in K$ , если

$$\neg\neg \forall m \exists n \forall k (n < k \supset |\underline{P}(k) - \underline{P}(n)| < \frac{1}{2^m})$$ (см. [1]) ,

2) P псевдочисло (ПЧ), и обозначим $P \in \Pi$ , если

$$\forall m \neg\neg \exists n \forall k (n < k \supset |\underline{P}(k) - \underline{P}(n)| < \frac{1}{2^m})$$ (см.[1], стр. 170) ,

3) P $\Pi_1$-число ($\Pi_1$Ч), и обозначим $P \in \Pi_1$ , если существует последовательность неинфинитных рекурсивных множеств НЧ $\{C_m\}_m$ такая, что

$$\forall m \, l \, x (\mathfrak{M}(x, \bigcup_{\substack{1 \le n \le l \\ \neg(n \in C_m)}} [\underline{P}(n), \underline{P}(n+1)]) \supset x < \frac{1}{2^m}) ,$$

4) P $\Pi_2$-число ($\Pi_2$Ч), и обозначим $P \in \Pi_2$ , если $P \in \Pi \,\&\, \neg(P \in \Pi_1)$ .

Мы заметим, что всякое $\Pi_1$-число является псевдочислом.

Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{Y}$ алгорифмы такие, что для всяких НЧ $n$ и $m$ верно $!\mathcal{C}\llcorner n\, m \lrcorner \,\&\, \forall t (!\mathcal{Y}\llcorner n\, m\, t \lrcorner)$, $\mathcal{C}\llcorner n\, m \lrcorner$ НЧ,

$\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{C}\llcorner n\, m\lrcorner\,\square}$ стройный алгорифм и для всякого НЧ $k$ выполнено

а) $!\,\mathcal{U}\llcorner \mathcal{C}\llcorner n\, m\lrcorner \square k\lrcorner$, тогда и только тогда, когда $\forall \ell\, (1 \le \ell \le k \supset\, !\,\mathcal{U}\llcorner n \square \ell\lrcorner)$, $\{\mathcal{B}\llcorner \mathcal{U}\llcorner n\square \ell\lrcorner\lrcorner\}_{\ell=1}^{k}$ система неперекрывающихся сегментов и $\sum_{\ell=1}^{k} |\mathcal{B}\llcorner \mathcal{U}\llcorner n \square \ell\lrcorner\lrcorner| < \frac{1}{2^m}$ ,

б) $!\,\mathcal{U}\llcorner\mathcal{C}\llcorner n\, m\lrcorner\square k\lrcorner \supset \mathcal{U}\llcorner \mathcal{C}\llcorner n\, m\lrcorner \square k\lrcorner \simeq \mathcal{U}\llcorner n\square k\lrcorner$ и

в) $\exists t\, (\mathcal{T}\llcorner n\, m\, t\lrcorner \simeq \Lambda) \equiv \exists k\, (\forall \ell\, (1\le \ell\le k \supset$

$\supset\, !\,\mathcal{U}\llcorner n\square\ell\lrcorner) \,\&\, \neg\, !\,\mathcal{U}\llcorner\mathcal{C}\llcorner n\, m\lrcorner\square k\lrcorner)$ .

<u>Обозначения</u>. 1) Если $\mathcal{F}$ псевдоравномерно непрерывная функция, то мы посредством $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ обозначим псевдооператор, который является продолжением функции $\mathcal{F}$ (см.[5]), т.е. такой, что

$$\forall x\, \xi\, (\xi \in \Pi \,\&\, x = \xi \supset \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(\xi) = \mathcal{F}(x)) .$$

2) Если $C$ рекурсивно перечислимое множество НЧ, то мы посредством $\{C^{(\ell)}\}_{\ell}$ обозначим последовательность систем разных НЧ такую, что $C^{(1)}$ пустая система, $\forall n\, (n \in C \equiv$ $\equiv \exists \ell\, (n \in C^{(\ell)}))$ и для всякого НЧ $\ell$ существует НЧ $n_\ell$ , для которого верно $C^{(\ell)} \subseteq C^{(\ell+1)} \subseteq C^{(\ell)} \cup \{n_\ell\}$ .

<u>Лемма 1</u>. Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{r+\lambda}$ и $\{b_i\}_{i=1}^{r+\lambda}$ системы РЧ, $\{c_j \triangle d_j\}_{j=1}^{\sigma}$ система неперекрывающихся рациональных сегментов, $m$ НЧ, а $\varkappa$ РЧ такие, что $r$ , $\lambda$ и $\sigma$ ЦЧ,

$0 \le r \,\&\, 0 \le \lambda \le 1 \,\&\, 0 \le \sigma$, $(\bigcup_{i=1}^{r} [a_i, b_i] \subseteq \bigcup_{j=1}^{\sigma} c_j \triangle d_j) \,\&$ $\&\, \mathfrak{M}(\varkappa, \bigcup_{j=1}^{\sigma} c_j \triangle d_j \setminus \bigcup_{i=1}^{r} [a_i, b_i]) \,\&\, \varkappa < \frac{1}{2^m}$ .

Тогда существуют ЦЧ $\varkappa$ , $0 \leq \varkappa$ , система дизъюнктных рациональных сегментов $\{c_j \Delta d_j\}_{j=\sigma+1}^{\sigma+\varkappa}$ и РЧ $\bar{\pi}$ такие, что $\{c_j \Delta d_j\}_{j=1}^{\sigma+\varkappa}$ система неперекрывающихся сегментов, $\mathfrak{m}(\bar{\pi}, \bigcup_{j=1}^{\sigma+\varkappa} c_j \Delta d_j \setminus \bigcup_{i=1}^{r+\lambda} [a_i, b_i])$ , причем выполнено

$$(\varkappa = 0 \equiv (\lambda = 0 \vee \lambda = 1 \,\&\, ([a_{r+1}, b_{r+1}] \subseteq \bigcup_{j=1}^{\sigma} c_j \Delta d_j))) \,\&$$

$$(0 < \varkappa \supset \bigcup_{j=\sigma+1}^{\sigma+\varkappa} c_j \Delta d_j \subseteq L \,\&\, (L \cup \bigcup_{j=1}^{\sigma} c_j \Delta d_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\sigma+\varkappa} c_j \Delta d_j)) ,$$

где

$$L \rightleftharpoons (min(a_{r+\lambda}, b_{r+\lambda}) - \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{2^m} - \pi)) \Delta (max(a_{r+\lambda}, b_{r+\lambda}) + \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{2^m} - \pi))$$. Таким образом, $2 \cdot (\frac{1}{2^m} - \bar{\pi}) \geq \frac{1}{2^m} - \pi$ .

<u>Лемма 2</u>. Пусть $\xi$ ОЗС, $m$ НЧ, а $C$ рекурсивно перечислимое множество НЧ. Тогда существуют последовательность систем неперекрывающихся рациональных сегментов $\{\{c_j \Delta d_j\}_{j=1}^{\varkappa_\ell}\}_\ell$ и последовательность РЧ $\{\pi_\ell\}_\ell$ такие, что для всякого НЧ $\ell$ выполнено

$$0 \leq \varkappa_\ell \leq \varkappa_{\ell+1} \,\&\, (\bigcup_{n \in C(\ell)} [\underline{\xi}(n), \underline{\xi}(n+1)] \subseteq \bigcup_{j=1}^{\varkappa_\ell} c_j \Delta d_j) \,\&$$

$$\mathfrak{m}(\pi_\ell, \bigcup_{j=1}^{\varkappa_\ell} c_j \Delta d_j \setminus \bigcup_{n \in C(\ell)} [\underline{\xi}(n), \underline{\xi}(n+1)]) \,\&\, \pi_\ell < \frac{1}{2^m} ,$$

причем, если $\xi \in \Pi$ и $\setminus C$ (т.е. дополнение $C$ ) неинфинитное множество, то

$$\neg\neg \exists p (\forall \ell (p \leq \ell \supset \varkappa_\ell = \varkappa_p) \,\&\, \xi \in \bigcup_{j=1}^{\varkappa_p} c_j \Delta d_j) .$$

<u>Доказательство</u>. Последовательность $\{\{c_j \Delta d_j\}_{j=1}^{\varkappa_\ell}\}_\ell$ мы построим на основании последовательностей систем РЧ $\{\{\underline{\xi}(n)\}_{n \in C(\ell)}\}_\ell$ и $\{\{\underline{\xi}(n+1)\}_{n \in C(\ell)}\}_\ell$ согласно лемме 1.

На основании леммы 2 легко доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\xi$ ПЧ (соотв. $\xi$ $П_1$Ч). Тогда существует последовательность неинфинитных рекурсивно перечислимых множеств НЧ $\{R_q\}_q$ такая, что

1) для всякого НЧ $q$

а) сегменты $\mathcal{L}_\llcorner l_\lrcorner$, $l \in R_q$, неперекрываются и $\xi$ квази содержится внутри их объединения,

б) $\forall l (l \in R_{q+1} \supset \exists k (k \in R_q \,\&\, \mathcal{L}_\llcorner l_\lrcorner \subseteq \mathcal{L}_\llcorner k_\lrcorner))$ и

2) $\forall m \neg\neg \exists q (\sum_{l \in R_q} |\mathcal{L}_\llcorner l_\lrcorner| < \frac{1}{2^m})$

(соотв. $\forall m (\sum_{l \in R_m} |\mathcal{L}_\llcorner l_\lrcorner| < \frac{1}{2^m})$ ).

Теорема 2. Для всякого НЧ $t$ существует последовательность рациональных сегментов $\{K_s^t\}_s$ такая, что

1) $\forall l (\sum_{s=1}^{l} |K_s^t| < \frac{1}{2^t})$ ,

2) $\forall x \exists s (Э_л(K_s^t) < x < Э_п(K_s^t))$ ,

3) для всякого $П_1$Ч $\xi$ существует неинфинитное рекурсивно перечислимое множество НЧ $C$ такое, что сегменты $K_s^t$ , $s \in C$ , не перекрываются и $\xi$ квази содержится внутри их объединения,

4) если $\{\{a_i^l \triangle b_i^l\}_{i=1}^{v_l}\}_l$ последовательность систем неперекрывающихся рациональных сегментов такая, что

$\left(\sum_{i=1}^{r_\ell} |a_i^\ell \triangle b_i^\ell|\right) \xrightarrow[\ell\to\infty]{} 0$ , то существуют НЧ $\ell_0$ и система НЧ $\{s_i\}_{i=1}^{r_{\ell_0}}$ такие, что

$\forall i\,(1 \le i \le r_{\ell_0} \supset K^t_{s_i} = a_i^{\ell_0} \triangle b_i^{\ell_0})$ ,

5) если $\{D_m\}_m$ последовательность рекурсивно перечислимых множеств НЧ (соотв. неинфинитных р.п.м. НЧ) такая, что $\forall m \ell \left(\sum_{\substack{k \in D_m \\ 1 \le k \le \ell}} |b_\llcorner k_\lrcorner| < \frac{1}{2^m}\right)$ , то существуют НЧ $m_0$ и рекурсивно перечислимое множество НЧ (соотв. неинфинитное р.п.м. НЧ) $C$ такие, что

$$\forall a\,(\exists p\,(p \in C \,\&\, a \in K^t_p) \equiv \exists k\,(k \in D_{m_0} \,\&\, a \in b_\llcorner k_\lrcorner))\ .$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $t$ НЧ, а $\{p_s \square m_s \square k_s\}_s$ последовательность отличных друг от друга троек НЧ такая, что тройка НЧ $p \square m \square k$ содержится в этой последовательности в том и только том случае, если

$t+1 < m \,\&\, !\,\mathcal{U}_\llcorner m \square m_\lrcorner \,\&\, (\mathcal{U}_\llcorner \mathcal{C}_\llcorner \mathcal{U}_\llcorner m \square m_\lrcorner m_\lrcorner \square k_\lrcorner \simeq p)$ .

Для всякого НЧ $s$ мы определим $K^t_s \rightleftharpoons b_\llcorner p_{s\lrcorner}$ .

<u>Теорема 3</u> (ср. теорему 2 из [5]). Существуют последовательность рациональных сегментов $\{H_s\}_s$ и последовательность рекурсивно перечислимых множеств НЧ $\{B_t\}_t$ такие, что для всякого НЧ $t$

1) $(B_t \subseteq B_{t+1}) \,\&\, \forall k \left(\sum_{\substack{1 \le \ell \le k \\ \neg(\ell \in B_t)}} |H_\ell| < \frac{1}{2^t}\right)$ ,

2) если $\xi$ ПЧ, то существует неинфинитное рекурсивно перечислимое множество НЧ $C$ такое, что сегменты $H_s$ , $s \in (C \cap \setminus B_t)$ не перекрываются и $\xi$ квази содержится внутри их объединения и

3) $\forall s\, \exists l (\neg (l \in B_t) \,\&\, K_s^t \asymp H_l)$ (см. теорему 2)

и, следовательно, имеют место утверждения аналогичные частям 2 - 5) теоремы 2; в частности, $\forall x\, \exists l (\neg (l \in B_t) \,\&$ $\&\, Э_л (H_l) < x < Э_п (H_l))$ .

Доказательство. Существует последовательность отличных друг от друга четверок НЧ $\{p_s \square m_s \square l_s \square k_s\}_s$ такая, что четверка $p \square m \square l \square k$ содержится в этой последовательности тогда и только тогда, когда $! \mathcal{U}_\llcorner m \square m + l - 1_\lrcorner \,\&$ $\& (l = 1 \vee 1 < l \,\&\, \forall n (n < l \supset ! \mathcal{U}_\llcorner m \square m + n - 1_\lrcorner \,\&$ $\& \exists q (\mathcal{Z}_\llcorner \mathcal{U}_\llcorner m \square m + n - 1_\lrcorner m q_\lrcorner \asymp \Lambda))) \,\&\, \mathcal{U}_\llcorner \mathcal{C}_\llcorner \mathcal{U}_\llcorner m \square m + l - 1_\lrcorner m_\lrcorner \square k_\lrcorner \simeq p$.

Мы определим $\forall s (H_s \rightleftharpoons \mathcal{B}_\llcorner p_{s\lrcorner})$ . Для всякого НЧ $t$ пусть $B_t$ рекурсивно перечислимое множество всех НЧ $s$ таких, что $m_s \le t + 1 \vee t + 1 < m_s \,\&$ $\& \exists q (\mathcal{Z}_\llcorner \mathcal{U}_\llcorner m_s \square m_s + l_s - 1_\lrcorner m_s q_\lrcorner \asymp \Lambda) \,\&\, 1 < l_s$ .

В следующем мы будем без ссылок пользоваться обозначениями из теорем 2 и 3.

Теорема 4. Для всяких рационального сегмента $a \Delta b$ и НЧ $t$ , $2^{-t} < |a \Delta b|$ , существует последовательность неинфинитных рекурсивно перечислимых множеств НЧ $\{C_p\}_p$ такая, что для любого НЧ $p$

1) $\forall l (l \in C_{p+1} \supset \exists k (k \in C_p \,\&\, \mathcal{B}_\llcorner l_\lrcorner \subseteq \mathcal{B}_\llcorner k_\lrcorner))$ ,

2) сегменты $\mathcal{B}_\llcorner l_\lrcorner$ , $l \in C_p$ , не перекрываются, содержатся в $a \Delta b$ и не имеют общих внутренних точек с сегментами $H_s$ , $1 \le s \le p \,\&\, \neg (s \in B_t)$ , и

3) $\forall c (c \in a \Delta b \supset \neg\neg (\exists l (l \in C_p \,\&\, c \in \mathcal{B}_\llcorner l_\lrcorner) \vee$ $\exists s (1 \le s \le p \,\&\, \neg (s \in B_t) \,\&\, c \in H_s)))$ .

Следовательно, выполнено $\forall p\,(\sum_{l \in C_p} |b \llcorner l \lrcorner| > |a \Delta b| - 2^{-t})\ \&\ \forall x\, \exists p\, \forall l\, (l \in C_p \supset \neg (x \in b \llcorner l \lrcorner))\ \&$ $\&\ \forall \xi\, (\xi \in \Pi \supset \neg\neg\, \exists p\, \forall l\, (l \in C_p \supset \neg (\xi \in b \llcorner l \lrcorner)))$ .

<u>Теорема 5</u>. Пусть $\xi$ ПЧ. Тогда
$\xi \in \Pi_1 \equiv \forall t\, \neg\neg\, \exists s\, (\xi \in K_s^t)$ .

<u>Доказательство</u>. Ввиду части 3 теоремы 2 достаточно ограничиться следующим. Пусть $\xi$ ПЧ и $t$ НЧ такие, что $\neg\neg\, \exists s\, (\xi \in K_s^t)$ . Мы построим неубывающую последовательность НЧ $\{\tau_k\}_k$ такую, что для всякого НЧ $k$ выполнено
$\forall m\, (1 \le m \le k \supset \llcorner \xi \lrcorner (m) \in \bigcup_{s=1}^{\tau_k} K_s^t)\ \&\ (\tau_k < \tau_{k+1} \supset$
$\supset \neg (\llcorner \xi \lrcorner (k+1) \in \bigcup_{s=1}^{\tau_k} K_s^t)\ \&\ \tau_{k+1} = \mu s\, (\llcorner \xi \lrcorner (k+1) \in (K_s^t)^\circ))$ .

Тогда ввиду нашего предположения верно
$\neg\neg\, \exists k\, \forall l\, (k \le l \supset \tau_k = \tau_l)$ .

Мы построим рекурсивное множество НЧ $D_t$ , для которого верно $\forall m\, (\neg (m \in D_t) \equiv ([\llcorner \xi \lrcorner (m), \llcorner \xi \lrcorner (m+1)] \subseteq \bigcup_{s=1}^{\tau_m} K_s^t))$ .
Тогда, очевидно, $D_t$ неинфинитное множество и выполнено

$$\forall m\, \varkappa\, (\mathfrak{M}(\varkappa, \bigcup_{\substack{1 \le m \le m \\ \neg (m \in D_t)}} [\llcorner \xi \lrcorner (m), \llcorner \xi \lrcorner (m+1)]) \supset \varkappa < \frac{1}{2^t})\ .$$

<u>Следствие 1</u>. 1) Пусть $\xi$ ПЧ. Тогда

$$\xi \in \Pi_1 \equiv \neg\neg\, \exists \eta\, (\eta \in \Pi_1\ \&\ \eta = \xi)\ .$$

В частности, всякое квазичисло является $\Pi_1$-числом.

2) Существует $\Pi_2$-число $\xi_0$ такое, что $\llcorner \xi_0 \lrcorner$ неубывающая последовательность РЧ.

<u>Доказательство</u>. Ввиду части 2) теоремы 2 достаточно доказать 2). Пусть $a$ РЧ и $t$ НЧ. Мы построим ОЗС $\xi_0$

такое, что для всякого НЧ $n$ – $\underline{\xi_0}(n)$ максимум всех РЧ $b$, для которых верно $(a-1)\Delta b \subseteq (\bigcup_{s=1}^{n} K_s^t \cup (a-1)\Delta a)$.

Следствие 2. Пусть $\xi$ ПЧ и $\{Q_k\}_k$ последовательность сегментов такие, что

$\neg\neg \exists m \forall \ell (\sum_{k=1}^{\ell} |Q_k| < m) \& \forall \ell \neg\neg \exists k (\ell < k \& \xi \in Q_k)$.

Тогда $\xi \in \Pi_1$.

Таким образом, $(\sum_{s=1}^{k} |H_s|) \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$ и для всякого НЧ $t$ $B_t$ инфинитное множество.

Следствие 3. Пусть $\{\mathcal{L}^k\}_k$ последовательность $S_\sigma$-множеств и $\xi$ ПЧ такие, что для всякого НЧ $k$ мера $\mathcal{L}^k$ меньше чем $\frac{1}{2^k}$ и $\xi \in \mathcal{L}^k$. Тогда $\xi \in \Pi_1$.

Следствия 2 и 3 легко доказать при помощи части 5 теоремы 2 и части 2 теоремы 3.

Следствие 4. Пусть $\xi$ ОЗС. Тогда $\xi \in \Pi_1$ в том и только том случае, если существует последовательность рекурсивно перечислимых множеств НЧ $\{A_m\}_m$ такая, что для всякого НЧ $m$ дополнение $A_m$ неинфинитное множество и верно

$$\forall \ell x (\mathfrak{M}(x, \bigcup_{\substack{1\le n\le \ell \\ n\in A_m}} [\underline{\xi}(n), \underline{\xi}(n+1)]) \supset x < \frac{1}{2^m}).$$

Доказательство. Мы используем лемму 2 и часть 5 теоремы 2.

Замечание. Как известно, для всяких ПЧ $\xi$ и НЧ $m$ существует неинфинитное рекурсивно перечислимое множество НЧ $C$ такое, что $\forall k \ell (\neg(k \in C) \supset |\underline{\xi}(k) - \underline{\xi}(k+\ell)| < \frac{1}{2^m})$.

Лемма 3. Пусть $\{a_s\}_s$ последовательность неотрицательных РЧ, а $\xi$ ОЗС такие, что $\forall n (\underline{\xi}(n) = \sum_{s=1}^{n} a_s) \& \xi \in \Pi_1$.

Тогда для всякого рекурсивно перечислимого множества НЧ $C$ существует $\Pi_1$Ч $\eta$, для которого выполнено $\forall \ell (\underline{\eta}(\ell) = \sum_{s \in C(\ell)} a_s)$.

<u>Следствие</u>. Пусть $a \Delta b$ рациональный сегмент и $\{Q_k\}_k$ последовательность рациональных сегментов такие, что ОЗС $\xi$, для которого выполнено $\forall m (\underline{\xi}(m) = \sum_{k=1}^{m} |Q_k|)$, является $\Pi_1$-числом, и верно $\forall m (\underline{\xi}(m) < |a \Delta b|)$.

Тогда существует $\Pi_1$Ч $\eta$ такое, что $\eta \in a \Delta b$ и для всякого НЧ $\ell$ — $\eta$ не содержится внутри $\bigcup_{k=1}^{\ell} Q_k$.

<u>Замечание</u>. Пусть $\{\Phi_i\}_{i=0}^{\infty}$ универсальное $\varepsilon$-ограниченное интервальное покрытие промежутка $-\infty \nabla \infty$, построенное в доказательстве теоремы 2.1 из [3]. Тогда ввиду следствия леммы 3 для всякого сегмента $a \Delta b$, $\varepsilon < |a \Delta b|$, существует $\Pi_1$Ч $\eta$ такое, что $\eta \in a \nabla b$ & & $\neg \exists i (0 \leq i \;\&\; \eta \in \Phi_i)$ и, следовательно, $\neg \exists \xi (\xi \in K \;\&\; \xi = \eta)$. Аналогичные утверждения верны и для дальнейших видов покрытий, построенных в теоремах 2.2 и 2.3 из [3].

<u>Определение</u>. Покрытие $\Phi$ (см. [8]) мы назовем $\Pi_1$-покрытием, если $\forall \xi (\xi \in \Pi_1 \;\&\; \xi \in 0 \Delta 1 \supset \neg\neg \exists k (\xi \in \Phi_k))$.

<u>Теорема 6</u>. Для всякого НЧ $t$ существует $\Pi_1$-покрытие $\Phi^t$ такое, что

$$\forall m \left(\sum_{k=1}^{m} |\Phi_k^t| < \frac{1}{2^t}\right) \;\&\; \forall s \exists k \left(K_s^t \cap 0 \Delta 1 \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{k} \Phi_\ell^t\right).$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $t$ НЧ. Покрытие $\Phi^t$ можно построить, исходя от $\{K_s^t\}_s$ способом описанным в доказательствах теорем 2.2 и 2.3 из [3].

Следующий аналог теоремы Д. Витали можно доказать методом близким классическому.

Теорема 7. Пусть $a \triangle b$ рациональный сегмент и $\mathcal{V}$ свойство рациональных сегментов такое, что для всяких рационального сегмента $\bar{a} \triangle \bar{b}$ и РЧ $x$, $\bar{a} \triangle \bar{b} \subseteq a \triangle b \,\&$ $\& \, 0 < x < |\bar{a} \triangle \bar{b}|$, верно $(\exists cd(\bar{a} < c < d < \bar{b} \,\&\, x < |c \triangle d| \,\&\, \mathcal{V}(c \triangle d)) \vee \neg \exists cd(\bar{a} < c < d < \bar{b} \,\&\, x < |c \triangle d| \,\&\, \mathcal{V}(c \triangle d)))$.

Тогда существует рекурсивно перечислимое множество НЧ $C$ такое, что сегменты $\mathfrak{B}\llcorner \ell \lrcorner$, $\ell \in C$, обладают свойством $\mathcal{V}$, дизъюнктны и содержатся в $a \nabla b$ и верно

$$\forall cd(a < c < d < b \,\&\, \mathcal{V}(c \triangle d) \supset \exists \ell(\ell \in C \,\&\, \frac{1}{2} \cdot |c \triangle d| \leq |\mathfrak{B}\llcorner \ell \lrcorner| \,\&$$
$$\& \neg(c \triangle d \cap \mathfrak{B}\llcorner \ell \lrcorner = \emptyset))) \,\&\, \forall \xi(\xi \in \Pi_2 \,\&\, \forall m \neg\neg \exists cd(a < c < \xi <$$
$$< d < b \,\&\, |c \triangle d| < \frac{1}{2^m} \,\&\, \mathcal{V}(c \triangle d)) \supset \neg\neg \exists \ell(\ell \in C \,\&\, \xi \in$$
$$\in \mathfrak{B}\llcorner \ell \lrcorner)) \,\&\, ((\max_{\ell \in (C^{(n+1)} \setminus C^{(n)})} |\mathfrak{B}\llcorner \ell \lrcorner|) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0) .$$

Теорема 8. 1) Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{r}$ система $\Pi_1$-чисел и пусть для всякого НЧ $i$, $1 \leq i \leq r$, ПРЧ $\llcorner \xi_i \lrcorner$ является квазимонотонной. Тогда $(\sum_{i=1}^{r} \xi_i) \in \Pi_1$

2) Для всяких $\Pi_1$Ч $\xi$ и квазичисла $\eta$ верно $(\xi + \eta) \in \Pi_1$.

3) Существует $\Pi_1$Ч $\xi_1$ и $\xi_2$ такие, что $\llcorner \xi_1 \lrcorner$ неубывающая ПРЧ и $(\xi_1 + \xi_2) \in \Pi_2$.

4) Для всякого ПЧ $\xi$ существуют $\Pi_1$Ч $\eta_1$ и $\eta_2$ такие, что $\xi = \eta_1 + \eta_2$.

Методом принадлежащим Б.А. Кушнеру [4] можно доказать следующее утверждение.

Теорема 9. Пусть $F$ алгорифмический оператор из $\Pi_1$ до $\Pi$ (соотв. из $\Pi_2$ до $\Pi$ ). Тогда $F$ является почти непрерывным.

Лемма 4 (ср. [7]). Пусть $\{\{x_i^\ell \triangle y_i^\ell\}_{i=1}^{\tau_\ell}\}_\ell$ последовательность систем сегментов и $\{\{p_m^\ell\}_m\}_\ell$ последовательность последовательностей НЧ такие, что

$$((\max_{1\le i\le \tau_\ell} |x_i^\ell \triangle y_i^\ell|) \xrightarrow[\ell\to\infty]{} 0) \,\&\, \forall \ell \neg\neg \exists s \forall j (s \le j \supset p_j^\ell = p_s^\ell) .$$

Тогда существует ПЧ $\eta$ , для которого верно

$$(\neg \exists \ell s p q (\forall j (s \le j \supset p_j^\ell = p \,\&\, p_j^{\ell+1} = q) \,\&\, (\tau_\ell < p \vee p \le$$

$$\le \tau_\ell \,\&\, q \le \tau_{\ell+1} \,\&\, \neg (x_q^{\ell+1} \triangle y_q^{\ell+1} \subseteq x_p^\ell \triangle y_p^\ell))) \supset$$

$$\supset \forall \ell p (\neg\neg \exists s \forall j (s \le j \supset p_j^\ell = p) \supset$$

$$\supset \eta \in x_p^\ell \triangle y_p^\ell)) .$$

Лемма 5. Пусть $\tau$ НЧ, $\{j_i\}_{i=0}^{\sigma}$ возрастающая система ЦЧ, $j_0 = 0 \,\&\, j_\sigma = \tau$ , $n$ НЧ, а $\{q_\ell\}_\ell$ последовательность НЧ такие, что $\widetilde{\mathcal{U}}_{n\square}$ стройный алгорифм, который не является арифметически полным,

$$\forall k (!\,\mathcal{U}\llcorner n \square k+1\lrcorner \supset \forall j (1 \le j \le \tau \supset !\,\mathcal{U}\llcorner \mathcal{U}\llcorner n \square k\lrcorner \square j\lrcorner)) \,\&$$

$$\& \forall \ell (1 \le q_\ell \le \sigma + 1) \,\&\, \neg\neg \exists k \forall \ell (k \le \ell \supset q_k = q_\ell) .$$

Тогда можно построить последовательность НЧ $\{p_\ell\}_\ell$ такую, что $\forall \ell (1 \le p_\ell \le \tau + 1) \,\&\, \neg\neg \exists k \forall \ell (k \le \ell \supset p_k = p_\ell)$ и если $p$ и $q$ НЧ, для которых верно $\exists k \forall \ell (k \le \ell \supset$ $\supset p_\ell = p \,\&\, q_\ell = q)$ , то $p$ наименьшее НЧ $j$ такое, что

$$(q \le \sigma \,\&\, j_{q-1} < j \le j_q \,\&\, \neg\neg \exists k (!\,\mathcal{U}\llcorner n \square k\lrcorner \,\&$$

$$\& \neg !\,\mathcal{U}\llcorner \mathcal{U}\llcorner n \square k\lrcorner \square j\lrcorner)) \vee j = \tau + 1 .$$

Лемма 6. Пусть $\{\{x_i^\ell \triangle y_i^\ell\}_{i=1}^{\tau_\ell}\}_\ell$ последовательность непустых систем неперекрывающихся сегментов такая, что $\forall \ell j (1 \le j \le r_{\ell+1} \supset \exists i (1 \le i \le r_\ell \,\&\, x_j^{\ell+1} \triangle y_j^{\ell+1} \subseteq x_i^\ell \triangle y_i^\ell))$ .

Тогда 1) $\exists \xi (\xi \in \Pi \,\&\, \forall \ell \neg\neg (\xi \in \bigcup_{i=1}^{r_\ell} x_i^\ell \triangle y_i^\ell))$ (Н.А.Шанин [1]),

2) $\forall m \neg\neg \exists \ell (\sum_{i=1}^{r_\ell} |x_i^\ell \triangle y_i^\ell| < \frac{1}{2^m}) \supset \forall \xi (\xi \in \Pi \,\&\, \forall \ell \neg\neg (\xi \in \bigcup_{i=1}^{r_\ell} x_i^\ell \triangle y_i^\ell) \supset \xi \in \Pi_1)$ и

3) $\neg \forall m \neg\neg \exists \ell (\sum_{i=1}^{r_\ell} |x_i^\ell \triangle y_i^\ell| < \frac{1}{2^m}) \supset \exists \xi (\xi \in \Pi_2 \,\&\, \forall \ell \neg\neg (\xi \in \bigcup_{i=1}^{r_\ell} x_i^\ell \triangle y_i^\ell))$ .

Доказательство. Верность 2) ясна. Ввиду того, что можно без ограничения общности предположить $(\max_{1 \le i \le r_\ell} |x_i^\ell \triangle y_i^\ell|) \xrightarrow[\ell \to \infty]{} 0$, и, ввиду лемм 4 и 5 для доказательства 1) и 3) достаточно заметить, что существуют алгорифмы $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ такие, что для всяких НЧ $\ell$ , $i$ и $t$ верно

$$!\mathfrak{X}\llcorner \ell i \lrcorner \equiv (1 \le i \le r_\ell \,\&\, \exists k (\ell < k \,\&\, \neg \exists j (1 \le j \le r_k \,\&\, x_j^k \triangle y_j^k \subseteq x_i^\ell \triangle y_i^\ell))) \quad \text{и}$$

$$!\mathfrak{Y}\llcorner \ell i t \lrcorner \equiv (1 \le i \le r_\ell \,\&\, \exists k (\ell < k \,\&\, \forall j (1 \le j \le r_k \,\&\, x_j^k \triangle y_j^k \subseteq x_i^\ell \triangle y_i^\ell \supset x_j^k \triangle y_j^k \subseteq \bigcup_{p=1}^{k} K_p^t))) .$$

Лемма 7. Пусть $a \triangle b$ рациональный сегмент, $w$ НЧ, $\{\{Q_m^k\}_m\}_k$ последовательность последовательностей рациональных сегментов, а $\{C_k\}_k$ последовательность неинфинитных рекурсивно перечислимых множеств НЧ такие, что

$$\frac{1}{2^w} < |a \triangle b| \,\&\, \forall k t (\sum_{\substack{1 \le m \le t \\ \neg(m \in C_k)}} |Q_m^k| < \frac{1}{2^{w+k}}) .$$

Тогда существует $\Pi_2$Ч $\xi$ , для которого верно $\xi \in a \triangledown b \,\&\, \forall k \neg \exists m (\neg (m \in C_k) \,\&\, \xi \in Q_m^k)$ .

Доказательство. Мы определим для всякого НЧ $l$ - $r_l \rightleftharpoons 2^l$ и $a_i^l \Delta b_i^l \rightleftharpoons (a + \frac{i-1}{2^l} \cdot |a \Delta b|) \Delta (a + \frac{i}{2^l} \cdot |a \Delta b|)$ $(1 \leq i \leq 2^l)$ и построим НЧ $t$ и возрастающую последовательность НЧ $\{k_m\}_m$ такие, что ряд $\sum_m \frac{2^m}{2^{k_m}}$ сходится и верно

$\frac{1}{2^w} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{2^{w+k_m}} + \frac{1}{2^t} < |a \Delta b|$ . Мы обозначим $r_0 \rightleftharpoons 1$, $k_0 \rightleftharpoons 0$ и $\forall m\, (p_m^0 \rightleftharpoons 1)$ .

Пусть $l$ НЧ и пусть мы уже имеем последовательность НЧ $\{p_m^{l-1}\}_m$ , для которой верно $\neg\neg \exists s \forall j\, (s \leq j \supset p_j^{l-1} = p_s^{l-1} \leq r_{l-1})$. Тогда мы при помощи леммы 5 построим последовательность НЧ $\{p_m^l\}_m$ такую, что не могут не существовать НЧ $q$ и $p$ , для которых выполнено $\exists s \forall j\, (s \leq j \supset p_j^{l-1} = q \,\&\, p_j^l = p)$ и $p$ является наименьшим НЧ $i$ таким, что $1 \leq i \leq r_l \,\&\, 2q - 1 \leq$ $\leq i \leq 2q$ и для всякого НЧ $v$ верно

$$\sum_{s=1}^{v} |K_s^t \cap a_i^l \Delta b_i^l| + \sum_{k=1}^{k_l} \sum_{\substack{1 \leq n \leq v \\ \neg (n \in C_k)}} |Q_n^k \cap a_i^l \Delta b_i^l| < \frac{1}{2^{t+l}} + \\ + \sum_{m=1}^{l} \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m} \frac{2^{m-1}}{2^{w+k+l}} .$$

Остается применить лемму 4.

Н.В. Петри [6] доказал, что для всякой последовательности псевдочисел можно построить псевдочисло неравное ни одному ее члену. Ввиду теоремы 1 и лемм 4 - 7 верно следующее.

Теорема 10. Пусть $\{\xi_k\}_k$ последовательность псевдочисел, а $a \Delta b$ сегмент. Тогда $\exists \xi \eta\, (\xi \in \Pi_1 \,\&\, \eta \in \Pi_2 \,\&$ $\&\, \xi \in a \nabla b \,\&\, \eta \in a \nabla b \,\&\, \neg \exists k\, (\xi = \xi_k \vee \eta = \xi_k))$ .

Введенные понятия возможно и полезно использовать в конструктивном математическом анализе. Ведь $\Pi_1$-числа образуют своего рода "универсальное множество нулевой меры". Поэтому можно ожидать, что $\Pi_2$-числа ведут себе лучше чем $\Pi_1$-числа. С другой стороны в случае $\Pi_1$-чисел помогает наличие последовательности неинфинитных рекурсивных множеств НЧ, которая является своего рода регулятором сходимости в себе последовательности РЧ соответствующей $\Pi_1$-числу.

Обозначение. 1) Пусть $\mathcal{F}$ функция, а P и Q слова, которые являются или КДЧ или псевдочислами. Тогда мы обозначим

$$D_{\kappa\lambda}(Q, \mathcal{F}, P) \rightleftharpoons \forall m \neg\neg \exists n \forall a b (a < P < b \,\&\, b - a < \frac{1}{2^n} \supset$$
$$\supset \left| \frac{\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)}{b - a} - Q \right| < \frac{1}{2^m}) \ .$$

Теорема 11. 1) Если функция $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$ (см. [11]), то $\forall \xi (\xi \in \Pi_1 \supset \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(\xi) \in \Pi_1)$ .

2) Если $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, существует $\{F_n\}_m \in S$ такое, что $Д(\mathcal{F}, \{F_m\}_m)$ (см. [9]) и верно $\forall \xi (\xi \in \Pi_1 \supset \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(\xi) \in \Pi_1)$, то $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$ .

Теорема 12. Пусть $\mathcal{F}$ функция, которая не может не быть функцией слабо ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ и пусть $t$ НЧ такое, что для всякого НЧ $k$ верно $a_{\kappa\lambda}(\mathcal{F}_k)$ (см.[10]), где $\forall x (\mathcal{F}_k(x) \simeq \mathcal{F}(min(max(x, Э_\lambda(K_k^t)), Э_m(K_k^t))))$ .

Тогда $a_{\kappa\lambda}(\mathcal{F})$ .

Пример 1. Существуют неубывающие функции $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ такие, что

1) $a_{\kappa\lambda}(\mathcal{F}_1) \,\&\, \exists \xi (\xi \in \Pi_1 \,\&\, \mathcal{O}_{\mathcal{F}_1}(\xi) \in \Pi_2)$ и

2) $\forall x \neg\neg \exists y\, D(y, \mathcal{F}_2, x)\ \&\ \forall \xi (\xi \in \Pi \supset \exists \eta (\eta \in \Pi\ \&$
$\&\ D_{кл}(\eta, \mathcal{F}_2, \xi)))\ \&\ \forall \xi (\xi \in \Pi_1 \supset \sigma_{\mathcal{F}_2}(\xi) \in \Pi_1)$
и вместе с тем $\neg\, a_{кл}(\mathcal{F}_2)$ .

Теорема 13. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, которая не может не быть функцией слабо ограниченной вариации на $0 \vartriangle 1$ . Тогда для всякого $\Pi_2$Ч $\eta$ не может не существовать ЦЧ $j$ такое, что $0 \leq j$ и существует в точности $j$ ПЧ $\xi$ , для которых верно $\sigma_{\mathcal{F}}(\xi) = \eta$ .

Пример 2. Существует равномерно непрерывная функция $\mathcal{F}$ слабо ограниченной вариации на $0 \vartriangle 1$ такая, что $0 \leq \mathcal{F} \leq 1$ и для всяких $\Pi_1$Ч $\eta$ из $0 \vartriangle 1$ и НЧ $p$ не может не существовать возрастающая система ПЧ $\{\xi_i\}_{i=1}^{p}$ , для которой верно $\forall i (1 \leq i \leq p \supset \xi_i \in 0 \vartriangle 1\ \&\ \sigma_{\mathcal{F}}(\xi_i) = \eta)$ .

## Литература

[1] ШАНИН Н.А.: Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова LXVII (1962),15-294.

[2] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д.: Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, там же, 385-457.

[3] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д. и ЦЕЙТИН Г.С.: О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, там же, 458-502.

[4] КУШНЕР Б.А.: Теоремы непрерывности для некоторых типов вычислимых операторов, ДАН СССР 208(1973),1031-1034.

[5] КУШНЕР Б.А.: Об одном типе вычислимых действительных функций, ДАН СССР 215(1974),259-262.

[6] ПЕТРИ Н.В.: Эффективная неперечислимость псевдочисел, Сборник работ по теории алгорифмов и математической логике, ВЦ АН СССР,Москва,1974,143-147.

[7] КУШНЕР Б.А.: Конструктивная версия терремы Кенига, там же, 87-111.

[8] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, Comment. Math.Univ.Carolinae 11(1970),705-726.

[9] ДЕМУТ О.: Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации,Comment.Math. Univ.Carolinae 12(1971),687-711.

[10] ДЕМУТ О.: О суперпозициях абсолютно непрерывных конструктивных функций, Comment.Math.Univ. Carolinae 12(1971),423-451.

[11] ДЕМУТ О. и НЕМЕЧКОВА Л.: О конструктивных аналогах свойств (N) и (S) , Comment.Math.Univ.Carolinae 14(1973),565-582.

Matematicko-fyzikální fakulta

Karlova universita

Sokolovská 83, 18600 Praha 8

Československo

(Oblatum 4.3.1975)