Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Josef Klouda

Eine Bemerkung über ausgezeichnete Kongruenzrelationen der Brandtschen Gruppoiden

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 16 (1975), No. 2, 277--291

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105624`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

16,2 (1975)

EINE BEMERKUNG ÜBER AUSGEZEICHNETE KONGRUENZRELATIONEN DER BRANDTSCHEN GRUPPOIDEN

Josef KLOUDA, Praha

Abstract: Das Hauptziel dieser Arbeit ist solche Bedingungen für eine Kongruenzrelation R von einem Brandtschen Gruppoid $\mathfrak{G}$ abzuleiten, dass R ausgezeichnete ist, d.h. $\mathfrak{G}/_R$ ist auch ein Brandtsches Gruppoid.

Schlüsselwörter: Ausgezeichnete Kongruenzrelation von einem Brandtschen Gruppoid.

AMS: 20L05 Ref. Ž.: 2.722.9

Die vorliegende Arbeit ist aus dem Wunsch heraus entstanden, die Ebenen von Ostrom ([4]) und die Translationsebenen in einen Zusammenhang zu bringen. In [3] sind die Begriffe Partition und Kongruenz eines Brandtschen Gruppoids eingeführt (siehe auch André [1], S. 163) und hier wird gezeigt, dass sich jede affine Ebene durch ein Brandtsches Gruppoid mit einer Kongruenz darstellen lässt. Die vorbezeichnete Untersuchung führt zur Frage: welche Bedingungen sind hinreichend und notwendig dafür, dass eine Kongruenzrelation R von einem Brandtschen Gruppoid $\mathfrak{G}$ ausgezeichnet ist? (d.h. $\mathfrak{G}/_R$ ist auch ein Brandtsches Gruppoid). Das Hauptziel dieser Arbeit soll es sein, solche Bedingungen unter Berücksichtigung der geometrischen Interpretation abzuleiten.

$\mathfrak{G} = (S_{\mathfrak{G}}, \cdot_{\mathfrak{G}})$ ist eine partielle Struktur, wenn $S_{\mathfrak{G}}$ eine nichtleere Menge und $\cdot_{\mathfrak{G}}$ eine partielle Operation ist. Ist $\mathfrak{G}$ eine partielle Struktur, so sei $D(\mathfrak{G})$ die Menge aller $(x,y) \in S^2_{\mathfrak{G}}$, für die das Element $x \cdot_{\mathfrak{G}} y$ existiert. Für die partielle Struktur $\mathfrak{G}$ und $(x,y) \in D(\mathfrak{G})$ werden wir statt $x \cdot_{\mathfrak{G}} y$ einfacher $x \cdot y$ oder nur xy schreiben.

$\mathfrak{G}$ sei eine partielle Struktur. Ein Element $e \in S_{\mathfrak{G}}$ heisst ein Einselement von $\mathfrak{G}$, wenn gilt:

(i) $(x,e) \in D(\mathfrak{G}) \Longrightarrow x.e = x$

(ii) $(e,x) \in D(\mathfrak{G}) \Longrightarrow e.x = x$

Die Menge, die aus allen Einselementen $\mathfrak{G}$ besteht, bezeichnen wir mit $I(\mathfrak{G})$.

Eine partielle Struktur heisst ein Ehremannsches Gruppoid (kurz E-Gruppoid), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Sind $x, y, z \in S_{\mathfrak{G}}$ und existiert eines der Elemente $x(y\,z)$, $(x\,y)z$, so existiert auch das andere, und es gilt $x(y\,z) = (x\,y)z$.

(ii) Ist $x \in S_{\mathfrak{G}}$, dann existieren die Einselemente $\alpha(x)$, $\beta(x) \in I(\mathfrak{G})$ so, dass $(\alpha(x),x)$, $(x,\beta(x)) \in D(\mathfrak{G})$ gilt.

(iii) Ist $x \in S_{\mathfrak{G}}$, dann existiert $x^{-1} \in S_{\mathfrak{G}}$ so, dass $(x^{-1},x) \in D(\mathfrak{G})$ und $x^{-1} \cdot x = \beta(x)$.

Ein Gruppoid $\mathfrak{G}$ ist ein Brandtsches Gruppoid (kurz B-Gruppoid), wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$\forall\, a, b \in I(\mathfrak{G})\ \exists\, x \in S_{\mathfrak{G}} \quad \alpha(x) = a\,,\ \beta(x) = b\,.$

Sei $\mathfrak{G}$ ein E-Gruppoid, $M \subset S_{\mathfrak{G}}$, $(M, \cdot_{\mathfrak{G}})$ ein E-Gruppoid, dann heisst $\mathfrak{H} = (M, \cdot_{\mathfrak{G}})$ ein Teilunutergruppoid des E-Gruppoids $\mathfrak{G}$. Wenn $\mathfrak{H}$ ein Teiluntergruppoid $\mathfrak{G}$ ist und $I(\mathfrak{H}) = I(\mathfrak{G})$, sagen wir, dass $\mathfrak{H}$ ein Untergruppoid $\mathfrak{G}$ ist.

Definition 1. Es sei $\mathfrak{G}$ ein B-Gruppoid, R eine Äquivalenzrelation in $S_{\mathfrak{G}}$. Dann heisst R eine Kongruenzrelation von $\mathfrak{G}$, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

(1) $\forall\, x, y, u, v \in S_{\mathfrak{G}}$

$$x\,R\,u,\; y\,R\,v,\; (x,y),\, (u,v) \in D(\mathfrak{G}) \Longrightarrow x\,y\,R\,u\,v$$

(2) $\forall\, x, y \in S_{\mathfrak{G}} \qquad x\,R\,y \Longrightarrow \alpha(x)\,R\,\alpha(y),\; \beta(x)R\beta(y)$

Wir bezeichnen mit $[x]$ die Menge $\{y \mid y \in S_{\mathfrak{G}},\, yRx\}$. Ist R eine Kongruenzrelation von dem B-Gruppoid $\mathfrak{G}$, definieren wir $[x] \circ [y]$ genau dann, wenn es $u, v \in S_{\mathfrak{G}}$ gibt, so dass $[x] = [u]$, $[y] = [v]$ und $(u,v) \in D(\mathfrak{G})$. Für $(x,y) \in D(\mathfrak{G})$ legen wir $[x] \circ [y] = [x \cdot_{\mathfrak{G}} y]$ fest. Es sei $M := \{[x] \mid x \in S_{\mathfrak{G}}\}$. $(M, \circ)$ heisst Faktorstruktur von $\mathfrak{G}$ nach R (in Zeichnen $\mathfrak{G}/_R$).

$\mathfrak{G}/_R$ ist im allgemeinen kein E-Gruppoid. (Siehe [2], S. 76).

Definition 2. Eine Kongruenzrelation R eines B-Gruppoids $\mathfrak{G}$ heisst eine ausgezeichnete Kongruenzrelation von $\mathfrak{G}$, wenn die Faktorstruktur $\mathfrak{G}/_R$ ein E-Gruppoid ist.

Bemerkung. Ist $\mathfrak{G}$ ein B-Gruppoid, R eine ausgezeichnete Kongruenzrelation von $\mathfrak{G}$, so ist offenbar $\mathfrak{G}/_R$ auch ein B-Gruppoid.

Definition 3. Eine Kongruenzrelation R eines B-Gruppoids $\mathfrak{G}$, die der Bedingung

(3) $\forall (a,b) \in I^2(\mathfrak{G}) \cap R \quad \exists x \in S_{\mathfrak{G}} \quad \alpha(x) = a$, $\beta(x) = b$, xRa

genügt, heisst eine vollständige Kongruenzrelation von $\mathfrak{G}$.

In [2] (Satz 5, S. 219) ist folgender Satz bewiesen:

Satz: Eine vollständige Kongruenzrelation eines B-Gruppoids $\mathfrak{G}$ ist eine ausgezeichnete Kongruenzrelation von $\mathfrak{G}$.

Definition 4. Eine translatione Kongruenzrelation von einem B-Gruppoid $\mathfrak{G}$ ist eine Kongruenzrelation R des B-Gruppoids $\mathfrak{G}$, die noch folgende Bedingungen erfüllt:

(4) Ist $e \in I(\mathfrak{G})$, $x \in S_{\mathfrak{G}}$, $eR\alpha(x)$, so existiert $y \in S_{\mathfrak{G}}$, so dass yRx , $\alpha(y) = e$.

(5) Ist $x \in S_{\mathfrak{G}}$, $e \in I(\mathfrak{G})$, xRe , so ist $x \in I(\mathfrak{G})$.

(6) Ist $x, y \in S_{\mathfrak{G}}$, xRy , $\alpha(x) = \beta(x)$, dann $\alpha(y) = \beta(y)$ ist.

Definition 5. Eine reguläre Kongruenzrelation von einem Gruppoid $\mathfrak{G}$ ist eine ausgezeichnete Kongruenzrelation von $\mathfrak{G}$, die Bedingung (5) erfüllt.

In [2] (Satz 4, S. 218) ist folgender Satz bewiesen:

Satz: Eine Kongruenzrelation R eines B-Gruppoids $\mathfrak{G}$ ist eine ausgezeichnete Kongruenzrelation von $\mathfrak{G}$, wenn (4) gilt.

Folgerung: Eine translatione Kongruenzrelation eines B-Gruppoids $\mathfrak{G}$ ist eine ausgezeichnete Kongruenzrelation von $\mathfrak{G}$.

Es seien $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ partielle Strukturen und $\varphi : S_{\mathfrak{G}} \longrightarrow S_{\mathfrak{H}}$ eine Abbildung. Dann heisst φ ein Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$, wenn für jedes $(x,y) \in D(\mathfrak{G})$ $(\varphi(x), \varphi(y)) \in D(\mathfrak{H})$ und $\varphi(x) \cdot_{\mathfrak{H}} \varphi(y) = \varphi(x \cdot_{\mathfrak{G}} y)$.

Sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ partielle Strukturen, so heisst eine eineindeutige homomorphe Abbildung φ von $S_{\mathfrak{G}}$ auf $S_{\mathfrak{H}}$, für die zusätzlich auch φ^{-1} ein Homomorphismus von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{G}$ ist, ein Isomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{H}$.

<u>Bemerkung:</u> Ein Homomorphismus von einem B-Gruppoid $\mathfrak{G}$ auf ein B-Gruppoid $\mathfrak{H}$, der eine eineindeutige Abbildung ist, ist ein Isomorphismus.

<u>Satz 1</u>. Es sei R eine ausgezeichnete Kongruenzrelation von einem B-Gruppoid $\mathfrak{G}$. Dann gibt es eine vollständige Kongruenzrelation R_1 von dem B-Gruppoid $\mathfrak{G}$ und eine reguläre Kongruenzrelation R_2 von dem B-Gruppoid $\mathfrak{G}/_{R_1}$, so dass $\mathfrak{G}/_R$ zu $(\mathfrak{G}/_{R_1})/_{R_2}$ isomorph ist.

<u>Beweis</u>: Es sei $H: = \{x \mid x\, R\, \alpha(x),\ x \in S_{\mathfrak{G}}\}$. Wir zeigen, dass $\mathfrak{H} := (H, \cdot_{\mathfrak{G}}|_{H^2 \cap D(\mathfrak{G})})$ ein Untergruppoid des B-Gruppoids $\mathfrak{G}$ ist, Es sei $x, y \in H$, $(x,y) \in D(\mathfrak{G})$, dann $x\, R\, \alpha(x) \Longrightarrow \beta(x)\, R\, \beta(\alpha(x)) = \alpha(x) \Longrightarrow x\, R\, \beta(x)$. Wegen $y\, R\, \alpha(y)$, $xy\, R\, \beta(x)\alpha(y) = \beta(x)$, ist $xy\, R\, \alpha(x) = \alpha(xy) \Longrightarrow xy \in H$.

Ist $x \in H$, so ist $x^{-1}\, R (\alpha(x))^{-1} = \alpha(x)\, R\, \beta(x) = \alpha(x^{-1}) \Longrightarrow x^{-1} \in H$.

Ist $e \in I(\mathfrak{G})$, so ist $e\, R\, e = \alpha(e) \Longrightarrow e \in H$. Folglich $I(\mathfrak{H}) = I(\mathfrak{G})$. $\mathfrak{H}$ ist sogar ein invariantes Unter-

gruppoid von $\mathfrak{G}$, denn $\forall x \in S_{\mathfrak{G}}$ $x^{-1}Hx: =$
$= \{x^{-1}hx \mid h \in H, \alpha(h) = \beta(h) = \alpha(x)\} \subseteq H$.

Für jede $x, y \in S_{\mathfrak{G}}$ definieren wir $x R_1 y$ genau dann, wenn es gibt $u, v \in H$, so dass (u,x), $(x,v) \in D(\mathfrak{G})$ und $y = u\,x\,v$. Dann ist R_1 eine vollständige Kongruenzrelation von dem B-Gruppoid $\mathfrak{G}$.

Wir bezeichnen für jedes $x \in S_{\mathfrak{G}}$ $[x]_1 :=$
$= \{y \mid y R_1 x,\ y \in S_{\mathfrak{G}}\}$ und für jede $[x]_1, [y]_1 \in S_{\mathfrak{G}/R_1}$ definieren wir $[x]_1 R_2 [y]_1$ genau dann, wenn $x R y$ ist. Man kann sich leicht überzeugen, dass R_2 eine Kongruenzrelation ist. Es sei nun für jedes $x \in S_{\mathfrak{G}}$

$[x]_2 : = \{[y]_1 \mid [y]_1 R_2 [x]_1,\ [y]_1 \in S_{\mathfrak{G}/R_1}\}$,

$[x] : = \{y \mid y R x,\ y \in S_{\mathfrak{G}}\}$. Die Abbildung

$\varphi : S_{(\mathfrak{G}/R_1)/R_2} \longrightarrow S_{\mathfrak{G}/R}$, die durch die Vorschrift $\varphi[x]_2 = [x]$ gegeben ist, ist ein Isomorphismus. Somit ist R_2 eine ausgezeichnete Kongruenzrelation von $\mathfrak{G}/R_1$ und der B-Gruppoid $(\mathfrak{G}/R_1)/R_2$ ist isomorph zu dem B-Gruppoid $\mathfrak{G}/_R$.

Wir müssen noch zeigen, dass R_2 eine reguläre Kongruenzrelation ist. Also sei $[x]_1 \in S_{\mathfrak{G}/R_1}$, $[y]_1 \in$ $\in I(\mathfrak{G}/_{R_1})$, $[x]_1 R_2 [y]_1$. Dann ist $[y]_1 = [\alpha(y).y]_1 =$ $= [\alpha(y)]_1 [y]_1 = [\alpha(y)]_1$. Weiter ist $[x]_1 R_2 [\alpha(y)]_1 \Rightarrow$
$\Longrightarrow x R \alpha(y) \Longrightarrow \alpha(x) R \alpha(\alpha(y)) \Longrightarrow \alpha(x) R \alpha(y) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow x R \alpha(x) \Longrightarrow x \in H$. Wegen $\alpha(x) = \alpha(x).\ x.\ x^{-1}$,
$\alpha(x) \in H$, $x^{-1} \in H$, ist $[x]_1 = [\alpha(x)]_1 \in I(\mathfrak{G}/_{R_1})$.

<u>Definition 6</u>. Ein Isomorphismus von einem B-Gruppoid $\mathfrak{G}$ auf das B-Gruppoid $\mathfrak{G}$ heisst ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Eine Translation φ von einem B-Gruppoid $\mathfrak{G}$ ist ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$ mit folgender Eigenschaft: gibt es $x \in \in S_{\mathfrak{G}}$ mit $\varphi(x) = x$, so ist φ eine identische Abbildung.

<u>Bemerkung</u>: Alle Translationen von einem B-Gruppoid bilden im allgemeinen keine Gruppe.

<u>Satz 2</u>. Es sei $\mathbb{T}$ eine Gruppe der Translationen (hinsichtlich der Produktbildung) von einem B-Gruppoid $\mathfrak{G}$. Für jede $x,y \in S_{\mathfrak{G}}$ sei $x\ R(\mathbb{T})\ y$ genau dann, wenn $\varphi \in S_{\mathbb{T}}$ existiert, so dass $y = \varphi(x)$. Dann ist $R(\mathbb{T})$ eine translatione Kongruenzrelation von $\mathfrak{G}$.

<u>Beweis</u>: Weil $\mathbb{T}$ eine Gruppe ist, muss $R(\mathbb{T})$ eine Äquivalenzrelation sein. Wir zeigen nun, dass $R(\mathbb{T})$ eine Kongruenzrelation von $\mathfrak{G}$ ist. Es sei $x, y, u, v \in S_{\mathfrak{G}}$, $(x,y), (u,v) \in D(\mathfrak{G})$, $x\ R(\mathbb{T})\ u$, $y\ R(\mathbb{T})\ v$. Dann gibt es $\varphi, \psi \in S_{\mathbb{T}}$, so dass $u = \varphi(x)$, $v = \psi(y)$. Wegen $(x,y) \in D(\mathfrak{G})$, ist $\beta(x) = \alpha(y) \Longrightarrow \varphi(\beta(x)) = \varphi(\alpha(y))$ und wegen $(\varphi(x), \psi(y)) \in D(\mathfrak{G})$, ist $\beta(\varphi(x)) = \alpha(\psi(y))$. Aber $\beta(\varphi(x)) = \varphi(\beta(x))$, $\alpha(\psi(y)) = \psi(\alpha(y)) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \varphi(\beta(x)) = \psi(\alpha(y)) \Longrightarrow \psi^{-1}\varphi(\beta(x)) = \alpha(y) =$ $= \beta(x) \Longrightarrow \psi^{-1}\varphi = \mathrm{id.} \Longrightarrow \varphi = \psi$, denn $\psi^{-1}\varphi$ ist eine Translation.

Wir haben $\varphi(x.y) = \varphi(x).\varphi(y) = \varphi(x).\psi(y) = u.v \Longrightarrow$ $\Longrightarrow xy\ R(\mathbb{T})\ uv$. Wegen $\varphi(\alpha(x)) = \alpha(\varphi(x)) = \alpha(u)$, $\varphi(\beta(x)) = \beta(\varphi(x)) = \beta(u)$, ist $\alpha(x)\ R(\mathbb{T})\ \alpha(u)$, $\beta(x)\ R(\mathbb{T})\ \beta(u)$.

Wir wollen noch zeigen, dass $R(\mathbb{T})$ eine translatione

Kongruenzrelation ist. (Siehe Definition 4.) Es sei $e \in I(\mathbb{G})$, $x \in S_{\mathbb{G}}$, $e\, R(\mathbb{T})\, \alpha(x)$. Dann gibt es $\varphi \in S_{\mathbb{T}}$, so dass $\varphi(\alpha(x)) = e$. Legen wir $y := \varphi(x)$ fest. Dann $x\, R(\mathbb{T})\, y$, $\alpha(y) = \alpha(\varphi(x)) = \varphi(\alpha(x)) = e$.

Es sei $x \in S_{\mathbb{G}}$, $e \in I(\mathbb{G})$, $x\, R(\mathbb{T})\, e$. Dann gibt es $\varphi \in S_{\mathbb{T}}$, so dass $e = \varphi(x)$. Hieraus folgt
$\varphi(\alpha(x)) = \alpha(\varphi(x)) = \alpha(e) = e \Longrightarrow \varphi(x) = \varphi(\alpha(x)) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow x = \alpha(x) \Longrightarrow x \in I(\mathbb{G})$.

Es sei $x, y \in S_{\mathbb{G}}$, $x\, R(\mathbb{T})\, y$. Dann gibt es $\varphi \in S_{\mathbb{T}}$, so dass $y = \varphi(x)$. $\alpha(y) = \beta(y)$ ist genau dann wenn
$\alpha(\varphi(x)) = \beta(\varphi(x)) \Longleftrightarrow \varphi(\alpha(x)) = \varphi(\beta(x)) \Longleftrightarrow \alpha(x) =$
$= \beta(x)$.

<u>Definition 7</u>. Ein B-Gruppoid $\mathbb{G}$ heisst einfach, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Ist für $x, y \in S_{\mathbb{G}}$ $\alpha(x) = \alpha(y)$, $\beta(x) = \beta(y)$, so ist $x = y$.

Für eine nichtleere Menge M werden wir ein B-Gruppoid $\mathbb{B}(M)$ auf folgende Weise einführen. $\mathbb{B}(M) := (M^2, .)$, wobei für jede $(a,b), (c,d) \in M^2$ $((a,b),(c,d)) \in D(\mathbb{B}(M))$ genau dann sei, wenn $b = c$ ist, und dann definieren wir $(a,b).(b,d) = (a,d)$. Es ist offenbar, dass $\mathbb{B}(M)$ ein einfaches B-Gruppoid ist.

Wir führen nun noch neue Zeichen ein. Für B-Gruppoid $\mathbb{G}$ und $e \in I(\mathbb{G})$ definieren wir
$P(e) := \{x \mid x \in S_{\mathbb{G}},\ \alpha(x) = e\}$, $T(e) := \{t \mid t \in S_{\mathbb{G}},\ \alpha(t) = \beta(t) = e\}$.

<u>Satz 3</u>. Ist $\mathbb{G}$ ein B-Gruppoid, so gibt es ein einfaches B-Gruppoid $\mathbb{H}$ und eine Gruppe $\mathbb{T}$ der Translationen von $\mathbb{H}$, so dass die B-Gruppoide $\mathbb{H}/_{R(\mathbb{T})}$, $\mathbb{G}$ isomorph

sind.

Beweis: Legen wir $\mathbb{H} = \mathbb{B}(P(e))$ fest. Für $t \in T(e)$ und $(x,y) \in P^2(e)$ sei $\overline{t}(x,y) := (tx, ty)$ und sei $T' := \{\overline{t} \mid t \in T(e)\}$, $\mathbb{T} := (T', \circ)$ ($\circ$ – die Operation der Produktbildung). Dann ist $\mathbb{T}$ eine Gruppe der Translationen von $\mathbb{H}$. Es sei für jedes $(x,y) \in P^2(e)$ $[x,y] := \{(u,v) \mid (u,v) \in P^2(e), (u,v)\, R(\mathbb{T})\, (x,y)\}$ und für jedes $[x,y] \in S_{\mathbb{H}/R(\mathbb{T})}$ $\varphi[x,y] = x^{-1}y$. Dann ist leicht zu sehen, dass φ ein Isomorphismus von $\mathbb{H}/_{R(\mathbb{T})}$ auf $\mathbb{G}$ ist.

Lemma. Es sei $\mathbb{S}$ eine Gruppe der Translationen von einem einfachen B-Gruppoid $\mathbb{G}$ und $\mathbb{T}$ eine Gruppe der Translationen von einem einfachen B-Gruppoid $\mathbb{H}$. Sind die B-Gruppoide $\mathbb{G}/_{R(\mathbb{S})}$, $\mathbb{H}/_{R(\mathbb{T})}$ isomorph, so sind auch die B-Gruppoide $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$ und die Gruppen $\mathbb{S}$, $\mathbb{T}$ isomorph.

Beweis: Es gilt $\mathbb{G} \cong \mathbb{B}(I(\mathbb{G}))$. Es sei für jede $x,y \in I(\mathbb{G})$ $[x,y] := \{(u,v) \mid u, v \in I(\mathbb{G}), (u,v)\, R(\mathbb{S})\, (x,y)\}$. Dann für $a \in I(\mathbb{G})$ sind $\mathbb{G}$, $\mathbb{B}(P[a,a])$ isomorph und $\mathbb{S}$, $(T[a,a], \cdot_{\mathbb{G}/R} | T[a,a])$ sind isomorphe Gruppen, denn die Abbildung $(x,y) \longmapsto ([a,x],[a,y])$ von $\mathbb{G}$ auf $\mathbb{B}(P[a,a])$ und die Abbildung $t \longmapsto [a, ta]$ von $\mathbb{S}$ auf $T([a,a])$ die Isomorphen sind.

Lemma. Es sei $\mathbb{G}$ ein einfaches B-Gruppoid und sei R eine translatione Kongruenzrelation von $\mathbb{G}$. Dann gibt es eine Gruppe $\mathbb{T}$ der Translationen von $\mathbb{G}$, so dass $R = R(\mathbb{T})$.

Beweis: Weil $\mathfrak{G}$ ein einfaches B-Gruppoid ist, muss $\mathfrak{G}$ isomorph zu $\mathbb{B}(I(\mathfrak{G}))$ sein. Für jedes $(x,y) \in I^2(\mathfrak{G})$ sei $[x,y] := \{(u,v) \mid u, v \in I(\mathfrak{G}), (u,v)\ R(x,y)\}$. Weil R eine translatione Kongruenzrelation ist, ist für $a \in I(\mathfrak{G})$ $P([a,a]) = \{[a,x] \mid x \in I(\mathfrak{G})\}$.

Wir wollen jetzt zeigen, dass $([a,x],[a,y]) \longmapsto$ $\longmapsto (x,y)$ von $\mathbb{B}(P[a,a])$ in $\mathbb{B}(I(\mathfrak{G}))$ eine Abbildung ist. Es sei $[a,x] = [a,u]$. Dann $[a,x][x,u] =$ $= [a,u] = [a,x]$ und folglich $[x,u] = [x,a]([a,x][x,u]) =$ $= [x,a][a,x] = [x,x] \Longrightarrow (x,u)\ R\ (x,x)$. Folglich ist nach (5) $x = u$.

Es ist offenbar, dass $([a,x],[a,y]) \longmapsto (x,y)$ eine eineindeutige Abbildung ist und also $\mathbb{B}(P([a,a]))$ ist isomorph zu dem $\mathbb{B}(I(\mathfrak{G}))$.

Wir bezeichnen für jedes $t \in T([a,a])$ und jedes $([a,x],[a,y]) \in P([a,a]) \times P([a,a])$ $\bar{t}([a,x],[a,y]) = (t[a,x], t[a,y])$.

$\mathbf{T} := (\{\bar{t} \mid t \in T([a,a])\}, \circ)$ ist die Gruppe der Translationen von dem $\mathbb{B}(P([a,a]))$.

Wir zeigen jetzt, dass $R = R(\mathbf{T})$. Es sei $([a,x],[a,y])\ R\ ([a,u],[a,v])$. Dann $(x,y)\ R\ (u,v) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow [x,y] = [u,v]$. Daraus folgt $[x,a][a,y] =$ $= [u,a][a,v] \Longrightarrow [a,u][x,a] = [a,v][y,a]$. Aber $[a,u][x,a] \in T([a,a])$ und $\overline{[a,u][x,a]}([a,x],[a,y]) =$ $= ([a,u],[a,v])$ und wir haben $R \subseteq R(\mathbf{T})$. Es sei $([a,x],[a,y])\ R(\mathbf{T})\ ([a,u],[a,v])$. Dann gibt es $t \in T([a,a])$, so dass $[a,u] = t[a,x]$, $[a,v] = t[a,y]$. Also $t = [a,u][x,a] = [a,v][y,a] \Longrightarrow [x,a][a,y] =$

$= [u,a][a,v] \Longrightarrow (x,y)\ R(u,v) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow ([a,x], [a,y])\ R\ ([a,u], [a,v])$.

<u>Satz 4</u>. Ist R eine translatione Kongruenzrelation von dem B-Gruppoid $\mathbf{G}$, so gibt es eine Gruppe $\mathbf{T}$ der Translationen von $\mathbf{G}$, so dass $R(\mathbf{T}) = R$.

<u>Beweis</u>: Es gibt ein einfaches B-Gruppoid $\mathbf{H}$ und eine Gruppe $\mathbf{T}_1$ der Translationen von $\mathbf{H}$, so dass $\mathbf{H}/_{R(\mathbf{T}_1)}$ zu dem $\mathbf{G}$ isomorph ist. Wir bezeihnen mit $R_1 := R(\mathbf{T}_1)$, $[x]_1 := \{y \mid y \in S_{\mathbf{H}}, y R_1 x\}$. Wir definieren für jede $x, y \in S_{\mathbf{H}}$ $x R_2 y$ genau dann, wenn $[x]_1 R [y]_1$ ist.

Es ist leicht festzustellen, dass R_2 eine translatione Kongruenzrelation von $\mathbf{H}$ ist. Nach dem Lemma gibt es eine Gruppe $\mathbf{T}_2$ der Translationen von $\mathbf{H}$, so dass $R_2 = R(\mathbf{T}_2)$.

Wir zeigen, dass $\mathbf{T}_1$ eine invariante Untergruppe von $\mathbf{T}_2$ ist. Es sei $t_1 \in S_{\mathbf{T}_1}$, $t_2 \in S_{\mathbf{T}_2}$, $e \in I(\mathbf{H})$. Dann gibt es $x \in S_{\mathbf{H}}$, so dass $\alpha(x) = t_2(e)$, $\beta(x) = t_1 t_2(e)$. Wegen $x R_2 t_2^{-1}(x)$, ist $[x]_1 R [t_2^{-1}(x)]_1$. Weil R translatione ist und $[\alpha(x)]_1 = [\beta(x)]_1$, bekommen wir

$[\alpha(t_2^{-1}(x))]_1 = [\beta(t_2^{-1}(x))]_1 \Longrightarrow [e]_1 = [t_2^{-1}(\alpha(x))]_1 =$

$= [t_2^{-1}(\beta(x))]_1 = [t_2^{-1} t_1 t_2(e)]_1 \Longrightarrow t_2^{-1} t_1 t_2 \in S_{\mathbf{T}_1}$.

Für $t \in S_{\mathbf{T}_2}$ definieren wir $[t]([x]_1) = [tx]_1$. Die Abbildung $[t]$ ist eine Translation von $\mathbf{H}/_{R_1}$, wobei für $s, t \in S_{\mathbf{T}_2}$ ist $[s] = [t]$ genau dann, wenn $st^{-1} \in S_{\mathbf{T}_1}$. Wir legen $\mathbf{T} := \mathbf{T}_2/\mathbf{T}_1$ fest und wir zeigen, dass $R = R(\mathbf{T})$ ist. Es sei $[x]_1 R [y]_1$. Dann $x R_2 y$ und es gibt ein Element $t_2 \in S_{\mathbf{T}_2}$, so dass

$y = t_2(x) \Longrightarrow [y]_1 = [t_2 x]_1 = [t_2]([x]_1) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow [x]_1 \; R(\mathbb{T}) \; [y]_1$. Es sei $[u]_1 \; R(\mathbb{T}) \; [v]_1$. Dann gibt es $[t] \in \mathbb{T}_2 / \mathbb{T}_1$, so dass $[v]_1 = [t]([u]_1) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow [v]_1 = [tu]_1 \Longrightarrow u \, R_2 \, v \Longrightarrow [u]_1 \; R \; [v]_1$.

Satz 5. Eine Kongruenzrelation R von einem B-Gruppoid $\mathbb{G}$ ist regulär genau dann, wenn es ein einfaches B-Gruppoid $\mathbb{H}_2$, ein Teiluntergruppoid $\mathbb{H}_1$ von $\mathbb{H}_2$, eine Gruppe $\mathbb{T}_2$ der Translationen von $\mathbb{H}_2$ und eine Untergruppe $\mathbb{T}_1$ von $\mathbb{T}_2$ gibt, so dass

(i) $\mathbb{H}_1$ ist ein B-Gruppoid

(ii) $\forall \, t \in S_{\mathbb{T}_1} \quad t(S_{\mathbb{H}_1}) \subseteq S_{\mathbb{H}_1}$

(iii) $\forall \, (x,y) \in D(\mathbb{H}_2) \; \exists \, t \in S_{\mathbb{T}_2} \quad (t(x),t(y)) \in D(\mathbb{H}_1)$

(iv) $\mathbb{H}_1 / R(\mathbb{T}_1)$ ist isomorph zu $\mathbb{G}$

(v) bezeichnen wir $[x]_1 : = \{ y \mid y \in S_{\mathbb{H}_1} , \; y \; R(\mathbb{T}_1) x \}$ $\forall \, x \in S_{\mathbb{H}_1}$, dann für jede $[x]_1 , [y]_1 \in S_{\mathbb{H}_1 / R(\mathbb{T}_1)}$ ist $[x]_1 \; R \; [y]_1$ genau dann, wenn $x \; R(\mathbb{T}_2) \; y$ ist.

Beweis: I. Es sei R eine reguläre Kongruenzrelation. Für jedes $x \in S_{\mathbb{G}}$ bezeichnen wir $[x] : = \{ y \mid y \in S_{\mathbb{G}} , y \; R \; x \}$ und dür ein ausgewähltes Element $e \in I(\mathbb{G})$ $M_1 : =$
$= \{ [x] \mid \alpha(x) = e \}$, $M_2 : = \{ [x] \mid [\alpha(x)] = [e] \}$,
$S_1 : = \{ [s] \mid \alpha(s) = \beta(s) = e \}$,
$S_2 : = \{ [s] \mid [\alpha(s)] = [\beta(s)] = [e] \}$.

Legen wir $\mathbb{H}_1 = \mathbb{B}(M_1)$, $\mathbb{H}_2 = \mathbb{B}(M_2)$ fest. Für jedes $[s] \in S_2$ und $([x],[y]) \in S_{\mathbb{B}(M_2)}$ definieren wir $\overline{[s]}([x],[y]) = ([s][x],[s][y])$. Dann ist $\mathbb{T}_2 : = (\{ \overline{[s]} \mid [s] \in S_2 \}, \circ)$ eine Gruppe der Translationen von B-Gruppoid $\mathbb{H}_2$ und $\mathbb{T}_1 := (\{\overline{[s]} \mid [s] \in S_1\}, \circ)$ eine Untergruppe der Gruppe $\mathbb{T}_2$. Es ist offenbar, dass

(i) $\mathbb{H}_1$ ein B-Gruppoid ist

(ii) $\forall\ t \in S_{\mathbb{T}_1} \quad t(S_{\mathbb{H}_1}) \subseteq S_{\mathbb{H}_1}$

Es sei $([x],[y]), ([y],[z]) \in S_{\mathbb{H}_2}$. Dann sind die Elemente $[y^{-1}][z]$, $[x^{-1}][y]$, $([x^{-1}][y])([y^{-1}][z])$ definiert und also gibt es $u, v \in S_{\mathbb{G}}$, so dass $[u] = [x^{-1}][y]$ $[v] = [y^{-1}][z]$ und das Element $u.v$ ist definiert. Weiter existiert $a \in S_{\mathbb{G}}$, so dass $\alpha(a) = e$, $\beta(a) = \alpha(u)$. Legen wir $b := au$, $c := bv$ fest. Dann $\alpha(c) = \alpha(b) = \alpha(a) = e$, $u = a^{-1}b$, $v = b^{-1}c$, $[x^{-1}][y] = [a^{-1}][b]$, $[y^{-1}][z] = [b^{-1}][c] \Longrightarrow [a][x^{-1}] = [b][y^{-1}]$, $[b][y^{-1}] = [c][z^{-1}]$. Weiter gilt für $[t] := [a][x^{-1}] : [t] \in S_2$, $\overline{[t]}([x],[y]) = ([a],[b])$, $\overline{[t]}([y],[z]) = ([b],[c])$. Damit ist gezeigt, dass (iii) gilt.

Für jedes $([x],[y]) \in S_{\mathbb{H}_1}$ definieren wir $[x,y]_1 := \{([u],[v]) \mid ([u],[v]) \in S_{\mathbb{H}_1}$, $([u],[v]) R(\mathbb{T}_1) ([x],[y])\}$ und $\varphi[x,y]_1 := x^{-1}y$. Ist $[x] = [u]$ für $[x],[u] \in M_1$, dann $[x^{-1}u] = [x^{-1}][u] = [\beta(u)] \Longrightarrow x^{-1} u R \beta(u) \Longrightarrow x^{-1}u \in I(\mathbb{G}) \Longrightarrow x = u$. Ist $[x,y]_1 = [u,v]_1$, dann gibt es ein Element $[s] \in S_1$, so dass $u = sx$, $v = sy$ und also $u^{-1}v = x^{-1}s^{-1}s\,y = x^{-1}y$. Demnach ist φ eine Abbildung. Ganz ähnlich wie in dem Beweis des Satzes 3 kann man zeigen, dass φ ein Isomorphismus von $\mathbb{H}_1/_{R(\mathbb{T}_1)}$ auf $\mathbb{G}$ ist und $\mathbb{H}_1/_{R(\mathbb{T}_1)}$ isomorph zu $\mathbb{G}$ ist.

Für $[x],[y],[u],[v] \in M_1$ ist $[x,y]_1 \; R \; [u,v]_1$ genau dann, wenn $x^{-1}y \; R \; u^{-1}v$ ist. Das gilt genau dann, wenn $[x^{-1}][y] = [u^{-1}][v] \Longrightarrow [u][x^{-1}] = [v][y^{-1}]$. Für $[t] := [u][x^{-1}]$ ist dann $[t] \in S_2$ $\overline{[t]}([x],[y]) = ([u],[v])$.

II. Es gelte umgekehrt (i) - (v). Dann definieren wir $[x]_1 \; R \; [y]_1$ genau dann, wenn $x \; R(\mathbf{T}_2) y$ ist. Man kann sich überzeugen, dass R eine reguläre Kongruenzrelation von $\mathbf{H}_1 / _{R(\mathbf{T}_1)}$ ist.

Beispiel: Es sei $M := \{1,2,3,4,5\}$, $\mathbf{G} := \mathbf{B}(M)$ und eine Äquivalenzrelation R sei durch folgende Äquivalenzklassen gegeben:

$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$; $\{(1,2),(2,1),(4,5),(5,4)\}$; $\{(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\}$; $\{(2,3),(3,5),(5,2),(1,4)\}$; $\{(1,5),(5,1),(3,4),(4,3)\}$; $\{(4,1),(5,3),(3,2),(2,5)\}$.

Dann ist $\mathbf{G}/_R$ eine Gruppe und R ist eine reguläre Kongruenzrelation, die keine translatione Kongruenzrelation ist.

Definition 8. Ist φ ein Homomorphismus von einem B-Gruppoid $\mathbf{G}$ in ein B-Gruppoid $\mathbf{H}$ und $x \; R(\varphi) y :\Longleftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \quad \forall \, x,y \in S_{\mathbf{G}}$ und ist $R(\varphi)$ eine ausgezeichnete (bzw. vollständige, reguläre, translatione) Kongruenzrelation, so nennen wir φ einen ausgezeichneten (bzw. vollständigen, regulären, translationen) Homomorphismus.

Aus den Sätzen 1 und 5 folgt sofort

Folgerung: Es sei φ ein Homomorphismus von einem B-Gruppoid $\mathbf{G}$ in einem B-Gruppoid $\mathbf{H}$. φ ist ein ausgezeichneter Homomorphismus genau dann, wenn es ein B-Gruppoid $\mathbf{K}$, einfache B-Gruppoide $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$, ein vollständiger Homomorphismus σ , ein regulärer Homomorphismus ρ , ein injektiver Homomorphismus ι , translatione Homomorphismen τ_1 , τ_2 gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G} \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ \mathbb{K} \arrow[r, "\rho"] & \mathbb{H} \\ \mathbb{H}_1 \arrow[u, "\tau_1"] \arrow[r, "\iota"] & \mathbb{H}_2 \arrow[u, "\tau_2"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

L i t e r a t u r :

[1] ANDRÉ J.: Über nicht Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe, Math.Zeitschr.60 (1954), 156-186.

[2] HASSE M. und MICHLER L.: Theorie der Kategorien, Berlin 1966.

[3] KLOUDA J.: Kongruenzen in Brandtschen Gruppoiden, Geometriae Dedicata 3(1974),347-355.

[4] OSTROM T.G.: A class of non-Desarguesian affine planes, Trans.Amer.Math.Soc.104(1962),483-487.

Matematický ústav
Karlova universita
Malostranské nám.25
Praha 1 Malá Strana

(Oblatum 6.2.1975)