Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Zdeněk Vančura

Differentialgeometrie der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen Euklidischen Raum. I.

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 16 (1975), No. 2, 219--243

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105620`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

16,2 (1975)

DIFFERENTIALGEOMETRIE DER ZWEIDIMENSIONALEN KUGEL- UND LINIENMANNIGFALTIGKEITEN IM DREIDIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM - I

Zdeněk VANČURA, Praha

Inhalt: Der vorgelegte zweitelige Artikel versucht Differentialgeometrie der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum unter Anwendung von drei in der vierdimensionalen Kugelmannigfaltigkeit konstruierten Tensoren zu entwickeln.

Schlüsselwörter: Differentialgeometrie der Brennflächen von Kugel- und adjungierten Linienkongruenzen.

AMS: 53A40, 53A25 Ref. Ž.: 3.93.6

Meine Abhandlung [11] versucht eine Konzeption, Möglichkeiten und Methoden des Studiums der Differentialgeometrie der Brennflächen von Kugelkongruenzen und von adjungierten Linienkongruenzen im E_3 unter Anwendung von drei Skalaren und einem Tensor auf speziell parametrisierten Kugelkongruenzen zu finden.

Von meiner Abhandlung[11] ausgehend, habe ich mir folgende Grundprobleme gestellt: Es sind Konzeption, Möglichkeiten und Methoden des Studiums der Differentialgeometrie von Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im E_3 unter Anwendung von zweckmässig konstruierten Tensoren in der beliebig parametrisierten vierdimensionalen Kugelmannigfaltigkeit im E_3 zu finden.

Der vorgelegte Artikel stellt einen zweckmässig abgekürzten Text von meiner in einer Handschrift sich befindlichen umfassenden gleich betitelten Abhandlung dar. Diese Abhandlung von erwähnten Grundproblemen sucht die massgebenden, die zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im E_3 betreffenden Grundprobleme zu lösen. Für einen Höhepunkt dieser Arbeit kann man das Theorem halten, dem zufolge die in der Arbeit entwickelte Differentialgeometrie der Kugel- und Linienkongruenzen im E_3 duch einen Skalar und zwei zweistufige Tensoren völlig beherrscht ist.

Gewissermassen werden dadurch Umrisse meines gegenwärtigen Studiums der Differentialgeometrie von dreidimensionalen bzw. vierdimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im E_3 skizziert.

Die Arbeit wird in zwei Kapitel eingeteilt. Das Hauptthema des ersten Kapitels besteht in Konstruktionen solcher Tensoren auf der vierdimensionalen Kugelmannigfaltigkeit und auf ihren Untermannigfaltigkeiten unter Anwendung von denen diese Kugelmannigfaltigkeiten und adjungierte Linienmannigfaltigkeiten untersucht werden können.

Als n-dimensionale Kugelmannigfaltigkeit $\overset{n}{p}$ im E_3 (n = 1,2,3,4) wollen wir eine solche Menge von Kugeln

$$(1) \qquad \overset{n}{p} = \overset{n}{p}\,(\overset{n}{p}_m(\overset{n}{u}_1, \dots, \overset{n}{u}_n)) \qquad (m = 1, \dots, 6)$$

bezeichnen, für welche im gewissen Gebiet $\overset{n}{\Omega}$ die Matrix

$$\| \overset{n}{p}\,,\ \overset{n}{p}_1, \dots, \overset{n}{p}_n \|$$

wo $\overset{n}{p}_m(\overset{n}{u}_1, \dots, \overset{n}{u}_n)$ ($\overset{n}{p}_m$ reelle, stetig differenzierbare Funktionen vom begehrten Range, $\overset{n}{p}_\ell = \left(\frac{\partial \overset{n}{p}_1}{\partial u_\ell}, \dots, \frac{\partial \overset{n}{p}_6}{\partial u_\ell}\right)$) die homogenen hexasphärischen normierten ($\overset{m}{r}_5 = 1$) Koordinaten sind, den Rang n + 1 hat. Man bezeichnet auch $\overset{1}{p}$ als Kanalfläche (sieh Untersuchungen vor dem Satz 2), $\overset{2}{p}$ als Kugelkongruenz $\overset{3}{p}$ als Kugelkomplex, $\overset{4}{p}$ als Kugelraum.

Im Rahmen der Konstruktionen von oben erwähnten Tensoren werden bei beliebiger Kugelkongruenz $\overset{2}{p}$, welche immer im Kugelraum $\overset{4}{p}$ durch Gleichungen $\varphi_k(u_1,\dots,u_4) = c_k$, $c_k = \mathrm{konst}$, $\det\left|\frac{\partial\varphi_k}{\partial u_{k'}}\right| \neq 0$ $(k, k' = 3,4)$ ausgedrückt werden kann, auf der Kugelmannigfaltigkeit $\overset{m}{p}$ (n = 2,4) die Skalaren

$$(2)\qquad \overset{m}{s} = \overset{m}{s}(\overset{m}{u}_1,\dots,\overset{m}{u}_m) = \overset{m}{r}_6(\overset{m}{u}_1,\dots,\overset{m}{u}_m), \qquad (m = 2,4)$$

und die quadratischen kovarianten Tensoren

$$(3)\quad \overset{mm}{\overset{ss}{T}}_{ij} = \frac{\partial\overset{m}{s}}{\partial\overset{m}{u}_i}\cdot\frac{\partial\overset{m}{s}}{\partial\overset{m}{u}_j} = \overset{m}{s}_i\cdot\overset{m}{s}_j, \quad \underset{\varphi}{\overset{mm}{\overset{ds}{T}}}_{ij} = \underset{\varphi}{\overset{m}{\varepsilon}}_{12}\left(\frac{\partial\underset{\varphi}{\overset{m}{d}}}{\partial\overset{m}{u}_i}\cdot\frac{\partial\overset{m}{s}}{\partial\overset{m}{u}_j}\right) =$$

$$= \underset{\varphi}{\overset{m}{\varepsilon}}_{12}(\underset{\varphi}{\overset{m}{d}}_i\cdot\overset{m}{s}_j), \quad \underset{\varphi}{\overset{mm}{\overset{\ell s}{T}}}_{ij} = \frac{\partial\overset{m}{\ell}}{\partial\overset{m}{u}_i}\cdot\frac{\partial\overset{m}{s}}{\partial\overset{m}{u}_j} = \underset{\varphi}{\overset{m}{\ell}}_i\cdot\overset{m}{s}_j,$$

$$(m = 2,4;\ i,j = 1,\dots,4),$$

konstruiert, wo bei

$$(4)\quad \underset{\varphi}{\overset{2}{d}}_{ij} = \overset{2}{d}_{ij} = 2\det\left|\frac{\partial\overset{2}{r}_i}{\partial\overset{2}{u}_k}, \frac{\partial\overset{2}{r}_j}{\partial\overset{2}{u}_k}\right|,$$

$$\underset{\varphi}{\overset{4}{d}}_{ij} = 2\det\left|\frac{\partial\overset{4}{r}_i}{\partial\overset{4}{u}_{k'}}, \frac{\partial\overset{4}{r}_j}{\partial\overset{4}{u}_{k'}}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial\overset{4}{u}_{k'}}, \frac{\partial\varphi_4}{\partial\overset{4}{u}_{k'}}\right|,$$

$$\underset{\varphi}{\overset{m}{d}}_{12} \neq 0, \quad \underset{\varphi}{\overset{m}{\varepsilon}}_{12} = \operatorname{sgn}\underset{\varphi}{\overset{m}{d}}_{12}, \quad (k = 1,2;\ k' = 1,2,3,4;\ m = 2,4),$$

$$(5)\quad \underset{\varphi}{\overset{m}{k}}(A) = \underset{\varphi}{\overset{m}{d}}{}^2_{14} + \underset{\varphi}{\overset{m}{d}}{}^2_{24} - 4\overset{m}{r}_1\underset{\varphi}{\overset{m}{d}}_{12}\underset{\varphi}{\overset{m}{d}}_{24} + 4\overset{m}{r}_2\underset{\varphi}{\overset{m}{d}}_{12}\underset{\varphi}{\overset{m}{d}}_{14} - 4\overset{m}{r}_4\underset{\varphi}{\overset{m}{d}}{}^2_{12},$$

$$\underset{\varphi}{\overset{m}{k}}(B) = \underset{\varphi}{\overset{m}{d}}{}^2_{12} + \underset{\varphi}{\overset{m}{d}}{}^2_{13} + \underset{\varphi}{\overset{m}{d}}{}^2_{23}, \qquad (m = 2,4),$$

$$\underset{\varphi}{\overset{m}{k}}(AB) = 2\underset{\varphi}{\overset{m}{d}}_{13}\underset{\varphi}{\overset{m}{d}}_{14} + 2\underset{\varphi}{\overset{m}{d}}_{23}\underset{\varphi}{\overset{m}{d}}_{24} - 4\overset{m}{r}_1\underset{\varphi}{\overset{m}{d}}_{12}\underset{\varphi}{\overset{m}{d}}_{23} + 4\overset{m}{r}_2\underset{\varphi}{\overset{m}{d}}_{12}\underset{\varphi}{\overset{m}{d}}_{13} - 4\overset{m}{r}_3\underset{\varphi}{\overset{m}{d}}{}^2_{12},$$

$$\overset{n}{s} = (\overset{n}{p}_1, \overset{n}{p}_2, \overset{n}{p}_3), \quad \underset{\varphi}{\overset{n}{d}} = \underset{\varphi}{\overset{n}{k}}(B)^{-\frac{1}{2}}(\underset{\varphi}{\overset{n}{d}}_{23}, -\underset{\varphi}{\overset{n}{d}}_{13}, \underset{\varphi}{\overset{n}{d}}_{12}),$$

$$(6) \quad \underset{\varphi}{\overset{n}{l}} = \frac{1}{4}\underset{\varphi}{\overset{n}{d}}{}_{12}^{-1}\underset{\varphi}{\overset{n}{k}}(B)^{-1}\cdot(2\underset{\varphi}{\overset{n}{d}}_{24}\underset{\varphi}{\overset{n}{k}}(B) - \underset{\varphi}{\overset{n}{d}}_{23}\underset{\varphi}{\overset{n}{k}}(AB),$$

$$-2\underset{\varphi}{\overset{n}{d}}_{14}\underset{\varphi}{\overset{n}{k}}(B) + \underset{\varphi}{\overset{n}{d}}_{13}\underset{\varphi}{\overset{n}{k}}(AB), -\underset{\varphi}{\overset{n}{d}}_{12}\underset{\varphi}{\overset{n}{k}}(AB)), \quad (n = 2,4)$$

ist.

Es wird bewiesen, dass auf dem Kugelraum immer die Parameter $'u_k = u_k\ (k = 1,2)$, $'u_l = \varphi_l\ (l = 3,4)$ bestehen, in denen die Gleichungen

$$r^2('u_k) = r^4('u_k,'u_l = c_l) = r('u_k,'u_l = c_l), \overset{s^2s^2}{T}_{ij}('u_k) = \overset{s^4s^4}{T}_{ij}('u_k,'u_l = c_l) =$$

$$(7) = \overset{ss}{T}_{ij}('u_k,'u_l = c_l), \underset{\varphi}{\overset{d^2s^2}{T}}_{ij}('u_k) = \underset{\varphi}{\overset{d^4s^4}{T}}_{ij}('u_k,'u_l = c_l) = \underset{\varphi_3\varphi_4}{\overset{ds}{T}}_{ij}('u_k,'u_l = c_l) =$$

$$= \overset{ds}{T}_{ij}('u_k,'u_l = c_l), \underset{\varphi}{\overset{ls}{T}}_{ij}('u_k) = \underset{\varphi}{\overset{l^4s^4}{T}}_{ij}('u_k,'u_l = c_l) = \overset{ls}{T}_{ij}('u_k,'u_l = c_l), (k = 1,2;\ l = 3,4)$$

gelten, welche wir für den Ausgangspunkt des Anwendungsprinzips von Tensoren (2),(3) in dieser Arbeit halten können.

Das zweite Kapitel sucht, formuliert, beweist und realisiert eine Konzeption, Möglichkeiten und Methoden des Studiums der Differentialgeometrie der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im E_3, und zwar unter Anwendung vom Skalar aus (2) und von ersten zwei Tensoren aus (3), d.h. unter Anwendung von Skalar und Tensoren

$$(8) \quad r = p_6, \quad \overset{ss}{T}_{ij} = \frac{\partial s}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial s}{\partial u_j}, \quad \underset{\varphi_3\varphi_4}{\overset{ds}{T}}_{ij} = \underset{\varphi_3\varphi_4}{e}{}_{12}\left(-\frac{\partial \underset{\varphi_3\varphi_4}{d}}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial s}{\partial u_j}\right), (i,j = 1,2,3,4)$$

in einem beliebig parametrisierten Kugelraum.

Es geschieht so in drei Phasen:

Die erste Phase konzipiert und studiert, aus meiner Abhandlung [11] im Einzelnen ausgehend, Differentialgeometrie der Kugelkongruenzen und ihrer Brennflächen, der adjungierten

Linienkongruenzen und ihrer Brennflächen unter Anwendung von Skalar und Tensoren (8) im speziell parametrisierten Kugelraum.

Die zweite Phase löst unter Anwendung von Skalar und Tensoren (8) das Problem des Überganges von speziellen zu beliebigen Parametern des Kugelraumes und dadurch ermöglicht sie, in der ersten Phase konzipierte Differentialgeometrie unter Anwendung von Skalar und Tensoren (8) im beliebig parametrisierten Kugelraum zu untersuchen.

Die dritte Phase bringt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine hyperbolische, reguläre, nichtzylindrische Linienkongruenz einer gewissen Kugelkongruenz adjungiert wurde, beschreibt die Konstruktion einer solchen Kugelkongruenz und ermöglicht dadurch Differentialgeometrie solcher Linienkongruenzen unter Anwendung von Skalar und Tensoren (8) im beliebig parametrisierten Kugelraum zu untersuchen.

Die Untersuchungen in der ersten Phase entwickelten sich in den speziellen, mit Rücksicht auf (7) immer existierenden Parametern u_1, u_2, u_3, u_4 des Kugelraumes, in denen

$$(9)\quad \begin{aligned} &\overset{2}{p}(u_1,u_2) = p(u_1,u_2,u_3=c_3,u_4=c_4),\ \overset{\mathfrak{s}\mathfrak{s}}{T}_{12}(u_1,u_2,u_3=c_3,u_4=c_4)=0\,,\\ &\overset{d\mathfrak{s}}{T}_{12}(u_1,u_2,u_3=c_3,u_4=c_4) = \overset{d\mathfrak{s}}{T}_{\varphi_3\varphi_4 12}(u_1,u_2,u_3=c_3,u_4=c_4)=0 \end{aligned}$$

gilt.

Die Parameter u_1, u_2 sind also Krümmungsparameter der Mittelpunktfläche $\mathfrak{s}$ der Kugelkongruenz $\overset{2}{p}$ und mit Rücksicht auf (7) für den ersten bzw. zweiten Grundtensor $a_{ij}(u_1,u_2)$ bzw. $b_{ij}(u_1,u_2)$ und für die Hauptkrümmungen

$\frac{1}{R_i(u_1,u_2)}$ (i = 1,2) der Fläche s in Parametern (9)

$$
\begin{aligned}
&a_{ij}(u_1,u_2) = {}^{ss}T_{ij}(u_1,u_2,u_3=c_3,u_4=c_4),\ b_{ij}(u_1,u_2) = \\
(10)\qquad &= -{}^{ds}T_{ij}(u_1,u_2,u_3=c_3,u_4=c_4)\ , \\
&\frac{1}{R_i(u_1,u_2)} = \frac{-{}^{ds}T_{ii}(u_1,u_2,u_3=c_3,u_4=c_4)}{{}^{ss}T_{ii}(u_1,u_2,u_3=c_3,u_4=c_4)},\ (i,j=1,2)
\end{aligned}
$$

gilt.

Konzeption, Inhalt und Methoden der ersten Phase lassen sich durch folgende Sätze und Ideen ihrer Beweise charakterisieren:

Satz 1. Die Differentialgeometrie der Kugelkongruenzen und ihrer Brennflächen, der adjungierten Linienkongruenzen und ihrer Brennflächen, die in der Abhandlung [11] unter Anwendung von Skalaren r , $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ und Tensor a_{ij} in Krümmungsparametern der Mittelpunktfläche s untersucht wurde, kann in Parametern (9) des Kugelraumes unter Anwendung von Skalar r und Tensoren ${}^{ss}T_{ij}$, ${}^{ds}_{a_3a_4}T_{ij} = {}^{ds}T_{ij}$ aus (8) untersucht werden.

Beweis ergibt sich aus [11] (Sätzen I bis VI) und aus den Betrachtungen, die Gleichungen (7) bis (10) enthalten.

Weiter betrachten wir (sieh [11]) Brennflächen der Kugel- und Linienkongruenzen mit nichtsingulären Punkten und auf ihnen nur solche Kurven, deren Krümmung ungleich Null ist.

Die Bedingung $a_{I\,I}a_{II\,II} - a^2_{I\,II} > 0$ (sieh 10 , S. 317), die wir bei der Untersuchung der Kugelkongruenzen stets berucksichtigt haben, hat in Krümmungsparametern der Mittelpunktfläche s die Form

$$a_{II}a_{IIII}-a_{III}^2=\hat{\hat{T}}_{11}\hat{\hat{T}}_{22}(1-\varkappa_1^2\hat{\hat{T}}_{11}^{-1}-\varkappa_2^2\hat{\hat{T}}_{22})>0,\ (\hat{\hat{T}}_{ii}>0,\ i=1,2)\ .$$

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich folgende Ungleichheit

$a_{II}=\hat{\hat{T}}_{11}-\varkappa_1^2>0$. Daraus und aus Theorie der quadratischen Formen und aus [1] (S. 253), [3] (S.2) bekommen wir für eine beliebige eindimensionale Untermannigfaltigkeit $p(t) = p(u^I(t),\ u^{II}(t))$ der Kugelkongruenz $p(u^I,u^{II})$ folgende Formel

$$\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dp}{dt}=(p_i\cdot p_j)\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}=a_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}>0\ .$$

Daraus folgt:

Jede eindimensionale Untermannigfaltigkeit der untersuchten Kugelkongruenzen hat eine Hüllfläche. Es ist (aus der Flächentheorie) die bekannte Kanalfläche.

In unseren Betrachtungen wird darum die Kanalfläche in der Kugelgeometrie als eine eindimensionale Kugelmannigfaltigkeit aufgefasst, in der Flächentheorie als Hüllfläche einer eindimensionalen Kugelmannigfaltigkeit.

Satz 2. 1. Jede von Kugeln mit nichtkonstantem Halbmesser r gebildete Kugelkongruenz $\overset{2}{p}$ kann auf eine Weise als einparametriges System der von Kugeln mit konstantem Halbmesser $r = c$ gebildeten Kanalflächen $\overset{1}{\underset{c}{p}}$ aufgefasst werden. h-te Brennfläche $\overset{h}{f}$ der Kugelkongruenz $\overset{2}{p}$ erscheint dann als einparametriges System der von h-ten Brennpunkten von Kugeln der Kanalfläche $\overset{1}{\underset{c}{p}}$ gebildeten Kurven $\overset{h}{\underset{c}{\varphi}}$. Die Kanalfläche $\overset{1}{\underset{c}{p}}$ berührt h-te Brennfläche $\overset{h}{f}$ längs der Kurve $\overset{h}{\underset{c}{\varphi}}$.

2. Durch jeden Punkt (u_1,u_2) der h-ten Brennfläche $\overset{h}{f}$

von Kugelkongruenz $\overset{2}{p}$ geht gerade eine Kurve $\overset{h}{\varphi}_c = \overset{h}{\varphi}$.
Für Krümmung $\overset{h}{k}_1$ und Windung $\overset{h}{k}_2$ der Kurve $\overset{h}{\varphi}_c$ im Punkt (u_1,u_2) gilt dann in Parametern u_1,u_2 aus (9) bei $r_2 > 0$

$$\overset{h}{k}_1 = (\overset{h}{D}^m \overset{h}{D}^n \overset{h}{a}_{mn} + \overset{h}{b}^2)^{\frac{1}{2}} \,, \tag{11}$$

$$\overset{h}{k}_2 = (\overset{h}{D}^k \overset{h}{D}^l \overset{h}{a}_{kl} + \overset{h}{b}^2)^{-1} \Big| (-1)^{i+1} \delta_{ij} \cdot$$

$$\cdot \{ \overset{h}{\beta} \overset{h}{\nu} \varkappa^{-1} \overset{h}{b} \overset{h}{D}^{i+(-1)^{i+1}} \overset{h}{d}^j \overset{h}{d}^l \delta_l^n \cdot \overset{ss}{T}{}_{nn}^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot (\overset{h}{f}_{n\,n+(-1)^{n+1}} \overset{h}{f}_{n+(-1)^{n+1}\,3} - \overset{h}{f}_{n3} \overset{h}{f}_{n+(-1)^{n+1}\,n+(-1)^{n+1}}) +$$

$$+ [\overset{h}{D}^{i+(-1)^{i+1}} \overset{h}{d}^j \cdot \{ (\overset{h}{\beta} \overset{h}{\nu} \varkappa^{-1} \overset{h}{b})_m \overset{h}{d}^m + \overset{h}{\beta} \overset{h}{\nu} \varkappa^{-1} \overset{h}{D}^k \overset{h}{d}^l \overset{h}{b}_{kl} \} +$$

$$+ \overset{h}{\beta} \overset{h}{\nu} \varkappa^{-1} \overset{h}{b} \overset{h}{d}^{i+(-1)^{i+1}} \cdot (\overset{h}{D}{}^j_m \overset{h}{d}^m + \overset{h}{D}^k \overset{h}{d}^l \overset{h}{\Gamma}{}^j_{kl} - \overset{h}{\beta} \overset{h}{\nu} \varkappa^{-1} \overset{h}{b} \overset{h}{d}^j)] \cdot \tag{12}$$

$$\cdot [\delta_n^m \varkappa \varkappa_n \overset{ss}{T}{}_{nn}^{-\frac{1}{2}} \cdot (\overset{h}{f}_{n\,n+(-1)^{n+1}} \overset{h}{f}_{n+(-1)^{n+1}\,3} - \overset{h}{f}_{n3} \overset{h}{f}_{n+(-1)^{n+1}\,n+(-1)^{n+1}}) +$$

$$+ (-1)^{h+1} \varkappa (1 - \delta_k^k \varkappa_k^2 \overset{ss}{T}{}_{kk}^{-1})^{\frac{1}{2}} \cdot (\overset{h}{f}_{11} \overset{h}{f}_{22} - \overset{h}{f}_{12} \overset{h}{f}_{21})] \} +$$

$$+ (-1)^j \varkappa^{-1} \overset{h}{b}{}^2 \overset{h}{d}^i \overset{h}{d}^l \delta_l^{j+(-1)^{j+1}} \overset{ss}{T}_{j+(-1)^{j+1}\,j+(-1)^{j+1}} \cdot$$

$$\cdot \{ (-1)^{h+1} (1 - \delta_k^k \varkappa_k^2 \overset{ss}{T}{}_{kk}^{-1})^{\frac{1}{2}} \overset{h}{f}_{ij} - \varkappa_j \overset{ss}{T}{}_{jj}^{-\frac{1}{2}} \overset{h}{f}_{i3} \} \Big| \,,$$

wo

$$(13)\quad \overset{h}{d}{}^{i} = (-1)^{i+1}\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_j^{-1}\sigma^{ij}[(-1)^{m+n}\varkappa_{m+(-1)^{m+1}}\varkappa_{n+(-1)^{n+1}}\overset{h}{a}_{nm}]^{-\frac{1}{2}} ,$$

$$(\varkappa_1\varkappa_1^{-1} \equiv 1) ,$$

$$(14)\quad \overset{h}{b} = \overset{h}{b}_{ij}\overset{h}{d}{}^{i}\overset{h}{d}{}^{j},\ \sigma^{kl} = \sigma_{kl} = \sigma^{l}_{k},\ \overset{h}{d}{}^{i}_{j} = \frac{\partial \overset{h}{d}{}^{i}}{\partial u_j} ,$$

$$(15)\quad \overset{h}{D}{}^{k} = \overset{h}{\Gamma}{}^{k}_{ij}\overset{h}{d}{}^{i}\overset{h}{d}{}^{j} + \overset{h}{d}{}^{k}_{i}\overset{h}{d}{}^{i},\ \overset{h}{D}{}^{k}_{l} = \frac{\partial \overset{h}{D}{}^{k}}{\partial u_l} ,$$

$$(16)\quad \overset{h}{f}_{ij} = [\varkappa\varkappa_k\Gamma^{k}_{ji} - (\varkappa\varkappa_j)_i + \overset{ss}{T}_{ji} +$$

$$+ (-1)^{h}\varkappa\overset{ds}{T}_{ii}\overset{ss}{T}{}^{-1}_{ii}(1-\sigma^{k}_{k}\varkappa_k^2\overset{ss}{T}{}^{-1}_{kk})^{\frac{1}{2}}\overset{ss}{T}_{ji}]\overset{ss}{T}{}_{jj}^{-\frac{1}{2}} ,$$

$$(17)\quad \overset{h}{f}_{i3} = \varkappa\varkappa_i\overset{ds}{T}_{ii}\overset{ss}{T}{}^{-1}_{ii} +$$

$$+(-1)^{h}(1-\sigma^{k}_{k}\varkappa_k^2\overset{ss}{T}{}^{-1}_{kk})^{-\frac{1}{2}}\sigma^{m}_{m}\varkappa_m\overset{ss}{T}{}^{-1}_{mm}(\varkappa\varkappa_k\Gamma^{k}_{mi}-(\varkappa\varkappa_m)_i+\overset{ss}{T}_{mi}),$$

ist, und $\overset{h}{\beta}$, $\overset{h}{\nu}$, $\overset{h}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$, $\overset{h}{a}_{ij}$, $\overset{h}{b}_{ij}$ durch [11] (Satz 1.8, Gleichungen (1,39),(3,41),(1,95),(1,96)) und durch Gleichungen (10) gegeben werden.

Beweis. Der erste Teilt des Satzes folgt aus der Definition der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit (für n = 2,1), aus der Definition der h-ten Brennfläche von Kugelkongruenz (sieh [11]) und aus[11] (Satz 3.2).

Weiter beweist man, dass der Tangentenvektor $\overset{h}{f}_{u_1}$ der Kurve $\overset{h}{\varphi}$, mit der Gleichung $r - c = 0$, in der Form

$$\overset{h}{\mathfrak{t}}_{u_1} = \varkappa_2^{-1}(\varkappa_2 \overset{h}{\mathfrak{t}}_1 - \varkappa_1 \overset{h}{\mathfrak{t}}_2) = (-1)^{m+1}\varkappa_2^{-1}\varkappa_{m+(-1)^{m+1}}\,\overset{h}{\mathfrak{t}}_m$$

geschrieben werden kann und dass für die Bogenlänge $\underset{h}{t}$ der Kurve $\overset{h}{\varphi}$

$$\overset{h}{d}{}^i = \frac{du_i}{d\underset{h}{t}} = (-1)^{i+1}(\overset{h}{\mathfrak{t}}_{u_1}\cdot\overset{h}{\mathfrak{t}}_{u_1})^{-\frac{1}{2}}\varkappa_1\varkappa_j^{-1}\delta^{ij}, \qquad (\varkappa_1\varkappa_1^{-1} \equiv 1)$$

gilt. Daraus, aus [11] (Sätzen 3.22, 3.23, Gleichungen (1,37), (3,40) bis (3,50) wo in (3,46),(3,47) $\overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}$ statt $\overset{h}{\nu}$ steht) und aus den Gleichungen (10),(13) bis (17) beweist man den zweiten Teil des Satzes.

<u>Satz 3</u>. Durch jeden Punkt (u_1,u_2) der h-ten Brennfläche $\overset{h}{f}$ der von Kugeln mit nichtkonstantem Halbmesser r gebildeten Kugelkongruenz $\overset{2}{p}$ geht (in $\overset{2}{p}$) gerade eine von Kugeln mit konstantem Halbmesser gebildete Kanalfläche $\overset{1}{p}$, welche die h-te Brennfläche $\overset{h}{f}$ längs der Kurve $\overset{h}{\varphi}$ berührt. Es sei (bei solcher Parametrisierung der Fläche $\overset{1}{p}$ in der die Einheitsvektoren der Flächennormalen von Flächen $\overset{1}{p}$, $\overset{h}{f}$ identisch sind) $\overset{h}{\overline{\varepsilon}} = +1$ bzw. $\overset{h}{\overline{\varepsilon}} = -1$ je nachdem, ob hier eine positive Richtung der Kurve $\overset{h}{\varphi}$ auf der Fläche $\overset{1}{p}$ in der Richtung bzw. Gegenrichtung des wachsenden Parameters der Kurve $\overset{h}{\varphi}$ verläuft und $*\overset{h}{\varepsilon}$ das Vorzeichen des Ausdruckes dessen absoluter Betrag auf der rechten Seite der Gleichung (12) steht. Für die mittlere Krümmung $\overset{ch}{H}$ und das Gauszsche Krümmungsmass $\overset{ch}{K}$ der Kanalfläche $\overset{1}{p}$ gilt dann im Punkt (u_1,u_2) der Fläche $\overset{h}{f}$ bei Parametern u_1, u_2 aus (9) und $r_2 > 0$:

1) im Fall $\overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}\varkappa^{-1} - \overset{h}{\vartheta} \neq 0$ (d.h. im Fall, wenn die Kugel (u_1,u_2) der Kugelkongruenz $\overset{2}{p}$ mit der Kurve $\overset{h}{\varphi}$ im Punkt (u_1,u_2) gerade 2 Punkt-Berührung hat)

$$(18)\quad \overset{ch}{H} = (\overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}\varkappa^{-1} - \overset{h}{\mathfrak{b}})^{-1}\{\varkappa^{-2} - \overset{h}{\mathfrak{b}}^{2} - [\mathfrak{t}(\operatorname{arc}\cos\overset{h}{\beta}\overset{h}{\mathfrak{b}}\overset{h}{\mathfrak{k}}{}_1^{-1})_{,i}\overset{h}{\mathfrak{d}}{}^{i} + {}^{*}\overset{h}{\varepsilon}\overset{h}{\mathfrak{k}}_2]^2\} ,$$

$$(19)\quad \overset{ch}{K} = (\overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}\varkappa^{-1} - \overset{h}{\mathfrak{b}})^{-1} \cdot$$

$$\cdot\{\varkappa^{-2}\overset{h}{\mathfrak{b}} - \overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}\varkappa^{-1}\overset{h}{\mathfrak{b}}^{2} - \overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}\varkappa^{-1}[\mathfrak{t}(\operatorname{arc}\cos\overset{h}{\beta}\overset{h}{\mathfrak{b}}\overset{h}{\mathfrak{k}}{}_1^{-1})_{,i}\cdot\overset{h}{\mathfrak{d}}{}^{i} + {}^{*}\overset{h}{\varepsilon}\overset{h}{\mathfrak{k}}_2]^2\} ;$$

2) im Fall $\overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}\varkappa^{-1} - \overset{h}{\mathfrak{b}} = 0$ (d.h. im Fall, wenn die Kugel (u_1, u_2) der Kugelkongruenz $\overset{2}{p}$ mit der Kurve $\overset{h}{\varphi}$ im Punkt (u_1, u_2) wenigstens 3 Punktberührung hat)

$$(20)\qquad \overset{ch}{K} = \varkappa^{-1}(\overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}\overset{ch}{H} - \varkappa^{-1}) .$$

<u>Beweis</u>. Aus [11] (Satz 3.2 und Gleichung (1,43)) und aus [10] (Satz I) folgt, dass der Einheitsvektor $\overset{ch}{N}$ der Flächennormalen von $\overset{1}{p}$ die Form $\overset{ch}{N} = \overset{h}{\nu}\varkappa^{-1}(\mathfrak{s} - \overset{h}{\mathfrak{f}})$ hat. Aus [11] (Gleichungen (3,45),(3,46), wo $\overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}$ statt $\overset{h}{\nu}$ steht) und aus (13) bis (15) bekommt man für Hauptnormalenvektor $\overset{h}{n}$ der Kurve $\overset{h}{\varphi}$ $\overset{h}{\mathfrak{n}} = \overset{h}{\mathfrak{k}}{}_1^{-1}\overset{h}{\mathfrak{f}}_{\underset{h}{t}\underset{h}{t}} = \overset{h}{\mathfrak{k}}{}_1^{-1}(\overset{h}{D}{}^{k}\overset{h}{\mathfrak{f}}_{k} + \overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}\varkappa^{-1}\overset{h}{\mathfrak{b}}(\mathfrak{s} - \overset{h}{\mathfrak{f}}))$. Daraus und aus [11] (Gleichungen (1,42),(1,102) bekommt man

$$\cos\overset{h}{\omega} = \overset{ch}{N}\cdot\overset{h}{\mathfrak{n}} = \overset{h}{\beta}\overset{h}{\mathfrak{b}}\overset{h}{\mathfrak{k}}{}_1^{-1},\quad \overset{h}{\omega}{}' = \frac{d\overset{h}{\omega}}{d\underset{h}{t}} = \overset{h}{\omega}_{,i}\overset{h}{\mathfrak{d}}{}^{i} = (\operatorname{arc}\cos\overset{h}{\beta}\overset{h}{\mathfrak{b}}\overset{h}{\mathfrak{k}}{}_1^{-1})_{,i}\overset{h}{\mathfrak{d}}{}^{i} ,$$

wo $\overset{h}{k}_1$ durch (11) im Satz 2 gegeben wird. Unter Anwendung von [10] (Beweis des Satzes I, Satz II), ferner wenn man berücksichtigt, dass für Kanalfläche $r - c = 0$

$\dfrac{du_2}{du_1} = -\dfrac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$ gilt und auf Grund der durch partielle Ableitung der Grundrelation unter hexaspherischen Koordinaten entstehenden Gleichung beweist man, dass die Kanalfläche $r - c = 0$ jede ihre eigene Kugel längs ihrer Hauptkreislinie $\varkappa$ berührt. Daraus ergibt sich

$$\cos \overset{\varkappa}{\omega} = \overset{h}{\nu}, \ \overset{\varkappa}{\omega}{}' = 0, \ \overset{\varkappa}{k}_1 = r^{-1}, \ \overset{\varkappa}{k}_2 = 0 \ .$$

Wenn wir aus vorhergehenden Gleichungen und aus (11),(12) in die Gleichung (sieh [6], Sätze (1,3),(2,2a), S. 300, 252)

$$\varepsilon H k_1 \cos \omega - K = (k_1 \cos \omega)^2 + (\bar{\varepsilon}\, \omega' + {}^*\varepsilon k_2)^2$$

ansetzen, bekommen wir zwei Gleichungen für Unbekannten $\overset{ch}{H}$, $\overset{ch}{K}$

$$\overset{h}{b}\,\overset{ch}{H} - \overset{ch}{K} = \overset{h}{b}{}^2 + [\,\overset{h}{\varepsilon}\,(\arc\cos \overset{h}{\beta}\,\overset{h}{b}\,\overset{h}{k}{}_1^{-1})_{;i}\, \overset{h}{d}{}^{i} + {}^*\overset{h}{\varepsilon}\,\overset{h}{k}_2\,]^2 \ ,$$

$$\overset{h}{\beta}\,\overset{h}{\nu}\, r^{-1} \overset{ch}{H} - \overset{ch}{K} = r^{-2} \ ,$$

und daraus, mit Rücksicht auf [11] (Sätze 3.25, 3.26, wo $\overset{h}{\beta}\,\overset{h}{\nu}$ statt $\overset{h}{\nu}$ steht), bekommen wir Behauptung des Satzes 3.

<u>Satz 4</u>. 1. Wenn für die von Kugeln mit konstantem Halbmesser gebildete Kugelkongruenz $\overset{2}{p}$ in Parametern u_1, u_2 aus (9)

$$\overset{ds}{T}_{11}\,\overset{ss}{T}_{22} - \overset{ds}{T}_{22}\,\overset{ss}{T}_{11} = 0 \tag{21}$$

gilt, d.h. die Mittelpunktfläche der Kugelkongruenz $\overset{2}{p}$ die Ebene oder die Kugelfläche ist, dann wird die jeder Kanalfläche in der Kongruenz $\overset{2}{p}$ adjungierte geradlinigie Fläche abwickelbar.

2. Wenn für die von Kugeln mit konstantem Halbmesser gebildete Kugelkongruenz $\overset{2}{p}$ in Parametern u_1, u_2 aus (9)

$$(22) \qquad \overset{ds}{T}_{11}\overset{ss}{T}_{22} - \overset{ds}{T}_{22}\overset{ss}{T}_{11} \neq 0$$

gilt, dann gehen durch jede Kugel der Kugelkongruenz $\overset{2}{p}$ in $\overset{2}{p}$ gerade zwei Kanalflächen, deren adjungierte geradlinige Flächen abwickelbar sind. Diese zwei Kanalflächen berühren die h-te Brennfläche $\overset{h}{f}$ der Kugelkongruenz $\overset{2}{p}$ längs der Kurven $\overset{h}{\varphi}_{i+(-1)^{i+1}}$ mit Gleichungen $du_{i+(-1)^{i+1}} = 0$ $(i = 1,2)$, wo für u_1, u_2 (9) gilt. Die Kurven $\overset{h}{\varphi}_1$, $\overset{h}{\varphi}_2$ sind Krümmungslinien der Fläche $\overset{h}{f}$ im Punkt (u_1, u_2).

3. Für Krümmung $\overset{h}{k}_{1\,i+(-1)^{i+1}}$ und Windung $\overset{h}{k}_{2\,i+(-1)^{i+1}}$ der Kurve $\overset{h}{\varphi}_{i+(-1)^{i+1}}$ $(i = 1,2)$ im Punkt (u_1, u_2) der h-ten Brennfläche $\overset{h}{f}$ der Kugelkongruenz $\overset{2}{p}$ gilt dann in Parametern u_1, u_2 aus (9)

$$(23) \qquad \overset{h}{k}_{1\,i+(-1)^{i+1}} = \overset{h}{a}{}_{ii}^{-1}\Big[\big(\overset{h}{\Gamma}{}^{i+(-1)^{i+1}}_{ii}\big)^2 \overset{h}{a}_{i+(-1)^{i+1}\,i+(-1)^{i+1}} + \overset{h}{b}{}_{ii}^{2}\Big]^{\frac{1}{2}} ,$$

$$(24) \qquad \overset{h}{k}_{2\,i+(-1)^{i+1}} = \overset{h}{a}{}_{ii}^{-1}\big(\overset{ss}{T}_{ii}\overset{ss}{T}_{i+(-1)^{i+1}\,i+(-1)^{i+1}}\big)^{-\frac{1}{2}}\Big[\big(\overset{h}{\Gamma}{}^{i+(-1)^{i+1}}_{ii}\big)^2 \overset{h}{a}_{i+(-1)^{i+1}\,i+(-1)^{i+1}} + \overset{h}{b}{}_{ii}^{2}\Big]^{-1} .$$
$$. \Big|\big[\overset{ss}{T}_{ii} + (-1)^h \varkappa\, \overset{ds}{T}_{ii}\big]\big[\overset{ss}{T}_{i+(-1)^{i+1}\,i+(-1)^{i+1}} + (-1)^h \varkappa\, \overset{ds}{T}_{i+(-1)^{i+1}\,i+(-1)^{i+1}}\big] .$$
$$. \Big[\overset{h}{b}_{ii}\big(\overset{h}{\Gamma}{}^{i+(-1)^{i+1}}_{ii}\big)_i + \overset{h}{b}_{ii}\overset{h}{\Gamma}{}^{i+(-1)^{i+1}}_{ii}\overset{h}{\Gamma}{}^{i+(-1)^{i+1}}_{i+(-1)^{i+1}\,i} - \big(\overset{h}{b}_{ii}\big)_i \overset{h}{\Gamma}{}^{i+(-1)^{i+1}}_{ii}\Big]\Big| .$$

<u>Beweis</u>. Behauptungen 1,2 des Satzes 4 ergeben sich aus [11] (Sätzen 3.5, 1.13, Definition 4.1, (1,43)), aus [6] (Sätz-

en (1,6),(3,6),(1,1),(2,1),(3,2), S. 371, 306, 275, 279, 305) und aus (10).

Weiter beweist man aus [11] ((1,37)) und aus [6] (Satz (1,3), S. 148), dass für die Bogenlänge $\overset{h}{t}_i$ der Kurve $\overset{h}{\varphi}_{i+(-1)^{i+1}}$ im Punkt (u_1,u_2) in Parametern u_1, u_2 aus (9)

$$\frac{du_i}{d\overset{h}{t}_i}=\overset{h}{a}{}_{ii}^{-\frac{1}{2}},\quad \frac{d^2u_i}{d\overset{h}{t}{}_i^2}=-\overset{h}{\Gamma}{}^i_{ii}\,\overset{h}{a}{}_{ii}^{-1},\quad \frac{d^m u_{i+(-1)^{i+1}}}{d\overset{h}{t}{}_i^m}=0\quad (m=1,2)$$

gilt. Daraus, aus [11] (Sätzen 3.22, 3.23, Gleichungen (1,37), (3,40) bis (3,50), wo in (3,46), (3,47) $\overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}$ statt $\overset{h}{\nu}$ steht) und aus (10),(14) beweist man Behauptung 3 des Satzes 4.

<u>Satz 5</u>. Durch jeden Punkt (u_1,u_2) der h-ten Brennfläche $\overset{h}{f}$ der von Kugeln mit konstantem Halbmesser r gebildeten Kugelkongruenz $\overset{2}{p}$ mit (22) gehen in $\overset{2}{p}$ gerade zwei Kanalflächen $\overset{1}{p}_{i+(-1)^{i+1}}$ $(i = 1,2)$, deren adjungierte geradlinige Flächen abwickelbar sind; dabei berührt die Kanalfläche $\overset{1}{p}_{i+(-1)^{i+1}}$ die Brennfläche $\overset{h}{f}$ längs der Kurve $\overset{h}{\varphi}_{i+(-1)^{i+1}}$. Es sei (bei solcher Parametrisierung der Fläche $\overset{1}{p}_{i+(-1)^{i+1}}$ in der die Einheitsvektoren der Flächennormalen von Flächen $\overset{1}{p}_{i+(-1)^{i+1}}$ $\overset{h}{f}$ identisch sind) $\overset{h}{\overline{\varepsilon}}=+1$ bzw. $\overset{h}{\overline{\varepsilon}}=-1$ je nachdem ob hier eine positive Richtung der Kurve $\overset{h}{\varphi}_{i+(-1)^{i+1}}$ auf der Fläche $\overset{1}{r}_{i+(-1)^{i+1}}$ in der Richtung bzw. Gegenrichtung des wachsenden Parameters der Kurve $\overset{h}{\varphi}_{i+(-1)^{i+1}}$ verläuft, und $\overset{*h}{\varepsilon}_{i+(-1)^{i+1}}$ das Vorzeichen des mit $(-1)^{h+i+(-1)^{i+1}}$ multiplizierten Aus-

drucks dessen absoluter Betrag auf der rechten Seite der Gleichung (24) steht. Für die mittlere Krümmung $\overset{ch}{H}_{i+(-1)^{i+1}}$ und das Gauszsche Krümmungsmass $\overset{ch}{K}_{i+(-1)^{i+1}}$ der Kanalfläche $\overset{1}{p}_{i+(-1)^{i+1}}$ gilt dann im Punkt (u_1,u_2) der Fläche $\overset{h}{f}$ in Parametern u_1, u_2 aus (9):

1) im Fall $\overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}\varkappa^{-1} - \overset{h}{a}{}_{ii}^{-1}\overset{h}{b}_{ii} \neq 0$ (d.h. im Fall, wenn die Kugel (u_1,u_2) der Kugelkongruenz $\overset{2}{p}$ mit der Kurve $\overset{h}{\varphi}_{i+(-1)^{i+1}}$ im Punkt (u_1,u_2) gerade 2 Punkt-Berührung hat)

$$(25)\qquad \overset{ch}{H}_{i+(-1)^{i+1}} =$$

$$= (\overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}\varkappa^{-1} - \overset{h}{a}{}_{ii}^{-1}\overset{h}{b}_{ii})^{-1}\{\varkappa^{-2} - \overset{h}{a}{}_{ii}^{-2}\overset{h}{b}{}_{ii}^{2} - [\overset{h}{\bar{\varepsilon}}_{i+(-1)^{i+1}}\cdot$$

$$\cdot(\arccos \overset{h}{\beta}\overset{h}{a}{}_{ii}^{-1}\overset{h}{b}_{ii}\cdot {}_{i+(-1)^{i+1}}\overset{h}{k}_{1})_{i}\,\overset{h}{a}{}_{ii}^{-\frac{1}{2}} + {}^{*}\varepsilon_{i+(-1)^{i+1}}\overset{h}{k}_{2\,i+(-1)^{i+1}}]^{2}\},$$

$$(26)\ \overset{ch}{K}_{i+(-1)^{i+1}} = (\overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}\varkappa^{-1} - \overset{h}{a}{}_{ii}^{-1}\overset{h}{b}_{ii})^{-1}\{\varkappa^{-2}\overset{h}{a}{}_{ii}^{-1}\overset{h}{b}_{ii} - \overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}\varkappa^{-1}\overset{h}{a}{}_{ii}^{-2}\overset{h}{b}{}_{ii}^{2} - \overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}\varkappa^{-1}\cdot$$

$$\cdot[\overset{h}{\bar{\varepsilon}}_{i+(-1)^{i+1}}(\arccos \overset{h}{\beta}\overset{h}{a}{}_{ii}^{-1}\overset{h}{b}_{ii}\,\overset{h}{k}_{1\,i+(-1)^{i+1}})_{i}\,\overset{h}{a}{}_{ii}^{-\frac{1}{2}} + {}^{*}\overset{h}{\varepsilon}_{i+(-1)^{i+1}}\,{}_{i+(-1)^{i+1}}\overset{h}{k}_{2}]^{2}\};$$

2) im Fall $\overset{h}{\beta}\overset{h}{\nu}\varkappa^{-1} - \overset{h}{a}{}_{ii}^{-1}\overset{h}{b}_{ii} = 0$ (d.h. wenn die Kugel (u_1,u_2) der Kugelkongruenz $\overset{2}{p}$ mit der Kurve $\overset{h}{\varphi}_{i+(-1)^{i+1}}$ im Punkt (u_1,u_2) wenigstens 3 Punkt-Berührung hat)

$$(27)\qquad \overset{ch}{K}_{i+(-1)^{i+1}} = \varkappa^{-1}(\overset{h}{\beta}\,\overset{h}{\nu}\,\overset{ch}{H}_{i+(-1)^{i+1}} - \varkappa^{-1}) \,.$$

Beweis des Satzes 5 ist, unter Anwendung vom Satz 4 und von seinem Beweis, dem Beweis des Satzes 3 analog.

<u>Satz 6</u>. Es sei h-te Brennfläche $\overset{h}{\underset{\alpha}{g}}$ der adjungierten Linienkongruenz $\overset{1}{F}_{\alpha}\overset{2}{F}$ eine Fläche, u_1, u_2 Parameter aus (9). Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass durch einen Punkt (u_1,u_2) der Fläche $\overset{h}{\underset{\alpha}{g}}$ auf $\overset{h}{\underset{\alpha}{g}}$ zwei reelle verschiedene bzw. identische Kurven gehen, mit in der Kongruenz $\overset{1}{F}_{\alpha}\overset{2}{F}$ beigeordneten geradlinigen abwickelbaren Flächen, ist es dann dass

$$(28)\qquad c_{12}^2 - c_{11}c_{22} > 0 \qquad \text{bzw.} \qquad c_{12}^2 - c_{11}c_{22} = 0$$

gilt, wo

$$(29)\qquad c_{ij} = (-1)^{n+1}\delta_n^n \overset{hh}{T}{}_{nn}^{-\frac{1}{2}} \overset{hh}{T}{}_{n+(-1)^{n+1}n+(-1)^{n+1}}^{\frac{1}{2}} (\overset{kh}{T}_{ni}\overset{ch}{T}_{jj}\overset{hh}{T}{}_{jj}^{-1}\delta_j^{n+(-1)^{n+1}} + \overset{kh}{T}_{nj}\overset{ch}{T}_{ii}\overset{hh}{T}{}_{ii}^{-1}\delta_i^{n+(-1)^{n+1}})$$

ist. Gilt (28), so tritt (bei zweckmässiger Bezeichnung von Parametern aus (9)) gerade ein von folgenden Fällen ein:

1. Bei $c_{22} \neq 0$ haben erwähnte Kurven, weiter als Kurven $\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{\varphi}}$ bezeichnet, die Gleichungen

$$(30)\qquad \gamma(-\gamma c_{22})^{-\frac{1}{2}}\{-c_{12} + \varepsilon[c_{12}^2 - c_{11}c_{22}]^{\frac{1}{2}}\}du_1 + (-\gamma c_{22})^{\frac{1}{2}}du_2 = 0\,,\quad \gamma = \operatorname{sgn}(-c_{22}),\quad \varepsilon = \pm 1 \,.$$

Für Krümmung $\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{k}}{}_1$ und Windung $\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{k}}{}_2$ der Kurve $\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{\varphi}}$ im Punkt (u_1,u_2) der h-ten Brennfläche $\overset{h}{\underset{\alpha}{g}}$ gilt dann

(31) $$\underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{k}}{}_1 = \Big(\underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{D}}{}^m \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{D}}{}^n \underset{\alpha}{\overset{h}{a}}{}_{mn} + \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{b}}{}^2\Big)^{\frac{1}{2}} ,$$

(32) $$\underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{k}}{}_2 = \Big(\underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{D}}{}^m \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{D}}{}^n \underset{\alpha}{\overset{h}{a}}{}_{mn} + \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{b}}{}^2\Big)^{-1} \Big| \underset{\alpha}{\overset{h}{\Pi}} \Big\{ \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{D}}{}^n \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^i \Big(\underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{b}}{}_m \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^m + \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{D}}{}^k \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^l \underset{\alpha}{\overset{h}{b}}{}_{kl} \Big) -$$

$$- \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{b}} \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^i \Big(\underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{D}}{}^m_m \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^m + \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{D}}{}^k \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^l \underset{\alpha}{\overset{h}{\Gamma}}{}^m_{kl} \Big) \Big\} \Big\{ \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{inv} \underset{\alpha}{\overset{h}{g}}{}_{ij_1} \underset{\alpha}{\overset{h}{g}}{}_{nj_2} \underset{\alpha}{\overset{h}{n}}{}_{j_3} \Big\} +$$

$$+ \underset{\alpha}{\overset{h}{\Pi}} \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{b}} \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{D}}{}^k \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^i \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^l \Big\{ \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{inv} \underset{\alpha}{\overset{h}{g}}{}_{ij_1} \underset{\alpha}{\overset{h}{g}}{}_{kj_2} \underset{\alpha}{\overset{h}{n}}{}_{lj_3} \Big\} + \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{b}}{}^2 \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^i \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^l \,\cdot$$

$$\cdot \Big\{ \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{inv} \underset{\alpha}{\overset{h}{g}}{}_{ij_1} \underset{\alpha}{\overset{h}{n}}{}_{j_2} \underset{\alpha}{\overset{h}{n}}{}_{lj_3} \Big\} \Big| ,$$

wo

(33) $$\underset{\varepsilon}{\rho}{}_1 = \gamma(-\gamma c_{22})^{-\frac{1}{2}} \{ -c_{12} + \varepsilon [c_{12}^2 - c_{11} c_{22}]^{\frac{1}{2}} \}, \quad \underset{\varepsilon}{\rho}{}_2 = (-\gamma c_{22})^{\frac{1}{2}} ,$$

(34) $$\underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^i = \frac{d u_i}{d \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{t}}} =$$

$$= (-1)^{i+1} \underset{\varepsilon}{\rho}{}_1 \underset{\varepsilon}{\rho}{}_2 \underset{\varepsilon}{\rho}{}_j^{-1} \delta^{ij} \big[(-1)^{m+n} \underset{\varepsilon}{\rho}{}_{m+(-1)^{m+1}} \underset{\varepsilon}{\rho}{}_{n+(-1)^{n+1}} \underset{\alpha}{\overset{h}{a}}{}_{mn} \big]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\underset{\varepsilon}{\rho}{}_1 \underset{\varepsilon}{\rho}{}_1^{-1} \equiv 1),$$

(35) $$\underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{b}} = \underset{\alpha}{\overset{h}{b}}{}_{ij} \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^i \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^j , \quad \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^i_j = \frac{\partial \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^i}{\partial u_j} ,$$

(36) $$\underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{D}}{}^k = \underset{\alpha}{\overset{h}{\Gamma}}{}^k_{ij} \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^i \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^j + \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^k_i \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{d}}{}^i , \quad \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{D}}{}^k_l = \frac{\partial \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{D}}{}^k}{\partial u_l} ,$$

(37) $$\underset{\alpha}{\overset{h}{g}}{}_{ij} = \delta^i_j \delta^j_i \overset{ss}{T}{}_{ii}^{-\frac{1}{2}} \big(\overset{ls}{T}{}_{ii} + \underset{\alpha}{\overset{h}{w}} \overset{ds}{T}{}_{ii} \big) +$$

$$+ \delta^i_{j+(-1)^{j+1}} \delta^{j+(-1)^{j+1}}_i \overset{ss}{T}{}^{-\frac{1}{2}}_{i+(-1)^{i+1}\, i+(-1)^{i+1}} \overset{ls}{T}{}_{i+(-1)^{i+1}\, i} , \quad j = 1, 2 ,$$

$$ {}^{h}_{\alpha}g_{i3} = \varkappa x_i \overset{ss}{T}{}^{-1}_{ii} \overset{ds}{T}_{ii} + {}^{h}_{\alpha}w_i \quad , $$

$$ (38) \quad {}^{h}_{\alpha}m_{j} = {}^{h}_{\alpha}k \, \overset{ss}{T}{}^{\frac{1}{2}}_{jj} \, [\sigma^{j}_{h}(\overset{ls}{T}_{h+(-1)^{h+1}\,h+(-1)^{h+1}} + $$

$$ + {}^{h}_{\alpha}w \, \overset{ds}{T}_{h+(-1)^{h+1}\,h+(-1)^{h+1}}) - \sigma^{j}_{h+(-1)^{h+1}} \overset{ls}{T}_{h\,h+(-1)^{h+1}}], \; j = 1, 2, \; {}^{h}_{\alpha}m_{3} = 0 , $$

$$ (39) \quad {}^{h}_{\alpha}m_{ij} = \overset{ss}{T}{}^{\frac{1}{2}}_{jj} \{ \sigma^{j}_{h} \{ [{}^{h}_{\alpha}k (\overset{ls}{T}_{h+(-1)^{h+1}\,h+(-1)^{h+1}} + {}^{h}_{\alpha}w \, \overset{ds}{T}_{h+(-1)^{h+1}\,h+(-1)^{h+1}})]_{i} + $$

$$ + {}^{h}_{\alpha}k [(\overset{ls}{T}_{h+(-1)^{h+1}\,h+(-1)^{h+1}} + {}^{h}_{\alpha}w \, \overset{ds}{T}_{h+(-1)^{h+1}\,h+(-1)^{h+1}}) \Gamma^{h}_{hi} - $$

$$ - \overset{ls}{T}_{h\,h+(-1)^{h+1}} \Gamma^{h}_{h+(-1)^{h+1}\,i}]\} + \sigma^{j}_{h+(-1)^{h+1}} \{ - [{}^{h}_{\alpha}k \, \overset{ls}{T}_{h\,h+(-1)^{h+1}}]_{i} + $$

$$ + {}^{h}_{\alpha}k [(\overset{ls}{T}_{h+(-1)^{h+1}\,h+(-1)^{h+1}} + {}^{h}_{\alpha}w \, \overset{ds}{T}_{h+(-1)^{h+1}\,h+(-1)^{h+1}}) \Gamma^{h+(-1)^{h+1}}_{hi} - $$

$$ - \overset{ls}{T}_{h\,h+(-1)^{h+1}} \Gamma^{h+(-1)^{h+1}}_{h+(-1)^{h+1}\,i}]\}\}, \; j = 1, 2, \; {}^{h}_{\alpha}m_{i3} = - {}^{h}_{\alpha}k [(\overset{ls}{T}_{h+(-1)^{h+1}\,h+(-1)^{h+1}} + $$

$$ + {}^{h}_{\alpha}w \, \overset{ds}{T}_{h+(-1)^{h+1}\,h+(-1)^{h+1}}) \overset{ds}{T}_{hi} - \overset{ls}{T}_{h\,h+(-1)^{h+1}} \overset{ds}{T}_{h+(-1)^{h+1}\,i}] , $$

inv = Anzahl von Inversionen in der Permutation $j_1 j_2 j_3$ ($j_1, j_2, j_3 = 1,2,3$) ist, und ${}^{h}_{\alpha}\Pi$, ${}^{h}_{\alpha}a_{ij}$, ${}^{h}_{\alpha}b_{ij}$, ${}^{h}_{\alpha}\Gamma^{k}_{ij}$, ${}^{h}_{\alpha}w$, ${}^{h}_{\alpha}k$ durch [11] (Satz 5.15, Gleichungen (5,41),(5,48), (5,89),(5,33),(5,34),(5,46),(5,47)) und Gleichungen (10) gegeben werden.

2. Bei $c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12} \neq 0$ haben erwähnte Kurven, weiter als Kurven ${}^{h}_{\alpha}\varphi_{i+(-1)^{i+1}}$ bezeichnet, die Gleichungen

$$ (40) \qquad du_{i+(-1)^{i+1}} = 0 , \qquad i = 1, 2 \; . $$

Für Krümmung $\underset{i+(-1)^{i+1}}{\overset{h}{\underset{\alpha}{k}}{}_{1}}$ und Windung $\underset{i+(-1)^{i+1}}{\overset{h}{\underset{\alpha}{k}}{}_{2}}$ der Kurve $\underset{i+(-1)^{i+1}}{\overset{h}{\underset{\alpha}{g}}}$ im Punkt (u_1,u_2) der h-ten Brennfläche $\overset{h}{\underset{\alpha}{g}}$ gilt dann

$$(41)\qquad \underset{i+(-1)^{i+1}}{\overset{h}{\underset{\alpha}{k}}{}_{1}} = \overset{h}{\underset{\alpha}{a}}{}^{-1}_{ii}\,\Big[\Big(\overset{h}{\underset{\alpha}{\Gamma}}{}^{i+(-1)^{i+1}}_{ii}\Big)^2\,\overset{h}{\underset{\alpha}{a}}{}_{i+(-1)^{i+1}\,i+(-1)^{i+1}} + \overset{h}{\underset{\alpha}{b}}{}^{2}_{ii}\Big]^{\frac{1}{2}}\,,$$

$$(42)\qquad \underset{i+(-1)^{i+1}}{\overset{h}{\underset{\alpha}{k}}{}_{2}} =$$

$$= \overset{h}{\underset{\alpha}{a}}{}^{-1}_{ii}\,\Big[\Big(\overset{h}{\underset{\alpha}{\Gamma}}{}^{i+(-1)^{i+1}}_{ii}\Big)^2\,\overset{h}{\underset{\alpha}{a}}{}_{i+(-1)^{i+1}\,i+(-1)^{i+1}} + \overset{h}{\underset{\alpha}{b}}{}^{2}_{ii}\Big]^{-1}\,\cdot$$

$$\cdot\Big|\overset{h}{\underset{\alpha}{\Pi}}\,\overset{h}{\underset{\alpha}{b}}{}_{ii}\,\overset{h}{\underset{\alpha}{\Gamma}}{}^{i+(-1)^{i+1}}_{ii}\cdot\Big\{\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{inv}\,\overset{h}{\underset{\alpha}{g}}{}_{ij_1}\,\overset{h}{\underset{\alpha}{g}}{}_{i+(-1)^{i+1}j_2}\,\overset{h}{\underset{\alpha}{n}}{}_{ij_3}\Big\} +$$

$$+\ \overset{h}{\underset{\alpha}{b}}{}^{2}_{ii}\cdot\Big\{\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{inv}\,\overset{h}{\underset{\alpha}{g}}{}_{ij_1}\,\overset{h}{\underset{\alpha}{n}}{}_{j_2}\,\overset{h}{\underset{\alpha}{n}}{}_{ij_3}\Big\} -$$

$$-\ \overset{h}{\underset{\alpha}{\Pi}}\Big\{\overset{h}{\underset{\alpha}{b}}{}_{ii}\Big(\overset{h}{\underset{\alpha}{\Gamma}}{}^{i+(-1)^{i+1}}_{ii}\Big)_i + \overset{h}{\underset{\alpha}{b}}{}_{ii}\,\overset{h}{\underset{\alpha}{\Gamma}}{}^{i+(-1)^{i+1}}_{ii}\cdot\overset{h}{\underset{\alpha}{\Gamma}}{}^{i+(-1)^{i+1}}_{i+(-1)^{i+1}i} -$$

$$-\ \Big(\overset{h}{\underset{\alpha}{b}}{}_{ii}\Big)_i\,\overset{h}{\underset{\alpha}{\Gamma}}{}^{i+(-1)^{i+1}}_{ii} - \overset{h}{\underset{\alpha}{b}}{}_{i+(-1)^{i+1}i}\Big(\overset{h}{\underset{\alpha}{\Gamma}}{}^{i+(-1)^{i+1}}_{ii}\Big)^2\Big\}\,\cdot$$

$$\cdot\Big\{\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{inv}\,\overset{h}{\underset{\alpha}{g}}{}_{ij_1}\,\overset{h}{\underset{\alpha}{g}}{}_{i+(-1)^{i+1}j_2}\,\overset{h}{\underset{\alpha}{n}}{}_{j_3}\Big\}\Big|\,.$$

<u>Beweis</u>. Durch Anwendung von [11] (Sätzen 5.12, 5.4 und seinem Beweis, Gleichungen (5,33), Sätzen 5.10, 5.13, 1.10, 5.5, 5.17, 5.9, 5.13),[6] (Satz (4,2), S. 261) und Gleichungen (29),(10) beweist man:

a) Beide Brennflächen der Kugelkongruenz $(\rho;r)$ adjungierten Linienkongruenz $\overset{1}{\underset{I}{F}}\overset{2}{F}$, wo $\rho = (\sin u_1\ \cos u_2,$

$\sin u_1 \sin u_2,\ \cos u_1)$, $\varkappa = \cos u_2$, $\frac{\pi}{4} < u_1 < \frac{\pi}{2}$,

$0 < u_2 < \frac{\pi}{4}$, sind Flächen und $c_{22} \neq 0$.

b) h-te Brennfläche der Kugelkongruenz $(s\,;\, \varkappa = \text{konst})$ adjungierten Linienkongruenz $\underset{\alpha}{\overset{1}{F}}\overset{2}{F}$, wo s weder Kugel noch Ebene ist und $\frac{\partial}{\partial u_h}(\overset{ss}{T}{}^{-1}_{hh}\ \overset{ds}{T}_{hh}) \neq 0$,ist eine Fläche und $c_{11} =$ $= c_{22} = 0$, $c_{12} \neq 0$.

c) Keine Brennfläche der adjungierten Linienkongruenz mit $c_{ij} = 0$ $(i,j = 1,2)$ bildet eine Fläche.

Aus [11] (Definitionen 5.1, 5.2, Behauptung IIa) im Beweis des Satzes 5.4), aus Behauptungen a),b),c) und aus (29) ergeben sich alle Behauptungen des Satzes 6, bis auf diejenigen, welche Krümmungen und Windungen von Kurven $\underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{\varphi}}$, $\underset{i+(-1)^{i+1}}{\underset{\alpha}{\overset{h}{\varphi}}}$ betreffen.

Man beweist, dass für den Tangentenvektor der Kurve $\underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{\varphi}}$

$$\underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{g}}{}_{u_1} = \underset{\varepsilon}{\rho}{}_2^{-1}(\underset{\varepsilon}{\rho}{}_2 \underset{\alpha}{\overset{h}{g}}{}_1 - \underset{\varepsilon}{\rho}{}_1 \underset{\alpha}{\overset{h}{g}}{}_2) = (-1)^{n+1} \underset{\varepsilon}{\rho}{}_2^{-1} \underset{\varepsilon}{\rho}{}_{n+(-1)^{n+1}} \underset{\alpha}{\overset{h}{g}}{}_n$$

und für die Bogenlänge $\underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{t}}$ der Kurve $\underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{\varphi}}$

$$\frac{du_i}{d\underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{t}}} = (-1)^{i+1}(\underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{g}}{}_{u_1} \cdot \underset{\alpha_\varepsilon}{\overset{h}{g}}{}_{u_1})^{-\frac{1}{2}} \underset{\varepsilon}{\rho}{}_1 \underset{\varepsilon}{\rho}{}_j^{-1} \delta^{ij} , \quad (\underset{\varepsilon}{\rho}{}_1 \underset{\varepsilon}{\rho}{}_1^{-1} \equiv 1)$$

gilt.

Weiter beweist man, dass für die Bogenlänge $\underset{\alpha}{\overset{h}{t}}{}_i$ der Kurve $\underset{i+(-1)^{i+1}}{\underset{\alpha}{\overset{h}{\varphi}}}$

$$\frac{du_i}{d\underset{\alpha}{\overset{h}{t}}{}_i} = \underset{\alpha}{\overset{h}{a}}{}_{ii}^{-\frac{1}{2}} , \quad \frac{d^2 u_i}{d\underset{\alpha}{\overset{h}{t}}{}_i^2} = -\underset{\alpha}{\overset{h}{\Gamma}}{}_{ii}^{i}\ \underset{\alpha}{\overset{h}{a}}{}_{ii}^{-1} , \quad \frac{d^m u_{i+(-1)^{i+1}}}{d\underset{\alpha}{\overset{h}{t}}{}_i^m} = 0 \quad (m = 1, 2)$$

gilt.

Aus vorhergehenden Gleichungen, aus [11] (Satz 5.24, Gleichungen (5,88) bis (5,93), wo in (5,92), (5,93) $\overset{h}{\underset{\alpha}{\Pi}}\overset{h}{\underset{\alpha}{b}}_{ij}$ statt $\overset{h}{\underset{\alpha}{b}}_{ij}$ steht) und aus Gleichungen (10), (33) bis (39) beweist man die Formeln (31), (32), (41), (42), und dadurch den Teil des Satzes 6, welcher Krümmungen und Windungen von Kurven $\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{\varphi}}$, $\overset{h}{\underset{\overset{\alpha}{i+(-1)^{i+1}}}{\varphi}}$ behandelt.

<u>Satz 7</u>. Es sei $\overset{1}{\underset{\alpha_\varepsilon}{q}}$ [$\overset{1}{\underset{\overset{\alpha}{i+(-1)^{i+1}}}{q}}$] die in der adjungierten Linienkongruenz der Kurve $\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{\varphi}}$ [$\overset{h}{\underset{\overset{\alpha}{i+(-1)^{i+1}}}{\varphi}}$] beigeordnete abwickelbare Fläche. Dann gilt: Gerade eine von den Kurven $\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{\varphi}}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ [$\overset{h}{\underset{\overset{\alpha}{i+(-1)^{i+1}}}{\varphi}}$ $(i = 1,2)$] ist die Berührungskurve der Fläche $\overset{1}{\underset{\alpha_\varepsilon}{q}}$ [$\overset{1}{\underset{\overset{\alpha}{i+(-1)^{i+1}}}{q}}$] auf der h-ten Brennfläche $\overset{h}{\underset{\alpha}{g}}$ der adjungierten Linienkongruenz. Im Fall $c_{12}^2 - c_{11}\, c_{22} > 0$ (d.h. im Fall der hyperbolischen Linienkongruenz) ist es diejenige von den Kurven $\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{\varphi}}$ [$\overset{h}{\underset{\overset{\alpha}{i+(-1)^{i+1}}}{\varphi}}$] längs deren in Parametern aus (9)

$$(43)\qquad (\overset{1p}{T}_{ii} + \overset{h}{\underset{\alpha}{w}}\overset{dp}{T}_{ii})\,\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{d}}{}^{i} + \overset{1p}{T}_{i\,i+(-1)^{i+1}}\,\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{d}}{}^{i+(-1)^{i+1}} = 0, \quad i = 1,2\,,$$

$$(44)\qquad [\,(\overset{1p}{T}_{ii} + \overset{h}{\underset{\alpha}{w}}\overset{dp}{T}_{ii})\,\overset{h}{\underset{\alpha}{a}}{}_{ii}^{-\frac{1}{2}} = 0\,]$$

nicht gilt. Im Fall $c_{12}^2 - c_{11}c_{22} = 0$ (d.h. im Fall der parabolischen Linienkongruenz) ist es die Kurve $\overset{h}{\underset{\alpha_{+1}}{\varphi}} = \overset{h}{\underset{\alpha_{-1}}{\varphi}}$ längs deren in Parametern aus (9) (43) und

$$(45)\qquad \sigma_i^{\,i}\,\sigma_j^{\,j}\,\overset{h}{\underset{\alpha}{b}}{}_{ij}\;\underset{\varepsilon}{\rho}{}_{i+(-1)^{i+1}}\;\underset{\varepsilon}{\rho}{}_{j+(-1)^{j+1}} = 0$$

gilt.

Dann gilt für die Fläche $\overset{1}{\underset{\alpha_\varepsilon}{q}}$ $[\overset{1}{\underset{i\overset{\alpha}{+}(-1)^{i+1}}{q}}]$, welche die Brennfläche $\overset{h}{\underset{\alpha}{g}}$ längs der Kurve $\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{\varphi}}$ $[\overset{h}{\underset{i\overset{\alpha}{+}(-1)^{i+1}}{\varphi}}]$ berührt: Es sei bei solcher Parametrisierung der Fläche $\overset{1}{\underset{\alpha_\varepsilon}{q}}$ $[\overset{1}{\underset{i\overset{\alpha}{+}(-1)^{i+1}}{q}}]$ in welcher Einheitsvektoren der Flächennormalen von Flächen $\overset{1}{\underset{\alpha_\varepsilon}{q}}$ $[\overset{1}{\underset{i\overset{\alpha}{+}(-1)^{i+1}}{q}}]$, $\overset{h}{\underset{\alpha}{g}}$ identisch sind, $\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{\bar\varepsilon}}$ $[\overset{h}{\underset{i\overset{\alpha}{+}(-1)^{i+1}}{\bar\varepsilon}}] = +1$ bzw. -1 je nachdem, ob hier eine positive Richtung der Kurve $\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{\varphi}}$ $[\overset{h}{\underset{i\overset{\alpha}{+}(-1)^{i+1}}{\varphi}}]$ auf der Fläche $\overset{1}{\underset{\alpha_\varepsilon}{q}}$ $[\overset{1}{\underset{i\overset{\alpha}{+}(-1)^{i+1}}{q}}]$ in der Richtung bzw. Gegenrichtung des wachsenden Parameters der Kurve $\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{\varphi}}$ $[\overset{h}{\underset{i\overset{\alpha}{+}(-1)^{i+1}}{\varphi}}]$ verläuft, und ${}^*\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{\varepsilon}}$ $[{}^*\overset{h}{\underset{i\overset{\alpha}{+}(-1)^{i+1}}{\varepsilon}}]$ das Vorzeichen des Ausdruckes dessen absoluter Betrag auf der rechten Seite der Gleichung (32) [(42)] steht. Für die mittlere Krümmung $\overset{ch}{\underset{\alpha_\varepsilon}{H}}$ $[\overset{ch}{\underset{i\overset{\alpha}{+}(-1)^{i+1}}{H}}]$ der abwickelbaren Fläche $\overset{1}{\underset{\alpha_\varepsilon}{q}}$ $[\overset{1}{\underset{i\overset{\alpha}{+}(-1)^{i+1}}{q}}]$ gilt dann im Punkt (u_1, u_2) der Brennfläche $\overset{h}{\underset{\alpha}{g}}$ in Parametern u_1, u_2 aus (9) im Fall $c_{12}^2 - c_{11}c_{22} > 0$

$$(46)\quad \overset{ch}{\underset{\alpha_\varepsilon}{H}} = \overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{b}} + [\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{\bar\varepsilon}}(\arccos \overset{h}{\underset{\alpha}{\Pi}}\,\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{b}}\,\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{k}}{}_1^{-1})_{,i}\,\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{d}}{}^{i} + {}^*\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{\varepsilon}}\,\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{k}}{}_2]^2\,\overset{h}{\underset{\alpha_\varepsilon}{b}}{}^{-1} ,$$

$$(47)\qquad \overset{ch}{\underset{\alpha}{H}}_{i+(-1)^{i+1}} = \overset{h}{\underset{\alpha}{a}}{}^{-1}_{ii}\, \overset{h}{\underset{\alpha}{b}}_{ii} +$$

$$+ [\, \overset{h}{\underset{\alpha}{\varepsilon}}_{i+(-1)^{i+1}} (\arccos \overset{h}{\underset{\alpha}{\Pi}}\, \overset{h}{\underset{\alpha}{k}}{}^{-1}_{1\,i+(-1)^{i+1}}\, \overset{h}{\underset{\alpha}{a}}{}^{-1}_{ii}\, \overset{h}{\underset{\alpha}{b}}_{ii})_i\, \overset{h}{\underset{\alpha}{a}}{}^{-\frac{1}{2}}_{ii} + {}^{*}\overset{h}{\underset{\alpha}{\varepsilon}}_{i+(-1)^{i+1}}\, \overset{h}{\underset{\alpha}{k}}_{2\,i+(-1)^{i+1}}\,]^2\, \overset{h}{\underset{\alpha}{a}}_{ii}\, \overset{h}{\underset{\alpha}{b}}{}^{-1}_{ii} .$$

<u>Beweis</u>. Der erste Teil des Satzes 7, der die Gleichungen (43) bis (45) enthält, wird durch Anwendung von [11] (Satz 5.25), Gleichungen (10),(34), ferner durch Anwendung davon, was von der Bogenlänge $\overset{h}{t}_{\alpha_\varepsilon}$ $[\,\overset{h}{t}_{\alpha i}\,]$ der Kurve $\overset{h}{\varphi}_{\alpha_\varepsilon}$ $[\,\overset{h}{\underset{\alpha}{\varphi}}_{i+(-1)^{i+1}}\,]$ der Beweis des Satzes 6 angibt, aus (29), aus der Definition einer Striktionslinie einer abwickelbaren Fläche, aus [11] (Definition 5.1), [2] (S. 30 bis 32), [6] (Satz 5,9), S. 319), aus dem Teil der Behauptung des Satzes 6, der die Gleichungen (30),(33),(40) betrifft, aus der Behauptung c) im Beweis des Satzes 6, aus [5] (I, Satz (3,2), S. 113), Satz 6 und aus [2] (S. 30 bis 32) bekommen.

Der Beweis des zweiten Teiles des Satzes 7, der die Gleichungen (46),(47) enthält, ist, unter Anwendung von dem Satz 6 und seinem Beweis, von [11] (Satz 5.24, Gleichungen (5,92), wo $\overset{h}{\underset{\alpha}{\Pi}}\, \overset{h}{b}_{\alpha ij}$ statt $\overset{h}{b}_{\alpha ij}$ steht), von Gleichungen (34) bis (36), von der bewiesenen Behauptung im ersten Teil des Satzes 7, von der Voraussetzung $c_{12}^2 - c_{11}c_{22} > 0$ und von $\overset{h}{b}_{\alpha_\varepsilon} \neq 0$ $[\,\overset{h}{b}_{\alpha ii} \neq 0\,]$ ([2], S. 30 bis 32), dem Beweis der Behauptungen 1),2) des Satzes 3 bzw. 5 analog.

Die von Kugeln mit konstantem Halbmesser gebildeten Kanalflächen aus den Sätzen 2 bis 5 bzw. die geradlinigen abwickelbaren Flächen aus den Sätzen 6 bis 7 wollen wir als die charakteristischen Flächen der Kugelkongruenz bzw. der adjungierten Linienkongruenz bezeichnen.

L i t e r a t u r :

[1] W. BLASCHKE: Vorlesungen über Differentialgeometrie III. Berlin 1929.

[2] S.P. FINIKOV: Teorija kongruencij. Moskva-Leningrad 1950.

[3] V. HLAVATÝ: Zur Lie'schen Kugelgeometrie: I. Kanalflächen. Věstník Král.české společnosti nauk, Praha 1941.

[4] V. HLAVATÝ: K Liově kulové geometrii: II. Kongruence (Elementární vlastnosti). Rozpravy II.tř. České akademie, roč.LI, č. 33.

[5] V. HLAVATÝ: Diferenciální přímková geometrie, I,II. Rozpravy II.tř. České akademie,roč. L,č. 27.

[6] V. HLAVATÝ: Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet. JČMF Praha 1937.

[7] V.F. KAGAN: Osnovy teorii pověrchnostěj v tenzornom izloženii, I,II. Moskva-Leningrad 1947, 1948.

[8] V.I. ŠULIKOVSKIJ: Klassičeskaja differencialnaja geometrija v tenzornom izloženii. Moskva 1963.

[9] Z. VANČURA: Les congruences de Lie-sphères (L-sphères). Spisy přírod.fakulty Karlovy university, Praha 1950.

[10] Z. VANČURA: Pláště kongruence koulí. Časopis pro pěstování matematiky 80(1955).

[11] Z. VANČURA: Kulové kongruence a jejich pláště. Adjungované přímkové kongruence a jejich pláště. Rozpravy Československé akademie věd 78, Praha 1968.

Stavební fakulta
České vysoké učení technické
Trojanova 13, Praha 2
Československo

(Oblatum 19.12.1974)