Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Maryvonne Daguenet

Rapport entre l'ensemble des ultrafiltres admettant un ultrafiltre donné pour image et l'ensemble des images de cet ultrafiltre

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 16 (1975), No. 1, 99--113

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105608

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

16,1 (1975)

RAPPORT ENTRE L'ENSEMBLE DES ULTRAFILTRES ADMETTANT UN ULTRAFILTRE DONNÉ POUR IMAGE ET L'ENSEMBLE DES IMAGES DE CET ULTRAFILTRE

Maryvonne DAGUENET, Paris

Abstract: Soit τ l'application canonique entre $\beta(N^2)$ et $\beta N \times \beta N$. Il est étudié ici le rapport entre la cardinalité de $\tau^{-1}(\mathcal{D} \times \mathcal{D})$ [et de $\tau^{-1}(\mathcal{D} \times \mathcal{E})$] et le nombre d'images [de certaines images] non isomorphes de $\mathcal{D}$. Ce travail étend la part du travail de Blass [1] citée en [8] et donne des résultats plus précis que ceux de [8].

Mots clefs: Ultrafiltre, Čech-Stone compactifié.

AMS: 54C20, 54D35, 04A20 Ref. Ž.: 3.961.1

Introduction. N désigne l'ensemble des entiers et βN le compactifié de Stone-Čech de N muni de la topologie discrète.

Un ultrafiltre $\mathcal{D}$ sur N est σ-stable (traduction française de p-point) s'il est libre et si, pour toute suite dénombrable (A_n) de parties de N, vérifiant $A_n \in \mathcal{D}$, il existe $A \in \mathcal{D}$ tel que pour tout n, $A \dot{-} A_n$ est fini [6],[7],[12].

Soit $\mathcal{D}$ un filtre sur N et h une application définie sur N à valeur dans I ; $h(\mathcal{D})$ désigne le filtre sur I engendré par $(h(A))_{A\in\mathcal{D}}$. Le filtre $h(\mathcal{D})$ sera dit image de $\mathcal{D}$ et l'on précisera si on le veut, image selon le morphisme h . Toute image d'un ultrafiltre est un ultrafiltre.

Soient π_1 et π_2 les deux projections de N^2 sur N et soit τ l'application $\beta(N^2) \to \beta N \times \beta N$ définie par $\tau(\mathcal{U}) = (\pi_1(\mathcal{U}), \pi_2(\mathcal{U}))$.

Nous allons montrer que si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont deux ultrafiltres δ-stable sans image libre commune, alors $\tau^{-1}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) = 2$. Ainsi se trouve étendu un résultat de Blass [1]: si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe deux ultrafiltres non absolus, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ tels que $\tau^{-1}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) = 2$.

Un ultrafiltre δ-stable peut être tel que toutes ses images libres sont isomorphes; on dit dans ce cas qu'il est absolu [6] (Ramsey ou minimal dans la terminologie anglaise). Lorsque l'on a supposé vérifiée une hypothèse comme l'hypothèse du continu ou l'axiome de Martin, il existe des ultrafiltres δ-stables non absolus [6] de sortes très diverses. Il existe en particulier "beaucoup" - nous expliciterons ce terme plus loin - d'ultrafiltres δ-stables ayant une infinité d'images libres non isomorphes deux à deux [1, 2, 3, 9, 10, 13]. Nous allons voir ici que si un ultrafiltre $\mathcal{D}$ possède une infinité d'images non isomorphes, alors $\tau^{-1}(\mathcal{D} \times \mathcal{D})$ est infini.

Une application h définie sur N , à valeur dans I est dite finijective si, pour tout $i \in I$, cardinal $(h^{-1}(i))$ est fini. Soit $\mathcal{D}$ un ultrafiltre sur N , une application g définie sur N sera de germe non finijec-

<u>tif en</u> $\mathcal{D}$ si pour tout $A \in \mathcal{D}$, il existe $y \in h(A)$ tel que $\operatorname{card}[h^{-1}(y) \cap A]$ est infini.

Nous montrerons ensuite que, si un ultrafiltre $\mathcal{D}$ possède une suite infinie d'images $(f_i(\mathcal{D}))$ images les unes des autres selon des morphismes h_{ij} de germe non finijectif, alors, quel que soit l'ultrafiltre $\mathcal{E}$ libre, $\tau^{-1}(\mathcal{D} \times \mathcal{E})$ est de cardinalité infinie. L'existence de tels ultrafiltres est assurée sans axiome supplémentaire comme l'hypothèse du continu, et nous montrerons qu'il existe "beaucoup" de tels ultrafiltres.

Nous dirons qu'il existe "beaucoup" d'ultrafiltres ayant une propriété Φ, donnée parmi les ultrafiltres ayant une propriété Ψ, si quel que soit l'ultrafiltre $\mathcal{D}$ vérifiant Ψ, il existe un ultrafiltre $\mathcal{E}$ vérifiant Φ et ayant $\mathcal{D}$ pour image. Par exemple, il existe "beaucoup" d'ultrafiltres σ-stables non absolus parmi les ultrafiltres σ-stables, puisque tout ultrafiltre σ-stable est image selon un morphisme qui n'est pas un isomorphisme d'un ultrafiltre σ-stable [1].

Parfois même, quel que soit l'ultrafiltre vérifiant la propriété Ψ, il existe un ultrafiltre $\mathcal{E}$ tel que tout ultrafiltre ayant $\mathcal{E}$ pour image possède la propriété Φ. C'est le cas de l'exemple précédent.

<u>Notations 0</u>. Soient I et J deux ensembles et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtres sur I et J respectivement. $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ désigne le filtre sur $I \times J$ engendré par

$$\{A \times B \mid A \in \mathcal{F} \text{ et } B \in \mathcal{G}\}.$$

Si pour tout $i \in I$, $\mathcal{G}_i$ désigne un filtre sur l'ensemble I_i , $\mathcal{F} \Sigma \mathcal{G}_i$ désigne le filtre sur $\bigcup_{i \in I} \{i\} \times I_i$ engendré par

$$\left(\bigcup_{i \in F} \{i\} \times G_i\right)_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ G_i \in \mathcal{G}_i}} .$$

Si le filtre $\mathcal{F}$ et tous les filtres $\mathcal{G}_i$ sont des ultrafiltres, alors $\mathcal{F} \Sigma \mathcal{G}_i$ est un ultrafiltre.

$\mathcal{F} . \mathcal{G}$ est une abbréviation de $\mathcal{F} \Sigma \mathcal{G}_i$ dans le cas où tous les filtres $\mathcal{G}_i$ sont égaux.

Soit I un ensemble et $\mathcal{F}$ un filtre sur I . $\mathcal{F}^*$ désigne $\{A \mid A \subset I \text{ et } \forall F \in \mathcal{F},\ A \cap F \neq \emptyset\}$.

$\underline{N}$ désigne l'ensemble des entiers.

<u>Théorème 1</u>. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ deux ultrafiltres sur N . $\tau^{-1}(\mathcal{D},\mathcal{E})$ se réduit à deux points si et seulement si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont deux ultrafiltres σ-stables sans image libre en commun.

<u>Preuve</u>. <u>Etude de $\mathcal{D} . \mathcal{E}$ lorsque $\mathcal{E}$ est σ-stable</u>.

Donnons-nous $X \in \mathcal{D} . \mathcal{E}$. Par définition de $\mathcal{D} . \mathcal{E}$, $D = \{m \mid \{n \mid (m,n) \in X\} \in \mathcal{E}\} \in \mathcal{D}$.

Pour tout $m \in D$, posons $E_m = \{n \mid (m,n) \in X\}$. L'ultrafiltre $\mathcal{E}$ étant σ-stable, il existe $E \in \mathcal{E}$ tel que, pour tout $m \in D$, $E \dot{-} E_m$ est fini. Soit φ une application définie sur N faisant correspondre à $m \in E$, le sup de $E \dot{-} E_m$. Posons

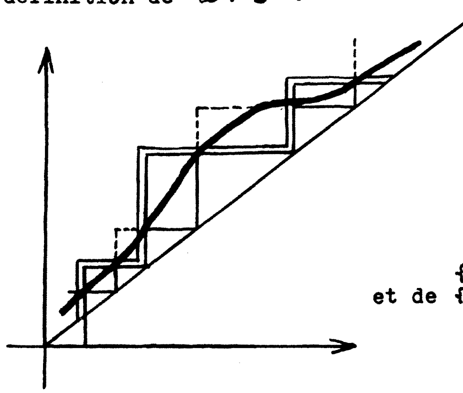
$$A_\varphi = \{(m,n) \mid n > \varphi(m)\} ;$$

nous avons

$$X \cap D \times E \supset A_{\varphi} \cap D \times E \, .$$

Ce résultat se trouve en [1], nous l'avons reproduit ici par souci de complétude. Ainsi, dès que l'ultrafiltre $\mathcal{E}$ est σ-stable, $\mathcal{D} \cdot \mathcal{E}$ est engendré par le filtre $\mathcal{D} \times \mathcal{E}$, $(\{(m,n) \mid n > \varphi(m)\})_{\varphi \in N^N}$. Nous pouvons même nous restreindre au cas où φ décrit l'ensemble des applications strictement croissantes vérifiant $\varphi(n) > n$ pour tout n.

Soit φ une application de N dans N, strictement croissante, vérifiant $\varphi(n) > n$ pour tout n. Posons $f(m)$ = le plus grand entier k <u>impair</u> tel que $\varphi^{(k)}(0) \leq m$ où $\varphi^{(k+1)} = \varphi \circ \varphi^{(k)}$, et $g(m)$ = le plus grand entier k <u>pair</u> tel que $\varphi^{(k)}(0) \leq m$. Les deux applications f et g sont croissantes et non bornées; $f(\mathcal{D})$ et $g(\mathcal{E})$ sont des ultrafiltres libres. Nous voyons que $A_{\varphi} \supset \{(m,n) \mid f(m) \neq f(n)$ et $g(m) \neq g(n)$ et $m < n\}$. Or, $\{(m,n) \mid f(m) \neq f(n)$ et $m < n\} \in \mathcal{D} \cdot \mathcal{E}$ dès que f n'est pas de germe constant simultanément en $\mathcal{D}$ et en $\mathcal{E}$, par définition de $\mathcal{D} \cdot \mathcal{E}$.



représentation du graphe de φ, de $\{(m,n) \mid f(m) \neq f(n)$ et $n > m\}$ et de $\{(m,n) \mid g(m) \neq g(n)$ et $n > m\}$.

Ainsi, dès que l'ultrafiltre $\mathcal{E}$ est σ-stable, $\mathcal{D}.\mathcal{E}$ est engendré par le filtre $\mathcal{D} \times \mathcal{E}$ $\{(m,n) \mid n > m\}$ et $(\{(m,n) \mid f(m) \neq f(n)\})_{f \in N^N}$ pour tout f de germe en $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ non simultanément constant.

<u>Etude de $\mathcal{D}.\mathcal{E}$ lorsque $\mathcal{E}$ est σ-stable et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ n'ont pas d'image libre en commun.</u>

π_1 et π_2 désignent les projections de N^2 sur N.

Si $\{(m,n) \mid f(m) = g(n)\} \in [\mathcal{D} \times \mathcal{E}]^*$, le filtre $\mathcal{F}$ engendré par $\mathcal{D} \times \mathcal{E}$ et $\{(m \mid n) \mid f(m) = g(n)\}$ vérifie $\pi_1(\mathcal{F}) = \mathcal{D}$, $\pi_2(\mathcal{F}) = \mathcal{E}$; de plus, les deux applications $f \circ \pi_1$ et $g \circ \pi_2$ ont même germe en $\mathcal{F}$. Ainsi, $f(\mathcal{D}) =$ $= g(\mathcal{E})$.

Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ n'ont aucune image libre en commun, alors, pour tout couple (f,g) tel que (f,g) n'ait pas un germe constant en $\mathcal{D} \times \mathcal{E}$,

$$\{(m,n) \mid f(m) = g(n)\} \notin [\mathcal{D} \times \mathcal{E}]^* ,$$

ce qui entraîne $\{(m,n) \mid f(m) \neq g(n)\} \in \mathcal{D} \times \mathcal{E}$.

Ainsi, si $\mathcal{E}$ est σ-stable et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ n'ont pas d'image libre en commun, le filtre $\mathcal{D}.\mathcal{E}$ est engendré par le filtre $\mathcal{D} \times \mathcal{E}$ et $\{(m,n) \mid n > m\}$.

D'où le Théorème dans sa partie directe.

La réciproque est en [1].

<u>Corollaire 2</u>. Si un ultrafiltre $\mathcal{U}$ a pour images deux ultrafiltres σ-stables $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sans images libres en commun, $\mathcal{U}$ a pour image soit $\mathcal{D}.\mathcal{E}$ soit $\mathcal{E}.\mathcal{D}$.

__Preuve__. Soient f et g deux applications de N dans N telles que $\mathcal{D} = f(\mathcal{U})$ et $\mathcal{E} = g(\mathcal{U})$. L'ultrafiltre sur N^2 $(f,g)(\mathcal{U})$ ne peut être, d'après le théorème 1, que $\mathcal{D}.\mathcal{E}$ ou le symétrique de $\mathcal{E}.\mathcal{D}$ par rapport à la diagonale.

__Corollaire 3.__ Tout couple d'images libres d'un ultrafiltre σ-stable $\mathcal{D}$ possède une image libre en commun ([2], p.15). On a même, $\forall f \forall g \exists f' \exists g'$ tels que $f' \circ f$ et $g' \circ g$ ont __même germe__ en $\mathcal{D}$ et $f' \circ f(\mathcal{D})$ est libre dès que $f(\mathcal{D})$ et $g(\mathcal{D})$ sont libres.

__Preuve__. L' énoncé ci-dessus est conséquence directe du corollaire 2 car un ultrafiltre σ-stable ne peut avoir pour image $\mathcal{D}.\mathcal{E}$ ou $\mathcal{E}.\mathcal{D}$.

Ainsi deux ultrafiltres absolus non isomorphes ne peuvent être images d'un ultrafiltre σ-stable, ([1], p. 145 et 149) car ils n'ont aucune image libre en commun. C'est aussi le cas de deux ultrafiltres σ-stables non absolus ayant pour image des ultrafiltres absolus non isomorphes (voir [3] pour l'existence de tels ultrafiltres à l'aide de l'axiome de Martin); c'est aussi le cas d'un couple d'ultrafiltres où l'un possède un ultrafiltre absolu pour image et l'autre non [9],[10],[13].

__Corollaire 4__. Il existe, moyennant l'axiome de Martin, des couples d'ultrafiltres $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ non absolus tels que $\tau^{-1}(\mathcal{D},\mathcal{E}) = 2$ ([1], p. 146).

__Corollaire 5__. Si l'ultrafiltre $\mathcal{D}$ est σ-stable,

$\mathcal{D} \cdot \mathcal{D}$ est un point isolé du fermé $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ de βN^2 si et seulement si $\mathcal{D}$ a pour image un ultrafiltre absolu.

<u>Preuve</u>. Employer d'abord le corollaire 3 pour montrer qu'un ultrafiltre σ-stable a pour image un ultrafiltre absolu selon l'implication h si et seulement si pour toute application f telle que $f(\mathcal{D})$ est libre, il existe $D \in \mathcal{D}$ et une application g telle que les applications h et $g \circ f$ coïncident sur D. Puis employer le lemme technique qui sert à démontrer le théorème 1, à savoir:

<u>Lemme</u>. Si l'ultrafiltre $\mathcal{D}$ est σ-stable, $\mathcal{D} \cdot \mathcal{D}$ est engendré par le filtre $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ $\{(m,n) \mid m < n\}$ et $(\{(m,n) \mid f(m) \neq f(n)\})_f$ pour $f \in V^N$ de germe non constant on $\mathcal{D}$.

<u>Réciproque</u>. Si $\mathcal{D} \cdot \mathcal{D}$ est ainsi engendré, c'est que $\mathcal{D}$ est σ-stable. (Cette réciproque a été démontrée par Haddad Labib et sera publiée ultérieurement.)

Soit h une application définie sur N . eq h désignera $\{(m,n) \mid m \in N , n \in N$ et $h(m) = h(n)\}$. Soit $A \subset N$, la restriction de h à A sera notée $h \restriction A$.

Soient f et g deux applications définies sur N . Notons que si pour un $D \in \mathcal{D}$, $\mathrm{eq}\, f \cap (D \times D) = \mathrm{eq}\, g \cap (D \times D)$, alors il existe un isomorphisme θ entre $f(N)$ et $g(N)$ tel que pour un $E \in \mathcal{D}$, $f \restriction E = \theta \circ g \restriction E$, et ceci entraîne "$f(\mathcal{D})$ est isomorphe à $g(\mathcal{D})$" . Ainsi, de l'hypothèse $f(\mathcal{D})$ n'est pas isomorphe à $g(\mathcal{D})$, nous déduisons

$$(\mathrm{eq}\, f \dot{-} \mathrm{eq}\, g) \cup (\mathrm{eq}\, g \dot{-} \mathrm{eq}\, f) \in [\mathcal{D} \times \mathcal{D}]^* .$$

Proposition 6. Soit $\mathcal{D}$ un ultrafiltre sur N . Donnons nous une suite finie d'applications définie sur N : $:(g_i)_{i<k}$ telle que, pour tout i ,

$$(\mathrm{eq}\ f \dot{-} \mathrm{eq}\ g_i) \in [\mathcal{D} \times \mathcal{D}]^* .$$

Dans ce cas,

$$(\mathrm{eq}\ f \dot{-} \bigcup_{i<k} \mathrm{eq}\ g_i) \in [\mathcal{D} \times \mathcal{D}]^* .$$

Preuve. Supposons que pour un $A \in \mathcal{D}$ nous ayons $(\mathrm{eq}\ f \dot{-} \bigcup_{i<k} \mathrm{eq}\ g_i) \cap (A \times A) = \emptyset$. Choisissons $a_n \in A \cap f^{-1}(n)$ pour chaque n tel que cette intersection est non vide. Posons

$$S_i = \{ b \in A \mid g_i(b) = g_i(a_{f(b)}) \} .$$

Alors $\bigcup_{i<k} S_i \supset A$ et par suite, k étant fini, pour un $i < k$, $B = A \cap S_i \in \mathcal{D}$. Mais alors, pour cet i ,

$$(\mathrm{eq}\ f \dot{-} \mathrm{eq}\ g_i) \cap (B \times B) = \emptyset . \quad \text{Contradiction.}$$

Théorème 7. Soit $\mathcal{D}$ un ultrafiltre sur N , ayant une infinité d'images non isomorphes deux à deux. Alors $\tau^{-1}(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ est infini.

Preuve. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications définies sur N telle que $f_i(\mathcal{D})$ et $f_j(\mathcal{D})$ ne soient pas isomorphes, dès que $i \neq j$.

Si i est tel que pour tout j, $(\mathrm{eq}\, f_i \dot{-} \mathrm{eq}\, f_j) \notin [\mathcal{D} \times \mathcal{D}]^*$ (il existe au plus un tel i). Soit $\mathcal{F}_i$ le filtre engendré par

$$\mathcal{D} \times \mathcal{D} \quad \text{et} \quad \mathrm{eq}\, f_i \ .$$

Si i est tel qu'il existe des j tels que $(\mathrm{eq}\, f_i \dot{-} \mathrm{eq}\, f_j) \in [\mathcal{D} \times \mathcal{D}]^*$ soit $\mathcal{F}_i$ le filtre sur N^2 engendré par

$$\mathcal{D} \times \mathcal{D} \quad \text{et les} \quad ((\mathrm{eq}\, f_i \dot{-} \mathrm{eq}\, f_j))_j$$

pour tout j tel que $(\mathrm{eq}\, f_i \dot{-} \mathrm{eq}\, f_j) \in [\mathcal{D} \times \mathcal{D}]^*$. (Le fait que l'ensemble ci-desus engendre un filtre est dû à la proposition 6.)

Si $i \neq j$, alors, pout rout $A \in \mathcal{D}$, $\mathrm{eq}\, f_i \cap A \times A \neq \mathrm{eq}\, f_j \cap A \times A$ puisque les images $f_i(\mathcal{D})$ et $f_j(\mathcal{D})$ ne sont pas isomorphes, et ainsi, soit $(\mathrm{eq}\, f_i \dot{-} \mathrm{eq}\, f_j) \cap A \times A \neq \emptyset$, soit $(\mathrm{eq}\, f_j \dot{-} \mathrm{eq}\, f_i) \cap A \times A \neq \emptyset$, ce choix ne dépendant pas du $A \in \mathcal{D}$. Dans les deux cas, les fermés associés aux filtres $\mathcal{F}_i$ et $\mathcal{F}_j$ dans $\beta(N^2)$ sont disjoints et $\tau^{-1}(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ est infini.

Si un ultrafiltre $\mathcal{D}$ ne possède qu'un nombre fini d'images non isomorphes, alors il en est de même pour toute image de $\mathcal{D}$. Etant donné un ultrafiltre σ-stable $\mathcal{D}$, il existe en employant l'axiome de Martin, un ultrafiltre σ-stable $\mathcal{D}'$ ayant une infinité d'images non isomorphes deux à deux admettant $\mathcal{D}$ pour image [3]. Ainsi il existe parmi les ultrafiltres σ-stables "beaucoup" d'ultrafiltres $\mathcal{D}$ σ-stables tels que $\tau^{-1}(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ est infini, si l'axiome de Martin est vérifié.

Nous avons, en employant l'hypothèse du continu, construit pout tout entier k des ultrafiltres (σ-stables) ayant exactement k images libres non isomorphes deux à deux et tels que $\tau^{-1}(\mathcal{D} \times \mathcal{D})$ est de cardinalité $2k + 1$. Par contre, nous ne savons pas si " $\mathcal{D}$ n'a qu'un nombre fini d'images non isomorphes "entraine" $\tau^{-1}(\mathcal{D} \times \mathcal{D})$ est fini " .

Remarque 8. Donnons nous deus ultrafiltres $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ ayant une image libre en commun $f(\mathcal{D}) = g(\mathcal{E})$. Dans ce cas,

$$\{(m,n) \mid f(m) = g(n)\} \in [\mathcal{D} \times \mathcal{E}]^* ,$$

car sinon, pour $A \in \mathcal{D}$, $B \in \mathcal{E}$, $f(A) \cap g(B)$ serait vide.

En développant un raisonnement semblable à celui présenté plus haut, on montre que si deux ultrafiltres $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ ont une chaîne infinie d'images non isomorphes en commun, alors $\tau^{-1}(\mathcal{D},\mathcal{E})$ est infini.

Proposition 9. Soit $\mathcal{D}$ un ultrafiltre sur N et h une application de germe non finijectif en $\mathcal{D}$. Dans ce cas, $\{m \mid h(m) < m\} \in \mathcal{D}$.

Preuve. Supposons que $\{m \mid h(m) \geq m\} = D \in \mathcal{D}$. Donnons nous $u \in N$ tel que $h^{-1}(h(u)) \cap D$ soit infini. Pour tout u' appartenant à $h^{-1}(h(u)) \cap D$, à part un nombre fini d'entre eux, $h(u) = h(u') < u'$. Ceci contredit l'hypothèse de départ.

Proposition 10. Soit $\mathcal{D}$ un ultrafiltre sur N, f une application définie sur N à valeur dans $f(N)$ et h une application définie sur $f(N)$, de germe non finijectif et non constant en $f(\mathcal{D})$. Soit $\mathcal{E}$ un ultrafiltre sur N, non principal. Dans ce cas,

$$\{(m,n) \mid h \circ f(m) < n < f(m)\} \in [\mathcal{D} \times \mathcal{E}]^* .$$

Preuve. Soit $A = \{m \mid h \circ f(m) < f(m)\}$; $A \in \mathcal{D}$ d'après la proposition 9 car $A = f^{-1}(\{f(m) \mid h . f(m) < f(m)\})$. L'application $h \circ f(B)$ n'est finijective pour aucun $B \in$ $\in \mathcal{D}$. Ceci fait que

$$\bigcup_{m \in A \cap B} < h \circ f(m), \dots, f(m) > \supset \{n \mid n > n_0\} ,$$

et ainsi, quel que soit $C \in \mathcal{E}$,

$$\{(m,n) \mid h \circ f(m) < n < f(m) \quad \text{et} \quad m \in A \cap B \quad \text{et} \quad n \in C\} \neq \emptyset .$$

Théorème 11. Soit $\mathcal{D}$ un ultrafiltre sur N possédant une suite totalement ordonnée d'images $(f_i(\mathcal{D}))$ telles que $f_i = h_{ij} \circ f_j$ ou $f_j = h_{ji} \circ f_i$ avec h_{ij} (ou h_{ji} respectivement) de germe non finijectif en $f_j(\mathcal{D})$ [en $f_i(\mathcal{D})$ resp.] . Dans ce cas, quel que soit $\mathcal{E}$, $\tau^{-1}(\mathcal{D} \times \mathcal{E})$ est infini.

Preuve. Si i est tel que pour aucun j, $f_j = h_{ji} \circ$ $\circ f_i$ (il existe au plus un tel i), soit $\mathcal{F}_i$ le filtre engendré par

$$\mathcal{D} \times \mathcal{E} \quad \text{et} \quad \{(m,n) \mid n < f_i(m)\} .$$

Si i est tel qu'il existe au moins un j tel que $f_j = h_{ji} \circ f_i$, soit $\mathcal{F}_i$ le filtre sur N^2 engendré par

$$\mathcal{D} \times \mathcal{E} \quad \text{et les} \quad (\{(m,n) \mid f_j(m) < n < f_i(m)\})_j$$

pour tout j tel qu'il existe h_{ji} de germe non finijectif en $f_i(\mathcal{D})$ vérifiant $f_j = h_{ji} \circ f_i$. Nous utilisons ici la proposition 10 et le fait que les ensembles $(\{(m,n) \mid f_j(m) < n < f_i(m)\})_j$ pour i donné et j variant dans l'ensemble fixé ci-dessus sont emboîtés les uns dans les autres.

Si $i \neq j$, alors, ou bien $f_j = h_{ji} \circ f_i$ avec h_{ji} de germe non finijectif en $f_i(\mathcal{D})$ et $\{(m,n) \mid f_j(m) < n < f_i(m)\} \in \mathcal{F}_i$, alors que $\{(m,n) \mid n < f_j(m)\} \in \mathcal{F}_j$, ou bien idem en échangeant i et j . Dans les deux cas, les fermés associés aux filtres $\mathcal{F}_i$ et $\mathcal{F}_j$ dans $\beta(N^2)$ sont disjoints.

Si un ultrafiltre $\mathcal{D}$ ne possède que des chaînes finies d'images, images les unes des autres selon des morphismes non finijectifs, alors il en sera de même pour toute image de $\mathcal{D}$. Etant donné un ultrafiltre $\mathcal{D}$, il existe un ultrafiltre $\mathcal{D}'$ ayant une chaine infinite d'images, images les unes des autres selon des morphismes non finijectifs, admettant $\mathcal{D}$ pour image. Il n'y a qu' à prendre pour $\mathcal{D}'$ l'ultrafiltre $\mathcal{D} \Sigma \mathcal{D}_m$ où $\mathcal{D}_m$ est l'ultrafiltre produit (selon) de $\mathcal{D}$, n fois. Ainsi, il existe "beaucoup" d'ultrafiltres $\mathcal{D}$ tels que pour tout $\mathcal{E}$, $\tau^{-1}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ est infini.

En résumé, l'existence d'un ultrafiltre $\mathcal{E}$ libre tel que $\tau^{-1}(\mathcal{D},\mathcal{E})$ est fini implique " $\mathcal{D}$ est quasiment un ultrafiltre σ-stable", en ce sens que $N^N/\mathcal{D}$ ne compte qu'un nombre fini de <u>cieux</u>. Tandis que $\tau^{-1}(\mathcal{D},\mathcal{D})$ est fini implique " $\mathcal{D}$ est quasiment un ultrafiltre absolu", en ce sens que $N^N/\mathcal{D}$ ne compte qu'un nombre fini de <u>constellations.</u> (Voir dans Puritz [11] les caractérisations: " $\mathcal{D}$ est σ-stable $\Longleftrightarrow$ $N^N/\mathcal{D}$ ne compte qu'un seul ciel" et " $\mathcal{D}$ est absolu $\Longleftrightarrow$ $N^N/\mathcal{D}$ ne compte qu'une seule constellation".)

B i b l i o g r a p h i e :

[1] A. BLASS: Ordering of Ultrafilters, Thesis, Harvard University,Cambridge,Mass.1970.

[2] A. BLASS: The intersection of non standard models of arithmetic, J.Symb.Logic 37(1971),103-107.

[3] A. BLASS: The Rudin Keisler ordering of p-points, Trans.Amer.Math.Soc.179(1973),145-167.

[4] D. BOOTH: Ultrafiltres on a countable set, Annals of Math.Logic 2(1970),1-24.

[5] G. CHOQUET: Construction d'ultrafiltres sur N, Bull. Sci.Math.2^{e} série 92(1968),41-48.

[6] G. CHOQUET: Deux classes remarquables d'ultrafiltres, Bull.Sci.2^{e} série Math.92(1968),143-153.

[7] L. GILLMAN and M. JERISON: Rings of Continuous Functions, Van Nostrand,Princeton,1960.

[8] N. HINDMAN: Preimages of points under the natural map from $\beta(N\times N)$ to $\beta N\times\beta N$, Proc.Amer.Math. Soc.37(1973),603-608.

[9] A.R.D. MATHIAS: A solution of a problem of Choquet and Puritz, Conférence in Mathematical Logic, London ´70/Springer Verlag, Notes Series 255 (1972).

[10] R.A. PITT: The classification of Ultrafiltres on N , Thesis (1971), Leicester.

[12] W. RUDIN: Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications, Duke Math.J.23(1956),409-419, 633.

[13] R.C. SOLOMON: Ultrafilters and Ultraproducts, Thesis.

[11] C. PURITZ: Skies and Monads in Non-Standard Analysis, Thesis, Glasgow (1969).

79 Rue du Fg St Jacques

75014 Paris

France

(Oblatum 19.8.1974)