Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Viktor Alad'ev

Об эквивалентности τ_m-грамматик и $Sb(n)$-грамматик

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 15 (1974), No. 4, 717--726

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105593`

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1974

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

15,4 (1974)

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ τ_m-ГРАММАТИК И $Sb(n)$-ГРАММАТИК

Виктор АЛАДЬЕВ, Таллин

Резюме: В настоящей заметке доказывается строгая эквивалентность τ_m-грамматик и $Sb(n)$-грамматик.

Ключевые слова: Однородная структура; τ_m-грамматика; язык, генерируемый τ_m-грамматикой; $Sb(n)$-грамматика; язык, генерируемый $Sb(n)$-грамматикой; строгая эквивалентность; фигурная унарная алгебра.

AMS : 94A20, 68A30, 92A05 Ref. Ž.: 8.764.11

Основным объектом применения теории формальных грамматик являются не произвольные грамматики, а грамматики некоторых специальных типов, наиболее важных как в теоретическом, так и в практическом аспекте. Выделение этих типов производится по виду правил вывода. В последние годы большое внимание уделяется интенсивному изучению параллельных грамматик (см. библиографию в работах [1 - 4]). Такие грамматики обладают тем свойством, что на каждом шаге в выводе перерабатывается каждый символ слова, с которым оперирует грамматика, и представляют большой интерес для вычислительной техники, теории алгоритмов и программирования, а также биоматематики. Настоящая заметка является непосредственным продолжением работ [3 - 5] и выясняет степень общности понятия τ_m-грамматик, введенных автов работе [3]. Грамматики такого типа описывают на формальном уровне функционирование однородных структур, на которых реализуются вычислительные и логические устройства, а самы структуры весьма удобны в качестве технической базы для организации параллельной обработки информации [1].

В недавней своей работе [5] Е. Щербаков с целью более адекватного описания биологических процессов развития ввел в рассмотрение специальный класс алгебраических систем - фигурные унарные алгебры. Более того, он предположил, что понятие фигурной унарной алгебры является более общим, чем понятие однородной структуры. В настоящей заметке мы покажем, что даже более общие грамматики, чем грамматики, определяемые на основе фигурных унарных алгебр, эквивалентны τ_m - грамматикам. Все определения, понятия и обозначения, кроме вновь вводимых, полностью соответствуют работе [4].

Две грамматики будем называть строго эквивалентными, если они не только порождают один и тот же язык, но и порождают его идентичным образом.

Определелние τ_m -грамматик можно найти в любой из работ [1 - 4].

$S\mathcal{L}(m)$ -грамматики (используя обозначения работы [5]) введем следующим образом. Имеется связанное множество GS идентичных конечных автоматов Мура, помещенных в точки пространства Z^1 [4]. Связь автоматов, не нарушая общности, определяется индексом соседства единичного A_i -автомата из множества $\vartheta = \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Индекс соседства одинаков для всех автоматов и определяет шаблон соседства (набор соседних A_i -автомату автоматов) ШС =

$= \{ i+0, i+1, \ldots, i+m-1 \}$, т.е. соседними A_i -автомату служат A_j -автоматы ($j = i+k$; $k = \overline{0, m-1}$). Каждый A_i -автомат может находиться в любой дискретный момент времени $T \geq 0$ только в одном состоянии из множества $S^p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Отображение $\theta : Z^1 \longrightarrow S^p$ будем называть словом. Слово, имеющее только конечное множество символов из $S^p \setminus \{0\}$ будем называть конечным и множество всех таких слов обозначать через $\overline{C}_p$. Мы будем рассматривать только слова из множества $\overline{C}_p$. Слово в момент $T = 0$ будем обозначать через c_0. Для порождения новых слов из слова c_0 вводятся соотношения вида

$$(1) \quad \left.\begin{array}{l} X_1 X_2 X_3 \ldots\ldots X_m \longrightarrow Y_1 Y_2 Y_3 \ldots\ldots Y_t \\ \underbrace{0 \; 0 \; 0 \ldots\ldots 0}_{m} \longrightarrow \underbrace{0 \; 0 \; 0 \ldots\ldots 0}_{t} \\ X_i, Y_j \in S^p \; (i = \overline{1, m}; \; j = \overline{1, t}; \; 1 \leq t \leq m), \end{array}\right\} Sl$$

где X_i есть состояния автоматов из множества GS, расположенных согласно шаблону соседства. В дальнейшем под автоматом A мы будем понимать не только его местоположение в GS, но и его состояние. Одновременное применение соотношений (1) определяет функцию Sl, т.е. для данного множества S^p, индекса соседства ϑ и слов $c_1, c_2 \in \overline{C}_p$ функция Sl должна определять преобразование слов $Sl : c_1 \longrightarrow c_2$. Но так как соотношения (1) применяются одновременно и правые их части длиной ≥ 1, то возможна ситуация, когда в какой-то момент времени $T > 0$ автомат A из множества GS должен будет иметь несколько внутренних состояний, что недопустимо. Поэтому соотношения (1) мы должны дополнить однозначными функциями выбора состояния

(2) $$\varphi(Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_q)$$

$$(Z_i \in S^n;\ i = \overline{1,q};\ 1 \leq q \leq n)$$

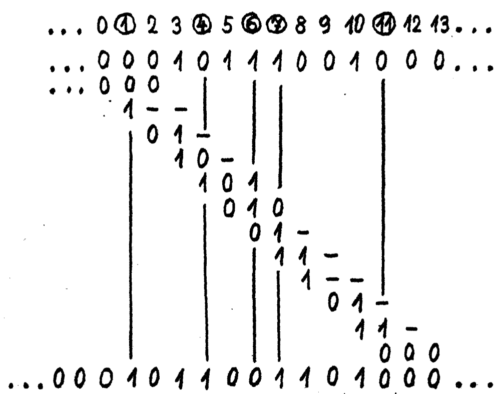
со значениями во множестве S^n . Например, при $n = 2$, $m = 3$ одновременное применение соотношений

$000 \to 000$	$011 \to 101$
$001 \to 1$	$101 \to 10$
$010 \to 01$	$110 \to 01$
$100 \to 11$	$111 \to 010$

к слову $c_0 \in \overline{C}_2$ следующего вида

$$\ldots 0000101110010000 \ldots$$

приводит к следующему результату



т.е. в автоматах с номерами $1, 4, 6, 7, 11$ из множества GS наблюдается неоднозначность при определении внутренних состояний, которая исчезает при определении функции выбора состояния

$$\varphi(0,1) = 1 \qquad \varphi(1,1,0) = 0$$

$$\varphi(1,0) = 0 \qquad \varphi(0,1,1) = 1 .$$

При сделанных предположениях из начального слова $c_0 \in \overline{C}_2$ с помощью функции Sb_φ, определенной соотношениями (1)-(2), генерируется последовательность слов

$$\langle c_0 \rangle = c_0, c_1, c_2, \dots, c_i, \dots \qquad (c_i = c_0 (Sb_\varphi)^i;\ i = 1, 2, \dots).$$

Для случая наших грамматик под строгой эквивалентностью будет пониматься генерация грамматиками идентичных последовательностей слов из одной и той же аксиомы c_0. На этом же примере становится довольно прозрачным сам принцип одновременного применения к любому перерабатываемому слову соотношений (1).

Тогда $Sb(m)$ <u>-грамматикой</u> будем называть упорядоченную четверку $Sb(m) = (S^n, c_0, Sb, \varphi)$, где:

S^n - терминальный словарь;

$c_0 \in \overline{C}_n$ - начальное слово или аксиома;

Sb - параллельные преобразования;

φ - функция выбора состояния.

функции Sb и φ определяют правила вывода Sb_φ в $Sb(m)$ -грамматике. Множество слов $\langle c_0 \rangle$, генерируемое такой грамматикой, будем называть $Sb(m)$ <u>-языком</u>. От общеизвестных формальных грамматик $Sb(m)$ -грамматики, также как и τ_m -грамматики, отличаются отсутствием нетерминального словаря и одновременным применением соотношений (1). Если для нашего определения $Sb(m)$ -грамматик положить в соотношениях (1) $m = t = 3$, а для функции φ положить

$$\varphi(0, 0) = 0 \qquad \varphi(X, 0) = X$$

$$\varphi(0,X) = X \qquad \varphi(X,Y) = * \notin S^p$$
$$Y, X \in S^p \setminus \{0\},$$

то мы приходим к случаю, рассмотренному в работе [5]. Очевидно, что любая τ_m -грамматика строго эквивалентна $Sb(n)$ -грамматике, у которой соотношения Sb имеют следующий вид

$$X_1 X_2 X_3 \ldots X_m \longrightarrow X_1' \underbrace{0 \ldots\ldots 0}_{m-1}$$
$$X_1', X_i \in S^p \qquad (i = \overline{1,m}),$$

а функция выбора состояния имеет вид

$$\varphi(Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_m) = \sum_{i=1}^{m} Z_i \pmod p$$
$$Z_i \in S^p \quad (i = \overline{1,m}).$$

Покажем теперь, что и в $Sb(n)$ -грамматике существует строго эквивалентная ей τ_m -грамматика. Точнее, имеет место следующая

<u>Теорема</u>. Для каждой $Sb(n)$ -грамматики существует строго эквивалентная ей τ_m -грамматика $(m = 2n - 1)$. Если в соотношениях (1) величины n, $t \geq 1$ и произвольны, то величина $m = \max_i \{n_i\} + \max_i \{t_i\} - 1$.

<u>Доказательство</u>. Пусть имеется произвольная $Sb(n)$-грамматика, порождающая из некоторй аксиомы $c_0 \in \overline{C}_p$ $Sb(n)$ -язык $G = \langle c_0 \rangle = c_0 \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow \ldots\ldots \rightarrow c_i \rightarrow \ldots$ $(c_j \in \overline{C}_p\,;\ j = 0, 1, \ldots, i, \ldots)$. Из определения $Sb(m)$ -грамматик следует, что они подобно τ_m-грамматикам, являются

алгоритмами, а не исчислениями. Следовательно, из любого предшественника $c_i \in \overline{C}_p$ мы всегда получаем только одного последователя $c_{i+1} \in \overline{C}_p$ с помощью правил вывода Sb_φ $Sb(m)$-грамматики. Докажем теперь, что существует τ_{2m-1}-грамматика с аксиомой $c_0 \in \overline{C}_p$, генерирующая ту же последовательность слов $\langle c_0 \rangle$, что и $Sb(m)$-грамматика. Вообще говоря, такое ограничение как рассмотрение только конечных слов в доказательстве теоремы никак не используется и может быть снято, если рассматривать моделирование $Sb(m)$-систем однородными структурами. Более того, снятие с соотношений (1) ограничения $\underbrace{000\ldots0}_{m} \longrightarrow$

$\longrightarrow \underbrace{000\ldots0}_{t}$ также не изменяет справедливости доказательства нашей теоремы. Таким образом, $Sb(m)$-грамматика любое слово $c_d \in \overline{C}_p$ переводит в слово $c_{d+1} \in \overline{C}_p$. Рассмотрим произвольный отрезок ФА длиной $2m-1$ слова c_d

$$c_d = \ldots\ldots x^d_{i+1}\ \ x^d_{i+2}\ldots\ldots \boxed{x^d_{i+m}}\ \ x^d_{i+(m+1)}\ldots\ldots x^d_{i+2m-1}\ldots\ldots$$

$$Sb\left\{\begin{array}{llllll}
\ldots\ldots y^1_{i+1} & y^1_{i+2}\ldots\ldots & y^1_{i+m} & & & \\
& y^2_{i+2}\ldots\ldots & y^2_{i+m} & y^2_{i+(m+1)} & & \\
& - \quad - & - \quad - & - \quad - \quad - & - \quad - \quad - & \\
& - \quad - & - \quad - & - \quad - \quad - & - \quad - \quad - & \\
& - \quad - & - \quad - & - \quad - \quad - & - \quad - \quad - & \\
& & y^m_{i+m} & \ldots\ldots\ldots\ldots & y^m_{i+2m-1} & \ldots\ldots
\end{array}\right.$$

$$c_{d+1} = \ldots\ldots\ldots\ \ \varphi(y^1_{i+m}, y^2_{i+m}, \ldots, y^m_{i+m})\ldots\ldots$$

В результате одновременного применения соотношений (1) к слову c_d происходит наложение внутренних состояний автоматов из множества GS ψ^{l}_{i+k} $(l = \overline{1, n}$; $k = \overline{i, i+m-1})$. Выбираем в отрезке ФА слова c_d автомат X^{d}_{i+m} в качестве центрального. Под действием одновременных соотношений (1) и функции выбора состояния φ состояние центрального автомата X^{d}_{i+m} в момент $T = d+1$ (в слове c_{d+1}) будет определяться значением $\varphi(\psi^{1}_{i+m}, \psi^{2}_{i+m}, \ldots, \psi^{n}_{i+m}) \in S^{n}$ при $\psi^{k}_{i+m} \in S^{k} (k = \overline{1,n})$. Более того, это значение уже не зависит от того, какие применяются соотношения Sb к слову c_d справа от автомата X^{d}_{i+m} и слева от автомата X^{d}_{i+1}. Из вышесказанного возникает следующий способ построения τ_m -грамматики, генерирующей тот же язык $G = \langle c_0 \rangle = c_0 \longrightarrow c_1 \longrightarrow c_2 \longrightarrow \ldots$ $\ldots \longrightarrow c_\theta \longrightarrow \ldots$ $(\theta = \theta + 1)$. Прежде всего необходимо положить $m = 2n - 1$, ибо это есть минимальный размер шаблона соседства τ_m -грамматики, позволяющий полностью получить информацию для определения состояния любого автомата X^{d+1}_{i+n} в слове c_{d+1} при его выводе. Правила же вывода $L^{\vartheta}_{(2n-1)}$ [4] в такой τ_{2n-1} -грамматике определяем следующим образом. К произвольным наборам

$$X^{d}_{i+1}\, X^{d}_{i+2} \ldots\ldots X^{d}_{i+2n-1}, \quad (X^{d}_{i+j} \in S^{n};\ j = \overline{1, 2n-1})$$

применяем одновременно соотношения (1) как это мы уже делали для случая слова c_d. Очевидно, что можно применить не более m различных соотношений из (1). В результате такой операции мы получаем не более p различных символов $\psi^{k}_{i+m} \in S^{p}$ $(k = \overline{1, \omega \leq m})$ для определения значения автомата X^{d+1}_{i+m} в слове c_{d+1}, т.е. полагаем значение функции $L^{\vartheta}_{(2m-1)}$ равным

$$L^{\vartheta}_{(2m-1)}(X^{d}_{i+m}, X^{d}_{i+m+1}, \ldots, X^{d}_{i+2m-1}) = \varphi(\psi^{1}_{i+m}, \psi^{2}_{i+m}, \ldots, \psi^{k}_{i+m}) .$$

Таким образом, мы полностью задаем τ_{2m-1} -грамматику. Используя вышеизложенное уже нетрудно показать, что такая τ_{2m-1} -грамматика генерирует в точности язык

$$G = \langle c_0 \rangle = c_0 \longrightarrow c_1 \longrightarrow c_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow c_i \longrightarrow \ldots .$$

Этим первая часть теоремы доказана. Пусть теперь при определении $Sb(m)$ -грамматик в соотношениях (1) величины $m, t \geq 1$ и являются произвольными. В этом случае идея доказательства полностью сохраняется с очевидными изменениями: если в первом случае центральный автомат отрезка ФА имел в эквивалентной τ_m -грамматике индекс соседства $\vartheta = \{-(m-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, (m-1)\}$, то в этом случае индекс соседства его имеет вид

$$\vartheta = \{-(t-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, (m-1)\} ,$$

где $t = \max\limits_{i}(t_i)$ и $m = \max\limits_{i}(m_i)$. Остальные рассуждения в сущности не изменяются. Этим теорема полностью доказана.

Из нашей теоремы следует, что понятие τ_m -грамматик (однородных структур) является довольно общим и фигурные унарные алгебры не приводят к обобщению этого понятия.

А так как τ_m -грамматики, на наш взгляд, более удобны с точки зрения изучения, использования и интерпретации, то имеет смысл уделить внимание изучению именно этого типа грамматик.

Литература

[1] V. ALADYEV: Survey of research in the theory of homogeneous structures and their applications, Mathemat.Biosci.,Amer.Elsevier Publ.Co.,Inc.1974.

[2] A. SALOMAA: Formal languages, Academic Press,1973.

[3] В. АЛАДЬЕВ: τ_m -грамматики и порождаемые ими языки, Изв.АН ЭССР,Биология,23(1974),67-87.

[4] В. АЛАДЬЕВ: Операции над языками, генерируемыми τ_m -грамматиками, Comment.Math.Univ.Carolinae 15(1974),211-220.

[5] Е. ЩЕРБАКОВ: О фигурных операциях параллельной подстановки и порождаемых ими унарных алгебрах, Вычислительная техника и вопросы кибернетики, Изд-во Ленинградского университета,вып.10 (1974),90-99.

Эстонский филиал ВГПТИ ЦСУ СССР

Таллин 200001

Маакри 15

СССР

(Oblatum 23.8.1974)