Osvald Demuth

О связи представимости конструктивной функции в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций и дифференцируемости этой функции

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 15 (1974), No. 2, 195--210

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105546`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

15,2 (1974)

О СВЯЗИ ПРЕДСТАВИМОСТИ КОНСТРУКТИВНОЙ ФУНКЦИИ В ВИДЕ СУПЕРПОЗИЦИИ ДВУХ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ЭТОЙ ФУНКЦИИ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Прага

Содержание: В классической математике функция f равномерно непрерывная на сегменте $0 \Delta 1$ представима на этом сегменте в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций тогда и только тогда, когда f отображает множество тех точек сегмента $0 \Delta 1$, в которых f не имеет конечную производную, в множество нулевой меры ([1], стр. 203). В настоящей заметке исследуется конструктивный аналог этого утверждения.

Ключевые слова: Конструктивная функция, абсолютно непрерывная функция, функция ограниченной вариации, суперпозиция функций.

AMS: Primary 02E99 Ref. Ž. 2.644.2
Secondary 26A72

В следующем мы пользуемся определениями, обозначениями и результатами из [9] и [10].

Напомним, что а) конструктивную функцию действительной переменной - f мы называем функцией, если f везде определена и выполнено $\forall x((x \leq 0 \supset f(x) = f(0))\ \&$ $\&\ (1 \leq x \supset f(x) = f(1)))$;

б) всякая функция ограниченной вариации (на $0 \Delta 1$) является равномерно непрерывной (теорема 6.10 из [2]);

в) мы говорим, что функция f обладает свойством α, и обозначаем $\alpha(f)$, если для всякого РЧ a функция $f - h_a$ является функцией ограниченной вариации (на $0\Delta 1$), где $\forall a x\,(h_a(x) = a \cdot max\,(min\,(x,1),0))$.

<u>Определение</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция.

1) Мы скажем, что $\mathcal{F}$ обладает свойством $(S)^\Delta$, если для всякого НЧ p существуют S_σ-множество $\mathcal{G}^p$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^p}$, равномерно непрерывная функция φ_p и последовательность НЧ $\{b_k^p\}_k$ такие, что

$$\forall x y k\,(x \in 0\Delta 1 \;\&\; \neg(\mathcal{F}(x) \in \mathcal{G}^p) \;\&\; |y - x| < \frac{1}{b_k^p} \supset$$
$$\supset |\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x) - \varphi_p(x)\cdot(y - x)| \le \frac{1}{2^k}\cdot|y - x|)\;.$$

2) Мы скажем, что $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^\Delta$, если для всякого НЧ p существуют S_σ-множество $\mathcal{G}^p$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^p}$ и функция g_p, для которых выполнено

$$\alpha(g_p) \;\&\; \forall x\,(\neg(\mathcal{F}(x) \in \mathcal{G}^p) \supset \mathcal{F}(x) = g_p(x))\;.$$

На основании теорем 2, 3 и 5 и замечания 3 из [10] легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 1</u>. Функция $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$ тогда и только тогда, когда существует возрастающая последовательность НЧ $\{m_k\}_k$ и для всяких S_σ-множества $\mathcal{G}$ и КДЧ y, где y мера $\mathcal{G}$, можно построить S_σ-множество $\mathcal{C}$ и КДЧ z такие, что z является мерой $\mathcal{C}$ и верно

$$\forall x\,(x \in \mathcal{G} \supset \mathcal{F}(x) \in \mathcal{C}) \;\&\; \forall k\,(y < \frac{1}{m_k} \supset z < \frac{1}{2^k})\;.$$

<u>Замечание 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция.

1) Если $\mathcal{F}$ обладает свойством $(S)^\Delta$, то согласно тео-

ремам 10 и 3 из [10] $\mathcal{F}$ обладает свойствами $(T_1)^*$ и $(N)^*$ и является равномерно непрерывной.

2) Ввиду 1) и леммы 1 легко доказать: если $\mathcal{F}$ является суперпозицией двух функций, обладающих свойством $(S)^\Delta$, то $\mathcal{F}$ тоже обладает этим свойством.

3) Согласно теореме из [4], следствию теоремы 2 из [6], лемме 1 и теореме 3 из [3], следствию теоремы 7 из [10] и лемме 1 ясно, что всякая абсолютно нперерывная функция обладает свойствами $(S)^\Delta$ и α и, следовательно, и свойством $(T_1)^\Delta$.

4) Ввиду равномерной непрерывности функций, обладающих свойством α видно, что всякая функция, обладающая свойством $(T_1)^\Delta$, равномерно непрерывна.

5) Ввиду определения 3, замечания 4 и леммы 5 из [9], леммы 1 из [5], леммы 1 и 1 - 4) функция $\mathcal{F}$ обладает свойством $(S)^\Delta$ (соответственно $(T_1)^\Delta$) тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ равномерно непрерывна и функция $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ обладает свойством $(S)^\Delta$ (соотв. $(T_1)^\Delta$).

6) Пусть $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^\Delta$. Тогда на основании 5) и теоремы 2 из [9] легко доказать, что $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^*$ (см. определение 3 из [9]).

Теорема 1. Пусть $\mathcal{F}$ функция. Тогда следующие четыре условия являются эквивалентными.

1) $\mathcal{F}$ обладает свойством $(S)^\Delta$.

2) Для всякого НЧ n существуют S_σ-множество $\mathcal{G}^n$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^n}$ и абсолютно непрерывная функция g_n такие, что $\forall x(\neg(\mathcal{F}(x) \in \mathcal{G}^n) \supset \mathcal{F}(x) = g_n(x))$.

3) $\mathcal{F}$ обладает свойствами $(T_1)^{\Delta}$ и $(N)^*$.

4) $\mathcal{F}$ представима в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций.

На основании этой теоремы, теоремы 2 из [5] и замечания 1 из [11] мы сразу получаем следующее утверждение.

<u>Следствие</u>. Функция $\mathcal{F}$ является абсолютно непрерывной (на $0 \Delta 1$) тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ является функцией ограниченной вариации (на $0 \Delta 1$) и обладает свойством $(S)^{\Delta}$ (т.е. свойствами $(T_1)^{\Delta}$ и $(N)^*$).

На основании леммы 2 из [9] легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 2</u>. Пуцть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, $\{z_k\}_k$ последовательность КДЧ, $a \Delta b$ сегмент, а y КДЧ такие, что $\mathcal{X}(\mathcal{F}, \{z_k\}_k) \,\&\, a \Delta b \subseteq 0 \Delta 1 \,\&\, y \in \langle \mathcal{O}, \mathcal{F} \rangle \llcorner a \Delta b \lrcorner \,\&\, \neg \exists k \, (y = z_k)$. Тогда можно построить КДЧ x_1 и x_2 такие, что $a < x_1 \leq x_2 < b \,\&$ $\&\, \mathcal{F}(x_1) = \mathcal{F}(x_2) = y \,\&\, \forall x \, (x \in a \Delta b \,\&\, \mathcal{F}(x) = y \supset x_1 \leq x \leq x_2)$.

<u>Лемма 3</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и φ равномерно непрерывные функции, n НЧ, $\mathcal{G}$ S_6-множество меры меньшей чем $\frac{1}{2^{n+3}}$, а $\{s_k\}_k$ последовательность НЧ такие, что

$$\forall x y k \, (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg (\mathcal{F}(x) \in \mathcal{G}) \,\&\, |x - y| < \frac{1}{s_k} \supset$$
$$\supset |\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x) - \varphi(x) \cdot (y - x)| \leq \frac{1}{2^k} \cdot |y - x|) \ .$$

Тогда существуют S_6-множество $\mathcal{G}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^n}$ и абсолютно непрерывная функция g , удовлетворяющая условию Липшица, для которых верно $\forall x \, (\neg (\mathcal{F}(x) \in \mathcal{G}) \supset \mathcal{F}(x) =$ $= g(x))$.

Доказательство. Определения алгорифмов $\langle S, \mathcal{F} \rangle$, $\langle I, \mathcal{F} \rangle$, $\langle \sigma, \mathcal{F} \rangle$ и $\langle \omega, \mathcal{F} \rangle$ приведены в [7], стр. 228.

Согласно теореме 1.3 из [2], стр. 399, существует слово P такое, что $(P \mathrel{\mathrm{I}} \Lambda \supset \langle \omega, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner} 0 \Delta 1_{\lrcorner} > \frac{1}{2^{n+1}})$ & & $(\neg (P \mathrel{\mathrm{I}} \Lambda) \supset \langle \omega, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner} 0 \Delta 1_{\lrcorner} < \frac{3}{2^{n+2}})$.

1) Если $\neg(P \mathrel{\mathrm{I}} \Lambda)$, мы построим S_{σ}-множество $\mathcal{Y}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{n}}$, для которого выполнено $\forall y (y \in \mathcal{Y} \equiv$
$\equiv y \in \langle I, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner} 0 \Delta 1_{\lrcorner} \Delta (\langle S, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner} 0 \Delta 1_{\lrcorner} + \frac{1}{2^{n+2}}))$
а в качестве φ мы возьмем функцию идентично равную нулю.

2) Пусть $P \mathrel{\mathrm{I}} \Lambda$. Мы построим НЧ M, последовательность КДЧ $\{z_k\}_k$ и НЧ q такие, что

$$(1)\quad |\varphi| < M - 1 \;\&\; \mathcal{Z}(\mathcal{F}, \{z_k\}_k) \;\&\; \forall x y (|x - y| \leq \frac{1}{q} \supset |\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{1}{2^{n+3}}) \;\&\; s_{n+4} < q$$

(см. лемму 2 из [9]).

Согласно теореме 1.3 из [2] существует система слов $\{P_i\}_{i=1}^{q}$ такая, что

$$\forall i (1 \leq i \leq q \supset (P_i \mathrel{\mathrm{I}} \Lambda \supset \langle \omega, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner} \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q} > \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \frac{1}{q} + \nu \langle \mathcal{Y} \rangle_{\llcorner} \langle \sigma, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner} \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q}{}_{\lrcorner\lrcorner}) \;\&\; (\neg (P_i \mathrel{\mathrm{I}} \Lambda) \supset$$
$$\supset \langle \omega, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner} \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q}{}_{\lrcorner} < \frac{3}{2^{n+3}} \cdot \frac{1}{q} + \nu \langle \mathcal{Y} \rangle_{\llcorner} \langle \sigma, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner} \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q}{}_{\lrcorner\lrcorner})).$$

а) Пусть i НЧ, $1 \leq i \leq q \;\&\; P_i \mathrel{\mathrm{I}} \Lambda$.

Допустим, что $\exists x (x \in \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q} \;\&\; |\varphi(x)| \leq \frac{1}{2^{n+3}})$.
Тогда ввиду (1) и леммы 2 из [7] верно $\forall x (x \in \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q} \supset$
$\supset |\varphi(x)| < \frac{1}{2^{n+2}}) \;\&\; \langle \omega, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner} \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q}{}_{\lrcorner} \leq \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \frac{1}{q} + \nu \langle \mathcal{Y} \rangle_{\llcorner} \langle \sigma, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner} \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q}{}_{\lrcorner\lrcorner}$,

что невозможно.

Итак, выполнено $\forall x \left(x \in \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q} \supset \frac{1}{2^{n+3}} < |\varphi(x)| \right)$, функция φ не меняет на сегменте $\frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q}$ свой знак и, следовательно, согласно нашим предположениям и лемме 2 для всякого КДЧ y,

$$y \in \langle \mathcal{O}, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner} \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q}_{\lrcorner} \,\&\, \neg\, \exists k\, (y = z_k) \,\&\, \neg\, (y \in \mathcal{S}),$$

существует одно и только одно КДЧ x, для которого верно $x \in \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q} \,\&\, \mathcal{F}(x) = y$.

Кроме того ввиду предположений нашей леммы и (1) для всяких КДЧ x и y,

$x \in \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q} \,\&\, y \in \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q} \,\&\, \neg\, (\mathcal{F}(x) \in \mathcal{S})$,

выполнено

$$\frac{1}{2^{n+3}} \cdot |y - x| - |\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)| \leq |\varphi(x) \cdot (y - x)| - |\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)| \leq$$

$$\leq |\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x) - \varphi(x) \cdot (y - x)| \leq \frac{1}{2^{n+4}} \cdot |y - x|,$$

$$|\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)| \leq \left(|\varphi(x)| + \frac{1}{2^{n+4}} \right) \cdot |y - x|$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2^{n+4}} \cdot |y - x| \leq |\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)| \leq M \cdot |y - x| .$$

б) Согласно сказанному и замечанию 2 из [8] существует последовательность дизъюнктных сегментов $\{L_k\}_k$ такая, что $\{L_k\}_k$ S_σ -множество меры меньшей чем $\frac{1}{2^{n+1}}$ и выполнено $\forall y \big((\langle I, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner} 0 \Delta 1_{\lrcorner} - 1 < y < \langle S, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner} 0 \Delta 1_{\lrcorner} + 1 \,\&\, (y \in \mathcal{S} \vee \exists k\, (y = z_k) \vee \exists a\, (y = a) \vee \exists i\, (1 \leq i \leq q \,\&\, \neg\, (P_i \rightleftharpoons \Lambda) \,\&\, y \in \langle \mathcal{O}, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner} \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q}_{\lrcorner}))) \supset \exists k\, (\mathcal{E}_l (L_k) < y < \mathcal{E}_m (L_k)) \big)$.

Пусть i НЧ, $1 \le i \le q$. Тогда существуют НЧ m_i и n_i такие, что $\langle I, \mathcal{F} \rangle \llcorner \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q} \lrcorner \in L_{m_i} \,\&\, \langle S, \mathcal{F} \rangle \llcorner \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q} \lrcorner \in L_{n_i}$.

α) Если $m_i = n_i$,то мы построим S_σ -множество $\{H_\ell^i\}_\ell$ такое, что $\forall x\, (x \in \{H_\ell^i\}_\ell \equiv x \in \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q})$.

β) Пусть $\neg (m_i = n_i)$.Тогда $P_i \neq \Lambda$ и существует возрастающая последовательность НЧ $\{k_t^i\}_t$ такая, что

$$\forall k\, (L_k \subseteq \partial_m (L_{m_i}) \triangledown \partial_n (L_{n_i}) \equiv \exists t\, (k = k_t^i)) .$$

Согласно а) можно построить S_σ -множество $\{H_\ell^i\}_\ell$ содержащееся в $\frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q}$, для которого выполнено

$$\forall j\, (i-1 \le j \le i \supset (\frac{j}{q} \in H_1^i \vee \frac{j}{q} \in H_2^i)) \,\&\, \langle \mathcal{O}, \mathcal{F} \rangle \llcorner H_1^i \lrcorner =$$

$$= \langle I, \mathcal{F} \rangle \llcorner \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q} \lrcorner \Delta\, \partial_m (L_{m_i}) \,\&\, \langle \mathcal{O}, \mathcal{F} \rangle \llcorner H_2^i \lrcorner =$$

$$= \partial_n (L_{n_i}) \Delta \langle S, \mathcal{F} \rangle \llcorner \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q} \lrcorner \,\&\, \forall t\, (\langle \mathcal{O}, \mathcal{F} \rangle \llcorner H_{t+2}^i \lrcorner = L_{k_t^i}) .$$

в) Для всяких НЧ i и m, $1 \le i \le q$, мы определим $H_{q \cdot (m-1)+i} \rightleftharpoons H_m^i$. Тогда $\{H_\ell\}_\ell$ S_σ -множество,для которого выполнено

$$\forall x\, ((x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \mathcal{F}(x) \in \{L_m\}_m) \equiv x \in \{H_\ell\}_\ell) .$$

Мы построим равномерно непрерывную функцию $\mathcal{F}_1$ и НЧ $\overline{M}$ такие, что для всяких НЧ i и КДЧ x, $1 \le i \le q \,\&\, x \in \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q}$, верно $q \cdot |\mathcal{F}(\frac{i}{q}) - \mathcal{F}(\frac{i-1}{q})| < \overline{M} \,\&$

$$(m_i = n_i \supset \mathcal{F}_1(x) = \mathcal{F}(\frac{i-1}{q}) + q \cdot (\mathcal{F}(\frac{i}{q}) - \mathcal{F}(\frac{i-1}{q})) \cdot (x - \frac{i-1}{q})) \,\&$$

$$(\neg (m_i = n_i) \supset \mathcal{F}_1(x) = \mathcal{F}(x)) .$$

Тогда ряд $\sum_\ell |\mathcal{F}_1(\partial_m(H_\ell)) - \mathcal{F}_1(\partial_n(H_\ell))|$ сходится и

$\forall x (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg (x \in \{H_l\}_l) \supset D(\varphi(x), \mathcal{F}_1, x) \,\&\, \mathcal{F}_1(x) = \mathcal{F}(x))$.

Согласно лемме 9 из [7] можно построить абсолютно непрерывную функцию g, для которой верно

$$\forall l x (x \in H_l \supset g(x) = \mathcal{F}_1(\Im_l(H_l)) + (\mathcal{F}_1(\Im_m(H_l)) - \mathcal{F}_1(\Im_l(H_l))) \cdot \frac{x - \Im_l(H_l)}{|H_l|}) \,\&\, \forall x (\neg \exists l (\Im_l(H_l)) < x < \Im_m(H_l)) \supset g(x) = \mathcal{F}_1(x))$$

и, следовательно, $\forall x (\neg (\mathcal{F}(x) \in \{L_m\}_m) \supset \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_1(x) = g(x))$.

Ввиду а) и свойства НЧ $\overline{M}$ выполнено $\forall x y (|g(y) - g(x)| \leq (M + \overline{M}) \cdot |y - x|)$.

На основании замечания 1, лемм 1 и 3 настоящей заметки, леммы 1 из [5] и леммы 5 из [9] легко доказать следующее.

<u>Лемма 4</u>. Пусть функция $\mathcal{F}$ обладает свойством $(S)^\Delta$, а функция $\mathcal{G}$ свойством $(T_1)^\Delta$. Тогда функция $\mathcal{F} * \mathcal{G}$ (т.е. суперпозиция функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$) обладает свойством $(T_1)^\Delta$.

Нетрудно доказать следующие утверждения.

<u>Лемма 5</u>. Пусть g равномерно непрерывная функция, а $\{\xi_m \Delta \eta_m\}_m$ последовательность неперекрывающихся сегментов, содержащихся в $0 \Delta 1$, такая, что выполнено $|\xi_m \Delta \eta_m| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$. Тогда можно построить равномерно непрерывную функцию φ, для которой верно $\forall x ((\neg \exists m (\xi_m < x < \eta_m) \supset \varphi(x) = g(x)) \,\&$
$\forall m (\xi_m < x < \eta_m \supset \varphi(x) = g(\xi_m) + (g(\eta_m) - g(\xi_m)) \cdot \dfrac{x - \xi_m}{\eta_m - \xi_m}))$.

Что касается ограниченности вариации, абсолютной непрерывности, свойств $\mathfrak{a}$ и α , то принадлежность функции g к одному из соответствующих классов функций влечет за собой принадлежность φ к тому же классу.

Лемма 6. Пусть φ функция, а $\{\varphi_m\}_m$ последовательность функций, такие, что для всякого НЧ m и любой возрастающей системы РЧ $\{c_i\}_{i=0}^{s}$, $c_0 = 0 \,\&\, c_s = 1$, выполнено $\alpha(\varphi_m)$ и

$$\sum_{j=1}^{s} |\varphi(c_j) - \varphi(c_{j-1}) - (\varphi_m(c_j) - \varphi_m(c_{j-1}))| < \frac{1}{m} .$$

Тогда верно $\alpha(\varphi)$.

Лемма 7. Для функции $\mathcal{F}$ верно $\alpha(\mathcal{F})$ в том и только том случае, если $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^{\Delta}$ и является функцией ограниченной вариации на $0 \Delta 1$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ функция.

1) Если $\alpha(\mathcal{F})$, то - очевидно - $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^{\Delta}$ и верно $\exists x \, Var(x, \mathcal{F}, 0 \Delta 1)$.

2) Пусть $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^{\Delta}$ и пусть x КДЧ такое, что $Var(x, \mathcal{F}, 0 \Delta 1)$. Мы используем лемму 6.

Пусть m НЧ. Мы хотим построить функцию φ_m такую, что $\alpha(\varphi_m)$ и для всякой возрастающей системы РЧ $\{c_i\}_{i=0}^{s}$, $c_0 = 0 \,\&\, c_s = 1$, выполнено

$$\sum_{j=1}^{s} |\mathcal{F}(c_j) - \mathcal{F}(c_{j-1}) - (\varphi_m(c_j) - \varphi_m(c_{j-1}))| < \frac{1}{m} .$$

Существует слово P такое, что $(P \sqsupset \Lambda \supset \frac{1}{2m} < x) \,\&$ $\&\, (\neg(P \sqsupset \Lambda) \supset x < \frac{1}{m})$.

1) Если $\neg(P \sqsupset \Lambda)$, то мы определим $\forall x (\varphi_m(x) \rightleftharpoons 0)$. Тогда, очевидно, требуемое выполнено.

2) Пусть $P \sqsupset \Lambda$. Тогда ввиду наших предположений существуют НЧ m и M, система слов $\{P_l\}_{l=1}^{m}$, S_6-множество $\mathcal{G}$

меры меньшей чем $\frac{1}{8m.m}$, функция g и последовательность КДЧ $\{x_k\}_k$ такие, что

(2) $\sum_{l=1}^{m} |\mathcal{F}(\frac{l}{m}) - \mathcal{F}(\frac{l-1}{m})| > x - \frac{1}{6m}$,

$|F| < M \& \forall l (1 \le l \le m \supset (P_l \mathbin{\underline{\underline{\times}}} \Lambda \supset |\mathcal{F}(\frac{l}{m}) - \mathcal{F}(\frac{l-1}{m})| > \frac{1}{7m.m}) \&$

$\& (\neg (P_l \mathbin{\underline{\underline{\times}}} \Lambda) \supset |\mathcal{F}(\frac{l}{m}) - \mathcal{F}(\frac{l-1}{m})| < \frac{1}{6m.m})) \& \alpha(g) \& \forall x (\neg (\mathcal{F}(x) \in$

$\in \mathcal{Y}) \supset \mathcal{F}(x) =$

$= g(x)) \& \mathcal{Z}(\mathcal{F}, \{x_k\}_k)$.

Согласно замечанию 2 из [8] существует последовательность дизъюнктных сегментов $\{L_p\}_p$, являющаяся S_ε-множеством меры меньшей чем $\frac{1}{7m.m}$, для которой выполнено

$\{L_p\}_p \subseteq (-M) \Delta M \& \forall y ((-M < y < M \& (y \in \mathcal{Y} \vee \exists a (y = a) \vee$

$\vee \exists k (y = x_k))) \supset \exists p (\mathfrak{Э}_л (L_p) < y < \mathfrak{Э}_п (L_p)))$.

Пусть l НЧ, $1 \le l \le m \& P_l \mathbin{\underline{\underline{\times}}} \Lambda$.Мы построим НЧ p_1^l и p_2^l, возрастающую последовательность НЧ $\{p_{t+2}^l\}_t$ и последовательность пар НЧ $\{s_{1,t+2} \square s_{2,t+2}\}_t$ такие, что

$\mathcal{F}(\frac{l-1}{m}) \in L_{p_1^l} \& \mathcal{F}(\frac{l}{m}) \in L_{p_2^l} \& \forall p (L_p \subseteq min (\mathfrak{Э}_п(L_{p_1^l}), \mathfrak{Э}_п(L_{p_2^l}))$

$max (\mathfrak{Э}_л(L_{p_1^l}), \mathfrak{Э}_л(L_{p_2^l})) \equiv \exists t (p = p_{t+2}^l)) \& \forall t k (2 < t \& k < t \supset$

$\supset s_{1,t} < t \& s_{2,t} < t \& (\mathfrak{Э}_п(L_{p_k^l}) \le \mathfrak{Э}_п(L_{p_{s_{1,t}}^l}) < \mathfrak{Э}_л(L_{p_t^l}) \vee$

$\vee \mathfrak{Э}_п(L_{p_t^l}) < \mathfrak{Э}_л(L_{p_{s_{2,t}}^l}) \le \mathfrak{Э}_л(L_{p_k^l})))$.

Пусть, например, $\mathcal{F}(\frac{l-1}{m}) < \mathcal{F}(\frac{l}{m})$. Согласно лемме 2 существуют КДЧ η_1^l и ξ_2^l и алгорифм $\mathfrak{B}_l$, для которых выполнено $\mathcal{F}(\eta_1^l) = \mathfrak{Э}_п(L_{p_1^l}) \& \mathcal{F}(\xi_2^l) = \mathfrak{Э}_л(L_{p_2^l}) \& \forall x (x \in \frac{l-1}{m} \Delta \frac{l}{m} \supset$

$\supset (\mathcal{F}(x) = \vartheta_m(L_{p_1^\ell}) \supset x \le \eta_1^\ell) \& (\mathcal{F}(x) = \vartheta_n(L_{p_2^\ell}) \&$

$\& \eta_1^\ell \le x \supset \xi_2^\ell \le x)) \& \eta_1^\ell < \xi_2^\ell$,

для всяких сегментов $\xi \Delta \eta$ и L, $\xi \Delta \eta \subseteq \frac{\ell-1}{m} \Delta \frac{\ell}{m} \& \mathcal{F}(\xi) <$
$< \vartheta_n(L) < \vartheta_m(L) < \mathcal{F}(\eta) \& \neg \exists k (\vartheta_n(L) = x_k \vee \vartheta_m(L) = x_k)$,
алгорифм $\mathfrak{B}_\ell$ применим к слову $\xi \Delta \eta \sqcap L$ и выдает по нему сегмент $y^1 \Delta y^2$ такой, что

$y^1 \Delta y^2 \subseteq \xi \triangledown \eta \& \mathcal{F}(y^1) = \vartheta_n(L) \& \mathcal{F}(y^2) = \vartheta_m(L) \& \forall x (x \in \xi \Delta \eta \supset$

$\supset (\mathcal{F}(x) = \vartheta_n(L) \supset y^1 \le x) \& (\mathcal{F}(x) = \vartheta_m(L) \supset x \le y^2))$.

Мы определим $\xi_1^\ell \rightleftharpoons \frac{\ell-1}{m}$, $\eta_2^\ell \rightleftharpoons \frac{\ell}{m}$ и для всякого НЧ t, $2 < t$, $\xi_t^\ell \Delta \eta_t^\ell \rightleftharpoons \mathfrak{B}_\ell \llcorner \eta^\ell_{s_{1,t}} \Delta \xi^\ell_{s_{2,t}} \sqcap L_{p_t^\ell} \lrcorner$.

Тогда $\{\xi_t^\ell \Delta \eta_t^\ell\}_t$ последовательность дизъюнктных сегментов, содержащихся в $\frac{\ell-1}{m} \Delta \frac{\ell}{m}$, $\xi_1^\ell = \frac{\ell-1}{m} \& \eta_2^\ell = \frac{\ell}{m} \&$
$\& \forall a (a \in \frac{\ell-1}{m} \triangledown \frac{\ell}{m} \supset \exists t (a \in \xi_t^\ell \triangledown \eta_t^\ell))$ и, следовательно,
$|\xi_t^\ell \Delta \eta_t^\ell| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$. Заметим, что ряд $\sum_t |\mathcal{F}(\eta_t^\ell) - \mathcal{F}(\xi_t^\ell)|$ сходится к КДЧ, меньшему чем $\frac{1}{7n.m}$ и
$\forall x (\frac{\ell-1}{m} < x < \frac{\ell}{m} \& \neg \exists t (\xi_t^\ell < x < \eta_t^\ell) \supset \mathcal{F}(x) = g(x))$.

В случае, что $\mathcal{F}(\frac{\ell-1}{m}) > \mathcal{F}(\frac{\ell}{m})$, мы поступаем аналогично и опять построим последовательность сегментов $\{\xi_t^\ell \Delta \eta_t^\ell\}_t$, удовлетворяющую условиям, перечисленным в предыдущем абзаце.

Мы построим функцию φ_m такую, что для всяких НЧ ℓ и КДЧ x, $1 \le \ell \le m \& x \in \frac{\ell-1}{m} \Delta \frac{\ell}{m}$, выполнено
$(\neg (P_\ell \equiv \Lambda) \supset \varphi_m(x) = \mathcal{F}(\frac{\ell-1}{m}) + m . (\mathcal{F}(\frac{\ell}{m}) - \mathcal{F}(\frac{\ell-1}{m}))$.

$\cdot(x-\frac{l-1}{m}))\,\&\,(P_l \equiv \Lambda \supset (\neg\,\exists t(\xi_t^l < x < \eta_t^l) \supset \varphi_m(x) =$

$= \mathcal{F}(x))\,\&\,\forall t(\xi_t^l < x < \eta_t^l \supset \varphi_m(x) = \mathcal{F}(\xi_t^l) +$

$+ (\mathcal{F}(\eta_t^l) - \mathcal{F}(\xi_t^l)) \cdot \frac{x-\xi_t^l}{\eta_t^l - \xi_t^l}))$.

При помощи леммы 5 легко доказать $\alpha(\varphi_m)$.

Пусть $\{c_i\}_{i=0}^{s}$ возрастающая система РЧ, $c_0 = 0\,\&\,c_s = 1$. Мы можем без ограничения общности предположить, что существует возрастающая система ЦЧ $\{i_j\}_{j=0}^{m}$ такая, что

$$\forall j(0 \le j \le m \supset 0 \le i_j \le s\,\&\,\frac{j}{m} = c_{i_j})\,\&$$

$$\&\,\forall l(1 \le l \le m\,\&\,P_l \equiv \Lambda \supset 2 < i_l - i_{l-1}\,\&$$

$$\&\,c_{i_{l-1}+1} \in \xi_1^l \triangledown \eta_1^l\,\&\,c_{i_l-1} \in \xi_2^l \triangledown \eta_2^l) .$$

Для всякого НЧ l, $1 \le l \le m\,\&\,\neg(P_l \equiv \Lambda)$, мы определим $\tau_l \rightleftharpoons 1$, $\psi_1^l \rightleftharpoons \frac{l-1}{m}$, $\psi_2^l \rightleftharpoons \frac{l}{m}$, $\sigma_{l,1} \rightleftharpoons i_l - i_{l-1}$ и $\forall j(0 \le j \le \sigma_{l,1} \supset x_j^{l,1} \rightleftharpoons c_{i_{l-1}+j})$.

Пусть l НЧ, $1 \le l \le m\,\&\,P_l \equiv \Lambda$, а $\{t_{l,j}\}_{j=1}^{\tau_l}$ система всех НЧ t таких, что $\exists i(i_{l-1} < i < i_l\,\&\,\xi_t^l < c_i < \eta_t^l)$, причем выполнено $\forall j(1 \le j < \tau_l \supset \eta_{t_{l,j}}^l < \xi_{t_{l,j+1}}^l)$.
Для любого НЧ j, $1 \le j \le \tau_l$, пусть $i_{l,j}$ и $\sigma_{l,j}$ НЧ, для которых верно $\forall i(0 \le i \le s \supset (\xi_{t_{l,j}}^l < c_i < \eta_{t_{l,j}}^l \equiv i_{l,j} \le i \le i_{l,j} + \sigma_{l,j} - 2))$.
Мы обозначим $\forall j(1 \le j \le \tau_l \supset (\psi_{2j-1}^l \rightleftharpoons \xi_{t_{l,j}}^l)\,\&\,(\psi_{2j}^l \rightleftharpoons \eta_{t_{l,j}}^l)\,\&$
$(x_0^{l,j} \rightleftharpoons \psi_{2j-1}^l)\,\&\,(x_{\sigma_{l,j}}^{l,j} \rightleftharpoons \psi_{2j}^l)\,\&\,\forall i(i_{l,j} \le i \le i_{l,j} + \sigma_{l,j} - 2 \supset x_{i-i_{l,j}+1}^{l,j} \rightleftharpoons c_i))$.

Тогда выполнено

$$\sum_{i=1}^{s} |\mathcal{F}(c_i) - \mathcal{F}(c_{i-1}) - (\varphi_n(c_i) - \varphi_n(c_{i-1}))| \leq$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{r_\ell - 1} |\mathcal{F}(y^\ell_{2j+1}) - \mathcal{F}(y^\ell_{2j}) - (\varphi_n(y^\ell_{2j+1}) - \varphi_n(y^\ell_{2j}))| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r_\ell} \sum_{k=1}^{\sigma_{\ell,j}} |\mathcal{F}(x^{\ell,j}_k) - \mathcal{F}(x^{\ell,j}_{k-1}) - (\varphi_n(x^{\ell,j}_k) - \varphi_n(x^{\ell,j}_{k-1}))| \Big) =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_\ell} \sum_{k=1}^{\sigma_{\ell,j}} \Big|\mathcal{F}(x^{\ell,j}_k) - \mathcal{F}(x^{\ell,j}_{k-1}) - (\mathcal{F}(y^\ell_{2j}) - \mathcal{F}(y^\ell_{2j-1})) \cdot \frac{x^{\ell,j}_k - x^{\ell,j}_{k-1}}{y^\ell_{2j} - y^\ell_{2j-1}}\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_\ell} \Big(|\mathcal{F}(y^\ell_{2j}) - \mathcal{F}(y^\ell_{2j-1})| + \sum_{k=1}^{\sigma_{\ell,j}} |\mathcal{F}(x^{\ell,j}_k) - \mathcal{F}(x^{\ell,j}_{k-1})| \Big) < \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} ,$$

ибо (2) и для всякого НЧ ℓ, $1 \leq \ell \leq m$, верно

$$\sum_{j=1}^{r_\ell} |\mathcal{F}(y^\ell_{2j}) - \mathcal{F}(y^\ell_{2j-1})| < \frac{1}{6n.m} .$$

Теорема 2. Пусть $\mathcal{F}$ функция. Тогда

а) $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^\Delta$ в том и только том случае, если существуют абсолютно непрерывная функция g и функция φ такие, что $\alpha(\varphi)$ & $\mathcal{F} = g * \varphi$;

б) $\mathcal{F}$ обладает свойствами $(T_1)^\Delta$ и $(N)^*$ в том и только том случае, если $\mathcal{F}$ представима в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций.

Доказательство. Мы будем пользоваться определением 3 и замечанием 4 из [9]. Ввиду замечания 1 и леммы 4 нам достаточно ограничиться следующим.

Пусть функция $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^\Delta$. Тогда ввиду замечания 1 $\mathcal{F}$ равномерно непрерывна и функция $n_{\mathcal{F}}$ обладает свойствами $(T_1)^\Delta$ и $(T_1)^*$. Согласно теореме 3 из [9] существуют возрастающие на $0 \Delta 1$ абсолютно непрерывные функции ψ_1 и ψ такие, что $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} = \psi * (\psi_1 * \mathcal{N}_{\mathcal{F}})$ и $\psi_1 * \mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ является функцией ограниченной вариации на $0 \Delta 1$. Применив замечание 1 и леммы 4 и 7 мы получаем $\alpha(\psi_1 * \mathcal{N}_{\mathcal{F}})$. По замечанию 4 из [9] верно $\mathcal{F} = {}^{\mathcal{F}}\psi * (\psi_1 * \mathcal{N}_{\mathcal{F}})$, где ${}^{\mathcal{F}}\psi$ абсолютно непрерывная функция.

Если функция $\mathcal{F}$ дополнительно обладает свойством $(N)^*$, то согласно замечанию 3, теоремам 3, 7 и 9 и следствию теоремы 5 из [10] функция $\psi_1 * \mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ обладает свойством $\mathcal{a}$. Из $\mathcal{a}(\psi_1 * \mathcal{N}_{\mathcal{F}}) \,\&\, \alpha(\psi_1 * \mathcal{N}_{\mathcal{F}})$ следует по теореме из [4] абсолютная непрерывность функции $\psi_1 * \mathcal{N}_{\mathcal{F}}$.

<u>Доказательство теоремы 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция.

а) Согласно лемме 3 из 1) следует 2).

б) Пусть выполнено 2). В замечании 1 отмечено, что всякая абсолютно непрерывная функция обладает свойствами α и $(N)^*$. Таким образом, $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^{\Delta}$. При помощи теоремы 5 из [10] и леммы 1 легко доказать, что $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$. Итак, верно 3).

в) Согласно части б) теоремы 2 из 3) следует 4).

г) Мы на основании замечания 1 знаем, что 4) влечет за собой 1).

Условие равномерности дифференцирования в определении свойства $(S)^{\Delta}$ нельзя опустить, Об этом свидетельствует следующий пример.

<u>Пример</u>. Существуют равномерно непрерывные функции f и $\{F_n\}_n \in S$ такие, что

1) $0 \leq f \leq 1$, f обладает свойствами $(N)^*$ и $\mathcal{a}_{кл}$;

2) для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно

$\exists u\,(P(u, \{F_m\}_m, x)\ \&\ D(u, f, x))$;

3) f нельзя представить в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций;

4) согласно лемме 1 настоящей заметки, теореме 3 из [3] и теореме 10 из [10] из 1) и 2) следует

а) для всякого НЧ n существуют S_σ-множество $\mathcal{G}^n$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^n}$ и равномерно непрерывная функция φ_n такие, что $\forall x\,(\neg(f(x) \in \mathcal{G}^n)\ \&\ x \in 0 \Delta 1 \supset D(\varphi_n(x), f, x))$ и

б) f обладает свойством $(T_1)^*$.

Литература

[1] BARY N.: Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues, Math.Annalen 103(1930), 185-248.

[2] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д.: Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, Труды Мат.инст.им.В.А.Стеклова,т.LXVII (1962),385-457.

[3] ДЕМУТ О.: Пространства L_n и S в конструктивной математике, Comment.Math.Univ.Carolinae 10(1969), 261-284.

[4] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, Comment. Math.Univ.Carolinae 11(1970),705-726.

[5] ДЕМУТ О.: О суперпозициях абсолютно непрерывных конструктивных функций, Comment.Math.Univ.Carolinae 12(1971),423-451.

[6] ДЕМУТ О.: Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации, Comment. Math.Univ.Carolinae 12(1971),687-711.

[7] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие представимости конструктивной функции в виде суперпозиции абсолютно непрерывных функций, Comment. Math.Univ.Carolinae 13(1972),227-251.

[8] ДЕМУТ О.: О представимости равномерно непрерывных конструктивных функций, Comment.Math.Univ.Carolinae 14(1973),7-25.

[9] ДЕМУТ О., НЕМЕЧКОВА Л.: О конструктивном аналоге свойства (T_1), Comment.Math.Univ.Carolinae 14(1973), 421-439.

[10] ДЕМУТ О., НЕМЕЧКОВА Л.: О конструктивных аналогах свойств (N) и (S), Comment.Math.Univ.Carolinae 14(1973), 565-582.

[11] ДЕМУТ О.: О представимости конструктивных функций, обладающих свойствами (S) и (T_1), в виде суперпозиций, Comment.Math.Univ.Caroline 15(1974), 49-64.

(Oblatum 2.1.1974)

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova universita
Sokolovská 83
186 00 Praha 8, Československo