Georg Hetzer

Der „Satz von der gleichmässigen Beschranktheit" für eine Klasse nichtlinearer Operatoren

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 14 (1973), No. 4, 739--754

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105522

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

14,4 (1973)

DER "SATZ VON DER GLEICHMÄSSIGEN BESCHRÄNKTHEIT" FÜR EINE KLASSE NICHTLINEARER OPERATOREN

Georg HETZER, Aachen

Abstract: Let X be a topological space, $\mathcal{A}$ a covering of X with two further properties, Y a locally convex Hausdorff space. We prove a uniform boundedness theorem for a class of so-called $\mathcal{A}$-bounded operators, which are defined on X and map each $A \in \mathcal{A}$ into a bounded set of Y. The concept of the adjoint of an $\mathcal{A}$-bounded operator and especially a here stated embedding theorem are basic for our results.

Key words: Uniform boundedness theorem, $\mathcal{A}$-bounded operators, functions spaces.

AMS: 47H99 Ref. Ž. 7.978

---

0. Einleitung.

In der "funkctionalanalytischen Literatur" bezeichnet man die folgende Aussage als "Satz von der gleichmässigen Beschränkheit":

Satz:

Vor.: X Banachraum, Y normierter Raum, $M \subseteq L(X,Y)$ [1], M punktweise beschränkt.

Beh.: $\sup_{u \in M} \|u\| < \infty$, d.h. M ist auf allen beschränkten Mengen gleichmässig beschränkt.

---

1) $L(X, Y) := \{u \mid u : X \longrightarrow Y$ linear und stetig$\}$.

In der letzten Form ist die Behauptung für lokalkonvexe lineare Hausdorffräume [2] $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ richtig, wenn $\mathfrak{X}$ quasi-vollständig oder tonneliert ist.

Unsere Absicht ist es, eine entsprechende Fragestellung für eine Klasse $\mathfrak{A}$-beschränkter [3] Operatoren zu behandeln. Wie schon in [5] bei der Übertragung des Satzes von Banach-Steinhaus muss die Voraussetzung " $\mathfrak{M}$ punktweise beschränkt" durch die punktweise Beschränktheit der Biadjungierten [3] der Elemente von $\mathfrak{M}$ ersetzt werden. Mit dieser Verschärfung erhalten wir insbesondere die zweite Version der obigen Behauptung für den linearen Raum aller lokalbeschränkten stetigen Funktionen zwischen zwei normierten Räumen (vgl. Satz 4). In 4. schliesslich geben wir eine Verschärfung unseres Hauptsatzes (Satz 3) im Falle " $\mathfrak{Y}$ endlichdimensional" mit Hilfe des Satzes von Mackey.

Unsere Ergebnisse beruhen auf Satz 2, der, abgesehen davon, ebenfalls von Interesse ist, da er eine Ergänzung bekannter Aussagen über Funktionenräume ([2],[3]) darstellt. Weitere Ergebnisse diesbezüglich findet man in [4].

1. <u>Grundlagen</u>:

Wir treffen folgende Vereinbarungen: Der Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ist stets vorgelegt. Für Mengen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ ist: $\mathrm{Pot}(\mathfrak{X}) := \{Z \mid Z \subseteq \mathfrak{X}\}$, $\mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}} := \{f \mid f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}\}$. Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{Pot}(\mathfrak{X})$, so schreiben wir, $\mathfrak{A}$ erfüllt (A1) bzw. (A2)

----

2) Kurzschreibweise im Folgenden: l.k.l.H.

3) Definitionen siehe 1.

bzw. (A3), falls gilt:

(A1) $\Phi \notin \mathcal{A}$, (A2) $\bigwedge_{A_1, A_2 \in \mathcal{A}} \bigvee_{A_3 \in \mathcal{A}} A_1 \cup A_2 \subseteq A_3$,

(A3) $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$.

Definition 1. $X \neq \Phi$, $\Phi \neq \mathcal{A} \subseteq \mathrm{Pot}(X)$, Y l.k.l.H., $f : X \longrightarrow Y$, f heisst $\mathcal{A}$-beschränkt, falls gilt:
$\bigwedge_{A \in \mathcal{A}} f(A)$ beschränkt.

Sei $X \neq \Phi$, $\Phi \neq \mathcal{A} \subseteq \mathrm{Pot}(X)$, Y l.k.l.H., so bezeichnen wir mit $F_{\mathcal{A}}(X,Y)$ den linearen Raum aller $\mathcal{A}$-beschränkten Funktionen von X in Y. Für $\subset$ [4] $F_{\mathcal{A}}(X,Y)$ ist $T_{\mathcal{A}}(Y)$ die Topologie der gleichmässigen Konvergenz auf allen Elementen von $\mathcal{A}$ bez. der kanonischen uniformen Struktur auf Y (vgl.[2], § 1 Nr. 2). $T_{\mathcal{A}}(Y)$ ist lokalkonvex ([3]Chap. 3, § 3 Prop.1) und hausdorffsch, wenn $\mathcal{A}$ (A3) erfüllt ([2], § 1, Prop.1). Mit Y' bezeichnen wir den "topologischen Dualraum" von Y, Y'' ist per definitionem $(Y', \beta(Y',Y))'$, $\varkappa :$ $: Y \longrightarrow Y''$ die kanonische Einbettung, die definiert ist durch:

$$\bigwedge_{y \in Y} \bigwedge_{y' \in Y'} \langle y, y' \rangle = \langle y', \varkappa(y) \rangle$$ [5]

Entsprechend (vgl.[1]) definiert man für eine Menge $X \neq \Phi$, $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Pot}(X)$, $E \subset F_{\mathcal{A}}(X, \mathbb{K})$, $E' := (E, T_{\mathcal{A}}(\mathbb{K}))'$ eine Einbettung $\varkappa^E : X \longrightarrow E'$ durch: $\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{e \in E} \langle e, \varkappa^E(x) \rangle = e(x)$.

----

4) E linearer Raum, $Z \subset E :\Longleftrightarrow Z$ linearer Teilraum von E.

5) $\langle\ ,\ \rangle$ bezeichnet die kanonische Bilinearform "anwenden auf" auf einem l.k.l.H. und seinem Dualraum.

Im linearen Fall [6] spezialisiert sich $\varkappa^E$ auf die bekannte Definition der kanonischen Einbettung.

<u>Definition 2</u>. $X \neq \Phi$, $\Phi \neq \mathcal{A} \subseteq \mathrm{Pot}(X)$, $E \subset F_{\mathcal{A}}(X, \mathbb{K})$ <u>trennt</u> X, wenn gilt: $\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} \bigvee_{e \in E} (x_1 \neq x_2 \Longrightarrow e(x_1) \neq e(x_2))$.

<u>Bemerkung</u>: $\varkappa^E$ injektiv $\Longleftrightarrow E$ trennt X (vgl. [4]).
Analog zu [1] definieren wir:

<u>Definition 3</u>. $X \neq \Phi$ Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Pot}(X)$ erfüllt (A1) - (A3), Y l.k.l.H., $f: X \longrightarrow Y$ $\mathcal{A}$-beschränkt. Die Abbildung $f': Y' \longrightarrow F_{\mathcal{A}}(X, \mathbb{K})$, definiert durch:
$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y' \in Y'} f'y'(x) := \langle f(x), y' \rangle$ heisst <u>Adjungierte</u> von f.

<u>Bemerkungen:</u> 1) f' ist linear.
2) Im linearen Fall erhält man die bekannte Definition der Adjungierten, da dann Bild [7] $(f') \subseteq X'$ ist.

Im Folgenden werden wir, sofern $E \subset F_{\mathcal{A}}(X, \mathbb{K})$, $\mathrm{Bild}(f') \subseteq E$ ist, f' als Abbildung von Y' in E auffassen. Sei $E \subset F_{\mathcal{A}}(X, \mathbb{K})$, so bezeichnen wir den linearen Teilraum aller Elemente $f \in F_{\mathcal{A}}(X, Y)$, die $\mathrm{Bild}(f') \subseteq E$ erfüllen, mit $B_E(X, Y)$. Eigenschaften von f' und Beziehungen zwischen f und f' sind in [1], [4] und [5] untersucht worden. Einige der dort erzielten Ergebnisse, die hier benötigt werden, fassen wir im folgenden Satz zusammen:

----

6) d.h. X l.k.l.H., $\mathcal{A} \subseteq \{B \mid B \subseteq X, B$ beschränkt$\}$, $E = X'$.

7) X, Y Mengen, $f: X \longrightarrow Y$, $\mathrm{Bild}(f) := \{y \mid y \in Y, \bigvee_{x \in X} f(x) = y\}$.

Satz 1.

Vor.: $X \neq \Phi$, $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Pot}(X)$ erfüllt (A1) - (A3),
Y l.k.l.H., $E \subset F_{\mathcal{A}}(X, \mathbb{K})$, $f \in B_E(X, Y)$,
$\varkappa, \varkappa^E$ wie oben definiert.

Beh.: (1) f' ist bez. $\beta(Y', Y)$ auf Y' und $T_{\mathcal{A}}(\mathbb{K})$ auf E stetig.

(2) f' ist bez. $\sigma(Y', Y)$ auf Y' und $\sigma(E, E')$ auf E stetig.

(3) $\mathrm{Bild}(f'') \in Y''$.

(4) f'' ist bez. $\sigma(E', E)$ auf E' und $\sigma(Y'', Y')$ auf Y'' stetig.

(5) f'' ist bez. $\beta(E', E)$ auf E' und $\beta(Y'', Y')$ auf Y'' stetig.

(6) $\bigwedge\limits_{x \in X} f'' \circ \varkappa^E(x) = \varkappa \circ f(x)$.

Bemerkung: Der stetige lineare Operator $f'': E' \longrightarrow Y''$ lässt sich bekanntlich, wie folgt, zerlegen: $f'' = f_1'' \circ \pi$, wobei $\pi : E' \longrightarrow (\mathrm{Bild}(f'))'$ die kanonische Abbildung [8] von E' auf $(\mathrm{Bild}(f'))'$ ist, $f_1'' : (\mathrm{Bild}(f'))' \longrightarrow Y''$ die bez. $\mathrm{Bild}(f')$ gebildete Adjungierte ist. Aus dieser Darstellung folgt sofort, dass für $M \subseteq F_{\mathcal{A}}(X, Y)$ die punktweise Beschränktheit von $\{f'' \mid f \in M\}$ unabhängig von dem gerade vorliegenden E ist, wir deshalb für diese Voraussetzung E nicht festlegen müssen. Davon werden wir später Gebrauch machen.

----

8) Jedem $e' \in E'$ wird $e'|_{\mathrm{Bild}(f')}$ zugeordnet.

2. Ein Einbettungssatz für $\mathfrak{B}_E(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

Definition 4. $\mathcal{X}$ l.k.l.H., $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Pot}(\mathcal{X})$, $\bigwedge_{A\in\mathcal{A}} A$ beschränkt, $\mathcal{A}$ heisst saturiert, falls:

(1) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow (\bigwedge_{M\subseteq A} M \neq \Phi \Longrightarrow M \in \mathcal{A})$,

(2) $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{\{A_i\}_{1\le i\le n}\in\mathcal{A}^n} \bigcup_{1\le i\le n} A_i \in \mathcal{A}$,

(3) $\bigwedge_{\varphi\in\mathbb{K}} \bigwedge_{A\in\mathcal{A}} \varphi A \in \mathcal{A}$,

(4) $\bigwedge_{A\in\mathcal{A}} \overline{\mathrm{co}(A)}$ [9] $\in \mathcal{A}$.

Bemerkungen:

1) Sei $\Phi \neq \mathcal{A} \subseteq \mathrm{Pot}(\mathcal{X})$, $A \in \mathcal{A}$ beschränkt, so existiert eine kleinste saturierte Obermenge $\tilde{\mathcal{A}}$, die sogenannte saturierte Hülle.

2) Ist $\mathcal{Y}$ l.k.l.H., $H \subseteq L(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, so gilt: $T_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}) = T_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathcal{Y})$ auf H (vgl. auch: [3] Chapt.III, § 3 exerc. 2a).

Lemma 1.

Vor.: $\mathcal{X} \neq \Phi$ Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Pot}(\mathcal{X})$ erfüllt (A1) - (A3),

$E \subseteq F_{\mathcal{A}}(\mathcal{X},\mathbb{K})$, E trennt $\mathcal{X}$.

Beh.: (1) $\bigwedge_{A\in\mathcal{A}} \varkappa^E(A)$, $\sigma(E',E)$ beschränkt ,

(2) $\bigcup_{B\in\widetilde{\varkappa^E(\mathcal{A})}}$ [10] $B = E'$.

----

9) $\mathcal{X}$ linearer Raum, $M \subseteq \mathcal{X}$, $\mathrm{co}(M)$ bezeichnet die absolutkonvexe Hülle von M .

10) $\varkappa^E(\mathcal{A}) := \{\varkappa^E(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$, $\sim$ ist im Folgenden stets bez. $\sigma(E',E)$ auf E' zu verstehen.

Beweis: (1) Nach Definition von $\varkappa^E$ gilt:

$\bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in A} |\langle e, \varkappa^E(x) \rangle| = |e(x)|$. Da jedes $e \in E$ $\mathcal{A}$-beschränktes Funktional ist, ist $\sup_{x \in A} |e(x)| < \infty$, also $\varkappa^E(A)$ $\sigma(E', E)$ beschränkt.

(2) In [1] wird gezeigt: $(*)$ $E' = \bigcup_{\varphi \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}} \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{\beta 0}$ 11)

und $(**)$ $\bigwedge_{A \in \mathcal{A}} \overline{co(\varkappa^E(A))}^{\sigma(E', E)} = A^{\beta 0}$. Definition 4 und Teil 1 des Lemmas ergeben dann die Behauptung.

Definition 5. $X \neq \Phi$ Menge, $\mathcal{A} \subseteq Pot(X)$ erfüllt (A1) - (A3), $E \in F_{\mathcal{A}}(X, \mathbb{K})$, $(E, T_{\mathcal{A}}(\mathbb{K}))$ hat die Eigenschaft (B), falls jedes Element aus $\widetilde{\varkappa^E(\mathcal{A})}$ $\beta(E', E)$ beschränkt ist.

Bemerkung. $(E, T_{\mathcal{A}}(\mathbb{K}))$ hat insbesondere die Eigenschaft (B), wenn $(E, T_{\mathcal{A}}(\mathbb{K}))$ quasivollständig oder tonneliert ist, da dann jede $\sigma(E', E)$ beschränkte Menge $\beta(E', E)$ beschränkt ist (vgl.[3], Chap.IV, § 3, Prop. 1 und Prop. 2).

Lemma 2.

Vor.: $X \neq \Phi$, $\mathcal{A} \subseteq Pot(X)$ erfüllt (A1) - (A3),
$E \in F_{\mathcal{A}}(X, \mathbb{K})$, E trennt X, $(E, T_{\mathcal{A}}(\mathbb{K}))$

----

11) $A^{\beta} := \{e \mid e \in E, \bigwedge_{x \in A} |e(x)| \leq 1\}$, ^{0} bezeichne die Absolutpolare.

hat Eigenschaft (B), Y l.k.l.H., Y'' wird unter $\beta(Y'', Y')$ betrachtet.

Beh.: $(L_\beta(E', Y'')$ [12], $T_{\widetilde{\mathfrak{K}^E(\mathcal{A})}}(Y''))$ ist lokalkonvex und hausdorffsch.

Beweis: Da $(E, T_{\mathcal{A}}(\mathbb{K}))$ Eigenschaft (B) hat, gilt:

$\bigwedge_{B \in \widetilde{\mathfrak{K}^E(\mathcal{A})}} B$ $\beta(E', E)$ beschränkt. Deshalb ist $T_{\widetilde{\mathfrak{K}^E(\mathcal{A})}}(Y'')$ lokalkonvex. Lemma 1(2) sichert die Hausdorffeigenschaft.

Sei $X \neq \Phi$, $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Pot}(X)$ mit: $\mathcal{A}$ erfüllt (A1) - (A3), Y l.k.l.H., so ist nach Satz 1(4) $\varphi : f \longmapsto f''$ $(f \in B_E(X, Y))$ eine Abbildung in $L_\beta(E', Y'')$. Im Folgenden wird diese Abbildung stets mit φ bezeichnet. Wir zeigen nun:

Satz 2.

Vor.: $X \neq \Phi$, $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Pot}(X)$ erfüllt (A1) - (A3), $E \subset F_{\mathcal{A}}(X, \mathbb{K})$, E trennt X, $(E, T_{\mathcal{A}}(\mathbb{K}))$ hat Eigenschaft (B), Y l.k.l.H., Y'' sei mit $\beta(Y'', Y')$ ausgestattet, $\mathfrak{K}$ stetig,

Beh.: φ ist topologischer Homomorphismus [13] von

$$(B_E(X, Y), T_{\mathcal{A}}(Y)) \text{ in } (L_\beta(E', Y''), T_{\widetilde{\mathfrak{K}^E(\mathcal{A})}}(Y'')).$$

----

12) $L_\beta(E', Y'') := \{ u \mid u : E' \longrightarrow Y''$ linear und bez. $\beta(E', E)$ und $\beta(Y'', Y')$ stetig $\}$.

13) d.h. lineare injektive stetige Abbildung, deren Inverse stetig ist

Beweis: Dass φ linear und injektiv ist, folgt direkt aus Definition 3. Unter Berücksichtigung von Bemerkung 2 zu Definition 4 genügt es, zu zeigen, dass φ stetig und offen bez. $T_{\mathcal{A}}(Y)$ auf $B_E(X,Y)$ und $T_{\varkappa^E(\mathcal{A})}(Y'')$ auf $L_\beta(E',Y'')$ ist.

1) φ ist stetig:

Sei $W_{\varkappa^E(A),V}$ vorgegeben [14] mit $V \in \mathfrak{Y}(0)$, wobei $\mathfrak{Y}(0)$ Nullumgebungsbasis von $\beta(Y'',Y')$ ist. Da $\varkappa$ nach Voraussetzung stetig ist, ist $\varkappa^{-1}(V)$ Umgebung in Y. Es gilt:

$$\varphi(W_{A,\varkappa^{-1}(V)}) = \{f'' \mid f \in B_E(X,Y),\ f(A) \subseteq \varkappa^{-1}(V)\}$$
$$\subseteq \{u \mid u \in L_\beta(E',Y''),\ u(\varkappa^E(A)) \subseteq V\}$$

(vgl. Satz 1(6)). Letzteres ist aber gerade $W_{\varkappa^E(A),V}$.

2) φ ist offen:

Sei $\mathfrak{U}(0)$ Nullumgebungsbasis aus Tonnen in Y. Da $\varkappa$ lineare Homöomorphie auf $\varkappa(Y) \subset Y''$ ist, - $\varkappa$ ist ja stets injektiv und offen und nach Voraussetzung stetig - , gibt es eine Nullumgebungsbasis $\mathfrak{Y}(0)$ aus Tonnen in Y'', so dass $\mathfrak{U}(0) = \{\varkappa^{-1}(V) \mid V \in \mathfrak{Y}(0)\}$ ist. Sei $A \in \mathcal{A}$, $U \in \mathfrak{U}(0)$. Mit Hilfe des Auswahlaxioms er-

----

14) $X \neq \Phi$, $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Pot}(X)$ erfüllt (A1), (A2), Y l.k.l.H. mit Nullumgebungsbasis $\mathfrak{Y}(0)$, $H \subset F_{\mathcal{A}}(X,Y)$, $\mathfrak{Y}(0) :=$ $:= \{W_{A,V} \mid W_{A,V} := \{g \mid g \in H,\ g(A) \subseteq V\},\ A \in \mathcal{A},\ V \in \mathfrak{Y}\}$ ist Nullumgebungsbasis für $T_{\mathcal{A}}(Y)$ auf H (vgl. [2] und [3]).

hält man eine Umgebung $V \in \mathfrak{V}(0)$ mit $\varkappa^{-1}(V) = \mathcal{U}$. Es gilt dann:
$$\varphi^{-1}(W_{\varkappa^E(A), V}) = \varphi^{-1}(\{f'' \mid f \in B_E(X,Y),\ f''(\varkappa^E(A)) \subseteq V\}$$
$$= \varphi^{-1}(\{f'' \mid f \in B_E(X,Y),\ \varkappa(f(A)) \subseteq V\}$$

(vgl. Satz 1(6)). Da $\varkappa^{-1}(V) = \mathcal{U}$ ist und $\varkappa^{-1}(\varkappa(f(A))) \subseteq \varkappa^{-1}(V)$ ist, erhalten wir:
$$\varphi^{-1}(W_{\varkappa^E(A), V}) = \{f \mid f' \in B_E(X,Y),\ f(A) \subseteq \mathcal{U}\} = W_{A,\mathcal{U}} .$$
Also ist φ offen.

3. Der "Satz von der gleichmässigen Beschränktheit":
Mit Hilfe von Satz 2 erhält man:

Satz 3:

Vor.: $X \neq \Phi$, $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Pot}(X)$ erfüllt (A1) - (A3), $E \in F_{\mathcal{U}}(X, \mathbb{K})$, E trennt X, $(E, T_{\mathcal{A}}(\mathbb{K}))$ hat Eigenschaft (B), Y l.k.l.H., $\varkappa$ stetig bez. der Topologie von Y und $\beta(Y'', Y')$ auf Y'', $(E', \beta(E', E))$ quasivollständig oder tonneliert, $M \subseteq B_E(X,Y)$, $\varphi(M)$ punktweise beschränkt.

Beh.: M ist bez. $T_{\mathcal{A}}(Y)$ beschränkt.

Beweis: Betrachten wir Y'' unter $\beta(Y'', Y')$, so sind die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt. Deshalb ist φ ein topologischer Homomorphismus von $(B_E(X,Y),\ T_{\mathcal{A}}(Y))$ in $(L_\beta(E', Y''),\ T_{\widetilde{\varkappa^E(\mathcal{A})}}(Y''))$. Es genügt deshalb zu zeigen, dass $\varphi(M)$ bez. $T_{\widetilde{\varkappa^E(\mathcal{A})}}(Y'')$ beschränkt ist. Wenn

$(E', \beta(E',E))$ quasivollständig oder tonneliert ist, ist $\varphi(\mathcal{M})$ nach Théorème 1 bzw. 2 in Chap. III, § 3 von [3] gleichmässig beschränkt auf allen $\beta(E',E)$ beschränkten Mengen. Da $(E, T_{\mathcal{A}}(\mathbb{K}))$ Eigenschaft (B) hat, ist $T_{\widehat{\varkappa^E(\mathcal{A})}}(Y'')$ gröber als die Topologie der gleichmässigen Konvergenz auf allen beschränkten Mengen. Also ist $\varphi(\mathcal{M})$ bez. $T_{\widehat{\varkappa^E(\mathcal{A})}}(Y'')$ beschränkt.

<u>Bemerkungen</u>.

(1) Nach Bemerkung zu Definition 5 erhalten wir als Spezialfall für Eigenschaft (B): $(E, T_{\mathcal{A}}(\mathbb{K}))$ tonneliert oder quasivollständig. Beides ist z.B. erfüllt, falls $(E, T_{\mathcal{A}}(\mathbb{K}))$ Fréchetraum ist. Im Fall $(E, T_{\mathcal{A}}(\mathbb{K}))$ tonneliert, ist $(E', \beta(E',E))$ stets quasivollständig (vgl. [3], Chap. IV, § 3, Prop. 3).

(2) Für den Spezialfall " X reflexiver l.k.l.H.", $\mathcal{A} = \{A \mid A \subseteq X,\ A$ beschränkt $\}$, $\varkappa : X \longrightarrow Y''$ stetig bez. der Topologie von Y und $\beta(Y'', Y')$, erhalten wir das in der Einleitung erwähnte Ergebnis des linearen Falles.

(3) Dass aus dem obigen Satz im Gegensatz zum linearen Fall kein Satz vom "Banach-Steinhaus Typ" folgt, beruht darauf, dass im nichtlinearen Fall nich di Äquivalenz von gleichmässiger Beschränktheit und Gleichstetigkeit besteht, die im linearen Fall, wenn der Definitionsbereich tonneliert ist, ja bekannt ist.

(4) " $\varphi(\mathcal{M})$ punktweise beschränkt" impliziert " $\mathcal{M}$ punktweise beschränkt". Dies zeigt Satz 1(6). Andererseits folgt

aus ($*$) und ($**$) im Beweis von Lemma 1(2) und Satz 1(4), dass " $\mathcal{M}$ bez. $T_{\mathfrak{A}}(Y)$ beschränkt" " $\varphi(\mathcal{M})$ punktweise beschränkt" ergibt.

Wir erschliessen aus Satz 3 den folgenden interessanten Spezialfall:

Satz 4.

Vor.: X, Y normierte Räume, $\mathfrak{A} := \{A \mid A \subseteq X,\ A$ beschränkt, $A \neq \Phi\}$, $C_{\mathfrak{A}}(X,Y) := \{f \mid f \in F_{\mathfrak{A}}(X,Y),$ f stetig$\}$, $\mathcal{M} \subseteq C_{\mathfrak{A}}(X,Y)$, $\{f'' \mid f \in \mathcal{M}\}$ punktweise beschränkt [15].

Beh.: $\mathcal{M}$ ist lokalgleichmässig beschränkt.

Beweis: Wir setzen $E := C_{\mathfrak{A}}(X, \mathbb{K})$. Wie man leicht zeigen kann (vgl.[4]), ist $C_{\mathfrak{A}}(X, \mathbb{K})$, $T_{\mathfrak{A}}(\mathbb{K}))$ ein Fréchetraum und $C_{\mathfrak{A}}(X,Y) \in B_E(X,Y)$. Die $T_{\mathfrak{A}}(Y)$ Beschränktheit von $\mathcal{M}$ ist gerade die lokalgleichmässige Beschränktheit. Es genügt deshalb, die Voraussetzungen von Satz 3 für den vorliegenden Spezialfall zu realisieren. $(E, T_{\mathfrak{A}}(\mathbb{K}))$ ist als Fréchetraum tonneliert, hat also die Eigenschaft (B) (Bemerkung 1 zu Satz 3). Daraus folgt ausserdem, dass $(E', \beta(E', E))$ quasivollständig ist. Da Y ein normierter Raum ist, ist $\varkappa$ Isometrie. Nach Bemerkung zu Satz 1 ist $\varphi(\mathcal{M})$ punktweise beschränkt, da nach Voraussetzung die bez. $F_{\mathfrak{A}}(X, \mathbb{K})$ gebildeten Biad-

----

15) Man vergleiche Bemerkung zu Satz 1. Jedenfalls kann f'' zunächst bez. $F_{\mathfrak{A}}(X, \mathbb{K})$ gebildet, verstanden werden.

jungierten punktweise beschränkt sind. Dann ergibt Satz 3 die Behauptung, da " E trennt X " trivialerwise erfüllt ist.

Bemerkungen.

(1) Bekanntlich ist jede gleichmässig stetige Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ aus $C_{\mathcal{A}}(X, Y)$.

(2) Im Spezialfall X reflexiv, $M \subseteq L(X, Y)$ erhalten wir den in 0. formulierten Satz.

(3) Der lineare Fall zeigt schon, dass die Voraussetzung " $\varphi(M)$ punktweise beschränkt" nicht zu " M punktweise beschränkt abgeschwächt werden kann, da dann die Voraussetzung X Banachraum durch X normierter Raum ersetzt werden könnte.

(4) Analog zu Satz 4 kann man den folgenden Spezialfall von Satz 3 zeigen:

> Vor.: Z, Y normierte Räume, $X \subseteq Z$, X beschränkt, $\mathcal{A} = \{X\}$, $M \subseteq C_{\mathcal{A}}(X, Y)$, $\varphi(M)$ punktweise beschränkt.
>
> Beh.: M gleichmässig beschränkt.

4. Verallgemeinerung von Satz 3 für endlichdimensionale Bildräume.

Zum Abschluss wollen wir zeigen, dass im Spezialfall $\dim(Y) < \infty$ Satz 3 mit Hilfe des Satzes von Mackey verschärft werden kann. Da Y l.k.l.H. ist, kann o.B.d.A.

$Y = \mathbb{K}^n$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ angenommen werden.

Satz 5.

Vor.: $X \neq \Phi$ Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Pot}(X)$ erfüllt (A1) - (A3), $E \in F_{\mathcal{A}}(X, \mathbb{K})$, E trennt X, $M \subseteq B_E(X, \mathbb{K}^m)$, $\varphi(M)$ punktweise beschränkt.

Beh.: M ist bez. $T_{\mathcal{A}}(\mathbb{K}^m)$ beschränkt.

Beweis: Sei $(f_1, \dots, f_m)$ Koordinatendarstellung von f. Wir zeigen zuerst, dass die Biadjungierte $f'' : E' \longrightarrow \mathbb{K}^m$ eines Elements $f \in B_E(X, \mathbb{K}^m)$ durch $e' \longmapsto (\langle f_1, e' \rangle, \dots, \langle f_m, e' \rangle)$ gegeben ist.
Nach Definition 3 ist $f' : \mathbb{K}^m \longrightarrow E$ die folgende Abbildung:

$(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \longmapsto \sum_{1 \leq i \leq m} \varphi_i f_i$ falls $(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \mathbb{K}^m$ ist.

Sei $(\psi_1, \dots, \psi_m)$ Koordinatendarstellung von f'', so ist nach Definition der Biadjungierten:

$\sum_{1 \leq i \leq m} \varphi_i \langle f_i, e' \rangle = \sum_{1 \leq i \leq m} \varphi_i \psi_i(e')$ für alle $(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \mathbb{K}^m$.

Also ist $\psi_i(e') = \langle f_i, e' \rangle$ für $1 \leq i \leq m$.

Verwendung dieses Ergebnisses ergibt: $\varphi(M)$ punktweise beschränkt, genau dann, wenn gilt:

$\bigwedge_{e' \in E'} \bigwedge_{1 \leq i \leq m} \sup_{f \in M} |\langle f_i, e' \rangle| < \infty$. Das bedeutet aber:

$\bigwedge_{1 \leq i \leq m} \{f_i \mid f \in M\}$ $\sigma(E, E')$ beschränkt. Also ist nach dem Satz von Mackey $\{f_i \mid f \in M\}$ für $1 \leq i \leq m$ $T_{\mathcal{A}}(\mathbb{K})$

beschränkt. Da die Topologie auf $\mathbb{K}^n$ die von der Topologie auf $\mathbb{K}$ erzeugte Produkttopologie ist, folgt: $\mathcal{M}$ ist bez. $T_{\mathcal{A}}(\mathbb{K})^n$ beschränkt.

<u>Bemerkung</u>.

Im Spezialfall $n = 1$ ist $E = B_E(X, \mathbb{K})$. Dann ergeben die Überlegungen des vorigen Beweises, dass " $\varphi(\mathcal{M})$ punktweise beschränkt" und " $\mathcal{M}$ $\sigma(E, E')$ beschränkt" äquivalente Aussagen sind. Satz 5 geht also im Spezialfall $n = 1$ in den Satz von Mackey über.

Literaturverzeichnis

[1] BATT J.: Nonlinear compact mappings and their adjoint, Math.Ann.189(1970),5-25.

[2] BOURBAKI N.: Éléments de Mathématique,Livre III,Topologie générale, Chap.10, Espaces fonctionnelles, Hermann,Paris,1967.

[3] BOURBAKI N.: Éléments de Mathématique,Livre V, Espaces vectoriels topologiques, Chap.III - V,Hermann, Paris 1967.

[4] HETZER G.: Untersuchung einer Klasse nicht linearer Operatoren über deren linearen Adjungierten und die Theorie der linearen Operatoren, Dissertation,Aachen 1972.

[5] HETZER G.: Sätze vom Banach-Steinhaus Typ für eine Klasse nichtlinearer Operatoren (erscheint demnächst).

[6] KÖTHE G.: Topologische lineare Räume I, Springer,Berlin-Heidelberg-New York,zweite Auflage,1966.

Lehrstuhl C für Mathematik
Templergraben 55
Aachen
B R D

(Oblatum 20.8.1973)