Osvald Demuth; L. Němečková

О конструктивных аналогах свойств (N) и (S)

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 14 (1973), No. 4, 565--582

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105511

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

14,4 (1973)

О КОНСТРУКТИВНЫХ АНАЛОГАХ СВОЙТСВ ($\mathcal{N}$) и ($\mathcal{S}$)

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Л. НЕМЕЧКОВА, Прага

Содержание: В настоящей заметке исследуются конструктивные аналоги свойства ($\mathcal{N}$), введенного Н.Н. Лузиным (см. [2], стр. 224), и свойства ($\mathcal{S}$), введенного С. Банахом (см. [2], стр. 282).

Ключевые слова: конструктивная функция, свойства ($\mathcal{N}$) и ($\mathcal{S}$), функция ограниченной вариации, абсолютно непрерывная функция, суперпозиция функций.

AMS, Primary: 02E99 Ref. Ž. 2.664.2

Secondary: 28A10

В следующем мы пользуемся определениями, обозначениями и результатами из [6],[7] и [13] и определением конструктивного пространства c_0 из [5], стр. 396.

Сначала мы займемся свойством ($\mathcal{S}$), определенным в [13].

Замечание 1. 1) Пусть f функция, $0 \le f \le 1$, $\{\mathfrak{M}^1_n\}_n$, $\{\mathfrak{M}^2_n\}_n$, $\{\mathfrak{N}^1_n\}_n$, $\{\mathfrak{N}^2_n\}_n$ и $\{\mathfrak{M}_n\}_n$ элементы пространства $\mathcal{M}$, а m НЧ. Тогда

а) $\sigma(f, \{\Lambda\}_n, \{\Lambda\}_n)$ и

$$(\forall x (x \in \{\mathfrak{M}^1_n\}_n \equiv x \in \{\mathfrak{M}^2_n\}_n) \,\&\, \forall i (1 \le i \le 2 \supset \sigma(f, \{\mathfrak{M}^i_n\}_n, \{\mathfrak{N}^i_n\}_n)) \supset (\{\mathfrak{N}^1_n\}_n = \{\mathfrak{N}^2_n\}_n) \,\&\, \wp_M(\{\mathfrak{N}^1_n\}_n \sqcap \{\mathfrak{N}^2_n\}_n) = 0),$$

б) если $\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) < \dfrac{1}{2^{m+1}}$, то для последовательности комплексов $\{\mathfrak{M}_n^0\}_n$, где
$\forall n((1 \leq n \leq m \supset \mathfrak{M}_n^0 \rightleftarrows \Lambda) \,\&\, (m < n \supset \mathfrak{M}_n^0 \rightleftarrows \mathfrak{M}_{n+1}))$,
очевидно выполнено $\{\mathfrak{M}_n^0\}_n \in \mathrm{M} \,\&\, \forall x\, (x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \equiv x \in$
$\in \{\mathfrak{M}_n^0\}_n)$.

2) Существует алгорифм φ_0 , применимый к всякой паре элементов множества $\mathrm{M} - \{\mathfrak{M}_n\}_n \,\square\, \{\mathfrak{N}_n\}_n$ и выдающий по ней КДЧ, причем выполнено $(\forall n\, (\mathfrak{M}_n = \mathfrak{N}_n) \supset$
$\supset \varphi_0(\{\mathfrak{M}_n\}_n \,\square\, \{\mathfrak{N}_n\}_n) = 0) \,\&\, (\neg \forall n\, (\mathfrak{M}_n = \mathfrak{N}_n) \supset$
$\supset \varphi_0(\{\mathfrak{M}_n\}_n \,\square\, \{\mathfrak{N}_n\}_n) = \dfrac{1}{\mu k\, (\neg(\mathfrak{M}_k = \mathfrak{N}_k))})$.

Легко доказать, что φ_0 - метрика на множестве M и что (M, φ_0) - полное сепарабельное метрическое пространство.

Теорема 1. Пусть f функция, $0 \leq f \leq 1$ и пусть для всякого $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in \mathrm{M}$ существует $\{\mathfrak{N}_n\}_n \in \mathrm{M}$ такое, что $\sigma(f, \{\mathfrak{M}_n\}_n, \{\mathfrak{N}_n\}_n)$. Тогда f обладает свойством (S) .

Доказательство. Согласно конструктивному пониманию математических суждений и нашим предположениям существует алгорифм $\mathfrak{U}$, применимый к всякому $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in \mathrm{M}$ и выдающий по нему элемент пространства M , причем выполнено $\sigma(f, \{\mathfrak{M}_n\}_n, \mathfrak{U}\llcorner\{\mathfrak{M}_n\}_n\lrcorner)$. Согласно замечанию 1 $\mathfrak{U}$ является алгорифмическим оператором из полного сепарабельного метрического пространства (M, φ_0) в $(\mathrm{M}, \varphi_{\mathrm{M}})$, применимым к всякому элементу из M . Мы используем теорему

Г.С. Цейтина ([3], стр. 301) и получим, что $\mathfrak{A}$ является непрерывным оператором.

Пусть k НЧ. Тогда существует НЧ m_k такое, что для всякого $\{\mathfrak{A}_n\}_n \in M$, $\rho_0(\{\Lambda\}_n \square \{\mathfrak{A}_n\}_n) < \frac{1}{m_k}$, верно $\rho_M(\mathfrak{A}_L\{\Lambda\}_{n\lrcorner} \square \mathfrak{A}_L\{\mathfrak{A}_n\}_{n\lrcorner}) < \frac{1}{k}$, т.е. $\mu(\mathfrak{A}_L\{\mathfrak{A}_n\}_{n\lrcorner}) < \frac{1}{k}$ (см. замечание 1). Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$, $\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) < \frac{1}{2^{m_k+1}}$. Тогда согласно замечанию 1 существует $\{\mathfrak{M}_n^0\}_n \in M$ такое, что

$$\rho_0(\{\Lambda\}_n \square \{\mathfrak{M}_n^0\}_n) < \frac{1}{m_k} \;\&\; \mathfrak{A}_L\{\mathfrak{M}_n\}_{n\lrcorner} = \mathfrak{A}_L\{\mathfrak{M}_n^0\}_{n\lrcorner}$$

и, следовательно, верно $\mu(\mathfrak{A}_L\{\mathfrak{M}_n\}_{n\lrcorner}) < \frac{1}{k}$.

Итак, мы доказали $\mathcal{S}(f, k, 2^{m_k+1})$ (см.[13], определение 1).

<u>Теорема 2</u>. Пусть f равномерно непрерывная функция, $0 \leq f \leq 1$. Тогда f обладает свойством (S) в том и только том случае, если существует возрастающая последовательность НЧ $\{l_k\}_k$ такая, что для всякого НЧ k и любой системы рациональных сегментов, содержащихся в $0 \Delta 1$, $-\{a_i \Delta b_i\}_{i=1}^{b}$ выполнено

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{b} |a_i \Delta b_i| < \frac{1}{2^{l_k}} \supset \mu(\bigcup_{i=1}^{b} \langle M, f \rangle_L a_i \Delta b_i) < \frac{1}{2^k}.$$

<u>Доказательство</u>. Ввиду определения свойства (S) и свойств алгорифма $\langle M, f \rangle$ (см.[13], замечание 2) нам достаточно ограничиться следующим.

Пусть $\{l_k\}_k$ возрастающая последовательность НЧ такая, что для любых НЧ k и системы рациональных сегментов, содержащихся в $0 \Delta 1$, $-\{a_i \Delta b_i\}_{i=1}^{p}$ верно (1).

а) Очевидно, для всякого НЧ k и S-множества $\mathcal{G}$ меры меньшей чем $\dfrac{1}{2^{l_{k+1}}}$ существует S-множество $\mathcal{G}_1$ меры меньшей чем $\dfrac{1}{2^{k}}$ такое, что $\forall x\,(x \in \mathcal{G} \supset f(x) \in \mathcal{G}_1)$.

б) Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in \mathbb{M}$. Мы построим последовательность комплексов $\{\mathfrak{M}_n^1\}_n$ такую, что

$$\forall n\,(\mathfrak{M}_n^1 \rightleftharpoons (\mathfrak{M}_{l_{n+2}+2} \cap \mathfrak{M}_{l_{n+2}+3} \ldots \cap \mathfrak{M}_{l_{n+3}+1})) .$$

Тогда $\forall x\,(x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \equiv x \in \{\mathfrak{M}_n^1\}_n)$ и для всякого НЧ n верно

$$|\Delta(\mathfrak{M}_n^1, \mathfrak{M}_{n+1}^1)| \leq \sum_{i=l_{n+2}+2}^{l_{n+4}} |\Delta(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_{i+1})| < \frac{1}{2^{l_{n+2}+1}} . \tag{2}$$

Следовательно, $\{\mathfrak{M}_n^1\}_n \in \mathbb{M}$.

Пусть n НЧ и пусть $\mathfrak{M}_n^1 \rightleftharpoons \overset{n}{a}_1 \curlyvee \overset{n}{a}_2 \ldots \curlyvee \overset{n}{a}_{2j_n}$, где $0 \leq j_n$.

α) Если $j_n = 0$, мы определим $\mathcal{H}_n \rightleftharpoons \Lambda$.

β) Если $j_n > 0$, мы построим комплекс $\mathcal{H}_n$ такой, что

$$\forall i y\,(1 \leq i \leq j_n \;\&\; y \in \langle \mathbb{M}, f \rangle \llcorner \overset{n}{a}_{2i-1} \Delta \overset{n}{a}_{2i} \lrcorner \supset y \in \mathcal{H}_n) \;\&$$
$$(0 \leq |\mathcal{H}_n| - \mu(\bigcup_{i=1}^{j_n} \langle \mathbb{M}, f \rangle \llcorner \overset{n}{a}_{2i-1} \Delta \overset{n}{a}_{2i} \lrcorner) < \frac{1}{2^{n+2}}) .$$

Тогда для всякого НЧ m верно $\forall x(x \in \mathfrak{M}_m^1 \,\&\, 0 < f(x) < 1 \supset$ $\supset f(x) \in \mathfrak{N}_m)$ и ввиду (2) выполнено $|\Delta(\mathfrak{N}_m, \mathfrak{N}_{m+1})| < \frac{1}{2^m}$. Следовательно, $\{\mathfrak{N}_m\} \in M$ и $\forall x(x \in \{\mathfrak{M}_m\}_m \,\&\, 0 < f(x) < 1 \supset f(x) \in \{\mathfrak{N}_m\}_m)$.

Ввиду сказанного и а) легко доказать, что выполнено $\sigma(f, \{\mathfrak{M}_m\}_m, \{\mathfrak{N}_m\}_m)$.

Остается применить теорему 1.

<u>Определение</u>. 1) Скажем, что функция f, $0 \leq f \leq 1$, обладает свойством $(N)^0$, если для всякого $\{\mathfrak{M}_m\}_m \in M$, $\mu(\{\mathfrak{M}_m\}_m) = 0$ существует $\{\mathfrak{N}_m\}_m \in M$ такое, что $\sigma(f, \{\mathfrak{M}_m\}_m, \{\mathfrak{N}_m\}_m) \,\&\, \mu(\{\mathfrak{N}_m\}_m) = 0$.

2) Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathfrak{M}$ комплекс, $\mathfrak{M} \mathrel{\boldsymbol{I}} a_1 \gamma a_2 \ldots$ $\ldots \gamma a_{2j}$, где $0 \leq j$, а x КДЧ. Тогда мы посредством $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathfrak{M}, x)$ обозначим: $0 \leq x$ и если $0 < j$ и $\{x_i\}_{i=1}^{j}$ и $\{y_i\}_{i=1}^{j}$ любые системы КДЧ такие, что $\forall i\,(1 \leq i \leq j \supset a_{2i-1} < x_i < y_i < a_{2i})$, то существует система дизъюнктных рациональных сегментов $\{c_\ell \Delta d_\ell\}_{\ell=1}^{s}$, для которй выполнено $\sum_{\ell=1}^{s} |c_\ell \Delta d_\ell| < x$ и $\forall i\,(1 \leq i \leq j \supset$ $\supset \exists \ell\,(1 \leq \ell \leq s \,\&\, \mathcal{F}(x_i) \in c_\ell \nabla d_\ell \,\&\, \mathcal{F}(y_i) \in c_\ell \nabla d_\ell))$.

3) Скажем, что функция $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$, если для всякого $\{\mathfrak{M}_m\}_m \in M$, $\mu(\{\mathfrak{M}_m\}_m) = 0$ существует последовательность КДЧ $\{\varkappa_m\}_m$ такая, что $\forall m\,(\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathfrak{M}_m, \varkappa_m)) \,\&\, (\varkappa_m \xrightarrow[m \to \infty]{} 0)$.

<u>Замечание 2</u>. Определение свойства $(N)^0$ прямо отве-

чает определению классического свойства (N). Оказывается, что для всяких функции f и покрытия Φ таких, что $0 \leq f \leq 1$ и $f = f/\Phi$, т.е. $\forall k x (x \in \Phi_k \supset f(x) =$

$$= f(\Im_l(\Phi_k)) + \frac{x - \Im_l(\Phi_k)}{|\Phi_k|} \cdot (f(\Im_m(\Phi_k)) - f(\Im_l(\Phi_k)))) ,$$

f обладает свойством $(N)^0$. Таким образом, в общем случае свойство $(N)^0$ говорит лишь о локальных свойствах функции. Например, согласно замечанию 7 из [10] существуют возрастающая на $0 \Delta 1$ функция f и регулярное покрытие Ψ такие, что $0 \leq f \leq 1 \mathbin{\&} \alpha(f) \mathbin{\&} f = f/\Psi$ и вместе с тем f не обладает свойством $\mathcal{A}$ (ср. с теоремой 6.7 из [2], стр. 227). Итак, $(N)^0$ не является пригодным конструктивным аналогом свойства (N). Поэтому мы ввели в рассмотрение свойство $(N)^*$. Ниже будет показано, что $(N)^*$ равносильно (S). Но это естественно ввиду теоремы 1 и классического результата Х. Радемахера, приведенного в [2] на стр. 224.

Заметим, что согласно определениям всякая функция f, $0 \leq f \leq 1$, обладающая свойством (S), обладает и свойством $(N)^0$.

<u>Замечание 3</u>. 1) Функция $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$ тогда и только тогда, когда $-\mathcal{F}$ обладает этим свойством.

2) Равномерно непрерывная функция $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ (см. определение 3 из [13]) обладает этим свойством.

Легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 1</u>. Функция $\mathcal{F}$ является равномерно непрерывной тогда и тольло тогда, когда верно

(3) $\forall k \neg\neg \exists l \forall xy (|x-y| < \frac{1}{l} \supset |\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)| < \frac{1}{k})$

и для всякого рационального сегмента $c \Delta d$, $c \Delta d \subseteq 0 \Delta 1$, существует КДЧ w, являющееся колебанием функции $\mathcal{F}$ на $c \Delta d$.

Теорема 3. Пусть функция $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$. Тогда $\mathcal{F}$ равномерно непрерывна и обладает свойством (S).

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ функция, обладающая свойством $(N)^*$.

1) Мы при помощи леммы 1 докажем, что $\mathcal{F}$ является равномерно непрерывной.

а) Пусть k НЧ. Допустим, что существует последовательность рациональных сегментов $\{c_m \Delta d_m\}_m$ такая, что

$$\forall m (0 \leq c_m < d_m \leq 1 \,\&\, |c_m \Delta d_m| < \frac{1}{2^{m+1}} \,\&\, |\mathcal{F}(d_m) - \mathcal{F}(c_m)| > \frac{1}{k+1}).$$

Тогда $\{c_m \gamma d_m\}_m \in M$, $\mu(\{c_m \gamma d_m\}_m) = 0$ и, следовательно, мы на основании того, что $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$, получаем $|\mathcal{F}(d_m) - \mathcal{F}(c_m)| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$.

Таким образом, ввиду непрерывности функции $\mathcal{F}$ (см. теорему 3 из [3]) верно (3).

б) Пусть c и d РЧ, $0 \leq c < d \leq 1$. Мы для всякого НЧ m определим

$$x_m \rightleftharpoons \max_{0 \leq i \leq 2^{m+1}} \mathcal{F}(c + \frac{i}{2^{m+1}} \cdot (d - c)).$$

Тогда существует последовательность рационалных сегментов $\{P_m\}_m$ такая, что $\forall m (\exists i (1 \leq i \leq 2^{m+1} \,\&\, \ni_m (P_m) =$

$= c + \frac{i}{2^{m+1}} \cdot (d-c)) \,\&\, |P_m| = \frac{1}{2^{m+1}} \cdot |c \Delta d| \,\&\, (\mathcal{F}(\mathfrak{Э}_n(P_m)) >$

$> x_m - \frac{1}{2^m} \vee \mathcal{F}(\mathfrak{Э}_n(P_m)) > x_m - \frac{1}{2^m}))$.

Пусть для любых НЧ m и l — $\mathfrak{M}^{m,0} \rightleftharpoons \Lambda$, а $\mathfrak{M}^{m,l}$ комплекс такой, что для всякого иррационального КДЧ x верно

$$x \in \mathfrak{M}^{m,l} \equiv \exists j\, (1 \leq j \leq l \,\&\, x \in P_{m+j}) .$$

Пусть V множество всех последовательностей комплексов $\{\mathcal{H}_m\}_m$ таких, что $\forall m \exists i\, (0 \leq i \,\&\, \mathcal{H}_m \asymp \mathfrak{M}^{m,i})$. Тогда верно $(\{\mathcal{H}_m\}_m \in V \supset \{\mathcal{H}_m\}_m \in M \,\&\, \mu(\{\mathcal{H}_m\}_m) = 0)$, (V, φ_0) полное сепарабельное метрическое пространство и согласно нашим предположениям существуют алгорифмы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_1$ такие, что для всяких $\{\mathcal{H}_m\}_m \in V$, НЧ m и ЦЧ j_m, $0 \leq j_m \,\&\, \mathcal{H}_m \asymp \mathfrak{M}^{m,j_m}$, $\mathcal{L}$ применим к $\{\mathcal{H}_m\}_m$ и выдает по нему элемент пространства c_0, $\mathcal{L}_1$ применим к паре $\{\mathcal{H}_m\}_m \square m$ и выдает по ней КДЧ, являющееся m-ным членом последовательности КДЧ, определенной элементом

$\mathcal{L}_\llcorner \{\mathcal{H}_m\}_{m\lrcorner}$, причем $\mathcal{L}_{1\llcorner} \{\mathcal{H}_m\}_m \square m_\lrcorner = x_{m+j_m} - x_m$.

Заметим, что $\{\Lambda\}_m \in V \,\&\, \forall m\, (\mathcal{L}_{1\llcorner} \{\Lambda\}_m \square m_\lrcorner = 0)$.

Пусть p НЧ. Согласно теореме Г.С. Цейтина ([3], стр. 301) существует НЧ q такое, что для всякого $\{\mathcal{H}_m\}_m \in$ $\in V$ верно

$$\varphi_0(\{\Lambda\}_m \square \{\mathcal{H}_m\}_m) < \frac{1}{q} \supset \varphi_{c_0}(\mathcal{L}_\llcorner \{\Lambda\}_{m\lrcorner} \square$$
$$\square\, \mathcal{L}_\llcorner \{\mathcal{H}_m\}_{m\lrcorner}) < \frac{1}{p} .$$

Пусть s и t НЧ, $q < s$. Мы определим

$\forall n ((\neg (n = s) \supset \mathfrak{N}_n \rightleftharpoons \mathfrak{M}^{n,0}) \& (n = s \supset \mathfrak{N}_n \rightleftharpoons \mathfrak{M}^{s,t}))$.

Тогда $\{\mathfrak{N}_n\}_n \in V$, $\rho_0(\{\Lambda\}_n \square \{\mathfrak{N}_n\}_n) < \frac{1}{q}$ и, следовательно, $|x_{s+t} - x_s| = \rho_{c_0}(\mathcal{L}_L \{\Lambda\}_{n\lrcorner} \square \mathcal{L}_L \{\mathfrak{N}_n\}_{n\lrcorner}) < \frac{1}{p}$.

Итак, последовательность КДЧ $\{x_m\}_m$ сходится и ее предел является супремумом множества $\wedge \lambda (\exists x (x \in c \Delta d \& \mathcal{F}(x) = \lambda))$.

Аналогично верно

$\exists y (\mathrm{Inf}(y, \wedge \lambda (\exists x (x \in c \Delta d \& \mathcal{F}(x) = \lambda))))$.

2) Согласно замечанию 3 функция $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ обладает свойством $(N)^*$.

Пусть W множество всех последовательностей комплексов $\{\mathfrak{M}_n\}_n$ таких, что $\forall n (|\mathfrak{M}_n| < \frac{1}{2^{n+1}})$. Тогда для всякого $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in W$ верно $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M \& \mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) = 0$ и (W, ρ_0) полное сепарабельное метрическое пространство. Согласно нашим предположениям и 1) существуют алгорифмы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}_1$ такие, что для всяких $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in W$ и НЧ m – $\mathcal{C}$ применим к $\{\mathfrak{M}_n\}_n$ и выдает по нему элемент пространства c_0, $\mathcal{C}_1$ применим к паре $\{\mathfrak{M}_n\}_n \square m$ и выдает по ней КДЧ, являющееся m -ым членом последовательности КДЧ, определенной элементом $\mathcal{C}_L \{\mathfrak{M}_n\}_{n\lrcorner}$, причем если $\mathfrak{M}_m \rightleftharpoons a_1^m \gamma a_2^m \ldots \gamma a_{2j_m}^m$ (где $0 \leq j_m$), то

$$\mathcal{C}_{1L} \{\mathfrak{M}_n\}_n \square m_\lrcorner = \mu(\bigcup_{i=1}^{j_m} \langle M, \mathcal{N}_{\mathcal{F}} \rangle_L a_{2i-1}^m \Delta a_{2i\lrcorner}^m).$$

Заметим, что $\{\Lambda\}_n \in W \& \forall m (\mathcal{C}_{1L} \{\Lambda\}_n \square m_\lrcorner = 0)$.

Пусть p НЧ. Согласно теореме Г.С. Цейтина существует

НЧ q такое, что для всякого $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in W$ выполнено

$$\rho_0(\{\Lambda\}_n \,\square\, \{\mathfrak{M}_n\}_n) < \frac{1}{q} \supset \rho_{C_0}(\mathcal{C}_\llcorner\{\Lambda\}_{n\lrcorner} \,\square\, \mathcal{C}_\llcorner\{\mathfrak{M}_n\}_{n\lrcorner}) < \frac{1}{p} .$$

Пусть $\{a_i \Delta b_i\}_{i=1}^{s}$ система рациональных сегментов, содержащихся в $0 \Delta 1$, $\sum_{i=1}^{s} |a_i \Delta b_i| < \frac{1}{2^{q+2}}$. Тогда ввиду сказанного выше выполнено $\mu(\bigcup_{i=1}^{s} \langle M, \mathcal{N}_{\mathcal{F}}\rangle_\llcorner a_i \Delta b_{i\lrcorner}) < \frac{1}{p}$.

3) Применив теорему 2, мы получаем, что $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ обладает свойством (S). Но тогда – по определению – функция $\mathcal{F}$ обладает свойством (S).

Ввиду теорем 2 и 3 и замечания 3 верны следующие утверждения. (Ср. теорему 7.4 из [2], стр. 284, замечание 1 и пример 2 из [13].)

<u>Теорема 4</u>. Функция $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$ тогда и только тогда, когда она равномерно непрерывна и обладает свойством (S).

<u>Теорема 5</u>. Функция $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$ в том и только том случае, если для всякой последовательности S_σ-множеств $\{\mathcal{G}^k\}_k$ такой, что для всякого НЧ k мера $\mathcal{G}^k$ меньше чем $\frac{1}{2^k}$ и $\mathcal{G}^{k+1} \subseteq \mathcal{G}^k \subseteq 0 \Delta 1$, существуют последовательности S_σ-множеств $\{\mathcal{Y}^k\}_k$ и КДЧ $\{\eta_k\}_k$ такие, что $\eta_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ и для всякого НЧ k и КДЧ η_k является мерой $\mathcal{Y}^k$ и $(\mathcal{Y}^{k+1} \subseteq \mathcal{Y}^k) \,\&\, \forall x (x \in \mathcal{G}^k \supset \mathcal{F}(x) \in \mathcal{Y}^k)$.

<u>Следствие</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ функции, обладающие свойством $(N)^*$. Тогда функция $\mathcal{G} * \mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$.

В связи с полученными результатами интересно заметить, что верно следующее утверждение.

Теорема 6. Для функции $\mathcal{F}$ выполнено $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ в том и только том случае, если для всякого S-множества $\{H_k\}_k$ сходится ряд $\sum_k |\mathcal{F}(\exists_n(H_k)) - \mathcal{F}(\exists_\ell(H_k))|$.

Лемма 2. Пусть f функция, $0 \le f \le 1$, а $\{G_m\}_m \in L_1$ такие, что f обладает свойством $(N)^*$ и для почти всех КДЧ y, $y \in 0\Delta 1$, существует КДЧ u, $0 \le u$ & $P(u, \{G_m\}_m, y)$, которое мажорирует число корней уравнения $f(x) = y$ на $0\Delta 1$. Тогда верно $\mathcal{A}(f)$.

Доказательство. Функция f является равномерно непрерывной и обладает свойством (S) (см. теорему 3) и, следовательно, согласно замечанию 2 из [13] существует алгорифм $\langle M, f\rangle$, обладающий описанными там свойствами. Заметим, что $0 \le \{G_m\}_m$.

Пусть p НЧ. Согласно [6],[9], лемме 1 из [11] и тому, что f обладает свойством (S), существуют НЧ m_p и q_p такие, что для любого $\{\mathfrak{M}_m\}_m \in M$ выполнено

$(\mu(\{\mathfrak{M}_m\}_m) < \frac{1}{m_p} \supset \int_{\{\mathfrak{M}_m\}_m} \{G_m\}_m < \frac{1}{p})$ и что верно

$\mathcal{S}(f, m_p, q_p)$. Мы докажем $\mathcal{A}(f, p, q_p)$.

Пусть $\{a_i \Delta b_i\}_{i=1}^{b}$ система неперекрывающихся рациональных сегментов, содержащихся в $0\Delta 1$, $\sum_{i=1}^{b} |a_i \Delta b_i| < \frac{1}{q_p}$.

Тогда ввиду $\mathcal{S}(f, m_p, q_p)$, свойств m_p и $\{G_m\}_m$ верно

$\mu(\bigcup_{i=1}^{b} \langle M, f\rangle_\llcorner a_i \Delta b_{i\lrcorner}) < \frac{1}{m_p}$, $\sum_{i=1}^{b} \chi[\langle M, f\rangle_\llcorner a_i \Delta b_{i\lrcorner}] \le \{G_m\}_m$

и

$$\sum_{i=1}^{p} |f(b_i) - f(a_i)| \le \int_0^1 \sum_{i=1}^{p} \chi[\langle M, f\rangle_L a_i \triangle b_{i\lrcorner}] =$$

$$= \int_{\bigcup_{i=1}^{p} \langle M,f\rangle_L a_i \triangle b_{i\lrcorner}} \sum_{i=1}^{p} \chi[\langle M,f\rangle_L a_i \triangle b_i] \le \int_{\bigcup_{i=1}^{p} \langle M,f\rangle_L a_i \triangle b_{i\lrcorner}} \{G_n\}_n < \frac{1}{p} .$$

Мы на основании этой леммы, теоремы 2 и замечания 3 из [13] сразу получаем следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть $\mathcal{F}$ функция ограниченной вариации (на $0 \triangle 1$), которая обладает свойством $(N)^*$. Тогда верно $\mathcal{a}(\mathcal{F})$.

Отсюда мы ввиду [6],[9], замечания 1 из [13], теоремы 3 из [8] и теоремы 4 получаем:

Следствие. Функция $\mathcal{F}$ является абсолютно непрерывной тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ является функцией ограниченной вариации на $0 \triangle 1$, обладает свойством $(N)^*$ и существует $\{F_n\}_n \in S$ такое, что для почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$ верно $\exists u (P(u, \{F_n\}_n, x) \,\&\, D(u, \mathcal{F}, x))$.

Замечание 4. а) Пусть $\mathcal{F}$ функция, обладающая свойством $(N)^*$. Тогда выполнено $\mathcal{a}_{k\,l}(\mathcal{F})$, т.е. $\forall k \neg\neg \exists l\, \mathcal{a}(\mathcal{F}, k, l)$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ не может не быть функцией слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$.

б) Можно построить функцию $\mathcal{F}$ слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$, которая обладает свойством $(N)^*$ и вместе с тем верно $\neg\, \mathcal{a}(\mathcal{F})$.

Лемма 3. Пусть f и g равномерно непрерывные функции, $\xi \triangle \eta$ сегмент, $\xi \triangle \eta \le 0 \triangle 1$, а $\mathcal{G}$ S_σ -множество, такие, что функция g является неубывающей на $\xi \triangle \eta$ и

$$\forall x (x \in \xi \triangledown \eta \ \& \ \neg (f(x) \in \mathcal{Y}) \supset$$

$$\supset \neg\neg \exists u v (D(u, f, x) \ \& \ D(v, g, x) \ \& \ u \leq v)) .$$

Тогда

(4) $f(\eta) - f(\xi) \leq$

$$\leq \nu \langle \mathcal{Y} \rangle_{\llcorner} \min (f(\xi), f(\eta)) \triangle \max (f(\xi), f(\eta))_{\lrcorner} + g(\eta) - g(\xi).$$

Доказательство. Допустим, что (4) неверно. Тогда $f(\xi) < f(\eta)$ и согласно лемме 2 из [13] и замечанию 2 из [12] можно построить последовательность КДЧ $\{z_k\}_k$, S_6-множество $\{K_m\}_m$ и КДЧ ε, v_1 и w_1 такие, что $0 < \varepsilon \ \&$ $\& \ \mathcal{Z}(f, \{z_k\}_k)$, сегменты последовательности $\{K_m\}_m$ дизъюнктны и содержатся в

$f(\xi) \triangle f(\eta)$, $\partial_l (K_1) = f(\xi) \ \& \ \partial_m (K_2) = f(\eta) \ \& \ \forall y (((y \in \mathcal{Y} \vee$ $\exists a (y = a) \vee \exists k (y = z_k)) \ \& \ f(\xi) < y < f(\eta)) \supset$ $\supset \exists m (\partial_l (K_m) < y < \partial_m (K_m))) \ \& \ \xi < v_1 < w_1 < \eta \ \& \ f(v_1) =$ $= \partial_m (K_1) \ \& \ f(w_1) = \partial_l (K_2)$, $f(\eta) - f(\xi) > \varepsilon \cdot |\xi \triangle \eta| +$ $+ \nu \langle \{K_m\}_m \rangle_{\llcorner} f(\xi) \triangle f(\eta)_{\lrcorner} + g(\eta) - g(\xi)$

и, следовательно, $f(w_1) - f(v_1) > \varepsilon \cdot |v_1 \triangle w_1| +$ $+ \nu \langle \{K_m\}_m \rangle_{\llcorner} f(v_1) \triangle f(w_1)_{\lrcorner} + g(w_1) - g(v_1)$.

Пусть m НЧ и пусть уже построены КДЧ v_m и w_m такие, что $\xi < v_m < w_m < \eta \ \& \ \exists k l (f(v_m) = \partial_m (K_k) \ \& \ f(w_m) = \partial_l (K_l))$ и

(5) $f(w_m) - f(v_m) > \varepsilon \cdot |v_m \triangle w_m| + \nu \langle \{K_m\}_m \rangle$

$${}_{\llcorner} f(v_m) \triangle f(w_m)_{\lrcorner} + g(w_m) - g(v_m) .$$

Тогда можно построить наименьшее НЧ p такое, что сегмент K_p содержится внутри сегмента $f(v_m)\Delta f(w_m)$. Согласно лемме 2 из [13] и теореме 1.3 из [4] существуют КДЧ y_1 и y_2 и слово P такие, что $v_m < y_1 < y_2 < w_m \,\&\, f(y_1) =$
$= \mathfrak{Э}_л(K_p) \,\&\, f(y_2) = \mathfrak{Э}_п(K_p) \,\&\, (P \equiv \Lambda \supset f(w_m) - f(y_2) > \varepsilon \cdot$
$\cdot |y_2 \Delta w_m| + \nu\langle\{K_n\}_n\rangle \llcorner f(y_2)\Delta f(w_m)\lrcorner + g(w_m) - g(y_2)) \,\&$
$\&\, (\neg(P \equiv \Lambda) \supset f(y_1) - f(v_m) > \varepsilon \cdot |v_m \Delta y_1| +$
$+ \nu\langle\{K_m\}_n\rangle \llcorner f(v_m)\Delta f(y_1)\lrcorner + g(y_1) - g(v_m))$.

Мы определим $(v_{m+1} \rightleftharpoons y_2) \,\&\, (w_{m+1} \rightleftharpoons w_m)$, если $P \equiv \Lambda$, а $(v_{m+1} \rightleftharpoons v_m) \,\&\, (w_{m+1} \rightleftharpoons y_1)$, если $\neg(P \equiv \Lambda)$.

Итак, нами построена последовательность сегментов $\{v_m \Delta w_m\}_m$ такия, что для всякого НЧ m выполнено $\xi < v_m \leq v_{m+1} < w_{m+1} \leq w_m < \eta$,(5) и сегмент $f(v_m)\Delta f(w_m)$ не перекрывается с сегментами системы $\{K_i\}_{i=1}^{m+1}$. Следовательно, ввиду свойств S_σ-множества $\{K_n\}_n$ существуют КДЧ y и x, для которых верно

$$(f(v_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} y) \,\&\, (v_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x) \,\&\, f(\xi) < y < f(\eta) \,\&$$

$$\&\, \neg(y \in \mathcal{G}) \,\&\, \xi < x < \eta \,\&\, f(x) = y \,\&\, (|v_m \Delta w_m| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0) .$$

Пусть u и v КДЧ такие, что $D(u,f,x) \,\&\, D(v,g,x) \,\&$ $u \leq v$. Тогда мы ввиду того, что для всякого НЧ m верно (5), имеем $u \geq \varepsilon + v > v$, что невозможно.

Двойное отрицание можно с неравенства снять и мы, таким образом, доказали (4).

Теорема 8 (ср.[2], стр. 226). Пусть $\mathcal{F}$ функция, обладающая свойством $(\mathcal{N})^*$, и пусть для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно $\neg\neg \exists u (\mathrm{D}(u, \mathcal{F}, x) \,\&\, 0 \leq u)$. Тогда $\mathcal{F}$ является неубывающей.

Доказательство. Ввиду замечания 3 и теоремы 5 достаточно определить $f \rightleftharpoons - \mathcal{F}$, в качестве g взять постоянную функцию и применить лемму 3.

Теорема 9 (ср.[2], стр. 228). Функция $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна (на $0 \Delta 1$) в том и только том случае, если $\mathcal{F}$ обладает свойством $(\mathcal{N})^*$ и существует $\{F_n\}_n \in L_1$ такое, что для почти всех КДЧ x на $0 \Delta 1$ выполнено

$$(6) \qquad \exists u (\mathrm{P}(u, \{F_n\}_n, x) \,\&\, \neg\neg \mathrm{D}(u, \mathcal{F}, x)) .$$

Доказательство. Ввиду следствия теоремы 7 и теоремы 2 из [6] ясно, что абсолютно непрерывная функция обладает перечисленными свойствами.

Пусть $\mathcal{F}$ функция, а $\{F_n\}_n \in L_1$ такие, что $\mathcal{F}$ обладает свойством $(\mathcal{N})^*$ и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно (6). Согласно [6] и [9] существуют абсолютно непрерывные функции g и φ такие, что $\forall x (0 \leq x \leq 1 \supset g(x) = \int_0^x |\{F_n\}_n| \,\&\, \varphi(x) = \int_0^x \{F_n\}_n)$, g является неубывающей, верно $\mathfrak{a}(g) \,\&\, \mathfrak{a}(\varphi)$ и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $\exists u (\mathrm{P}(u, \{F_n\}_n, x) \,\&\, \mathrm{D}(|u|, g, x) \,\&\, \mathrm{D}(u, \varphi, x) \,\&\, \neg\neg \mathrm{D}(u, \mathcal{F}, x) \,\&\, \neg\neg \mathrm{D}(-u, -\mathcal{F}, x))$.

Согласно теореме 5, замечанию 3 и лемме 3, где мы определим $f \rightleftharpoons \mathcal{F}$ (соотв. $f \rightleftharpoons - \mathcal{F}$), мы получаем

$\forall x y\,(0 \leq x < y \leq 1 \supset |\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)| \leq g(y) - g(x))$.

Но тогда $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ и, следовательно, $\mathcal{A}(\mathcal{F} - \varphi)$ и тем более функции $\mathcal{F} - \varphi$ и $\varphi - \mathcal{F}$ обладают свойством $(N)^*$. Кроме того для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $\neg\neg D(0, \mathcal{F} - \varphi, x)$. Согласно теореме 8 функция $\mathcal{F} - \varphi$ является постоянной. Таким образом, $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна.

Пример 1 (ср. [1], стр. 200). Можно построить функции f_1 и f_2 и $\{F_n\}_n \in S$ такие, что

а) для НЧ i, $1 \leq i \leq 2$, f_i является суперпозицией двух абсолютно непрерывных функций и, следовательно, f_i обладает свойствами $(N)^*$ и $(T_1)^*$; верно $Д(f_i, \{F_n\}_n)$ (определение см. в [10], стр. 688), $0 \leq f_i \leq 1$;

б) $f_1(0) = f_2(0) = 0 \,\&\, f_1(1) = 1 \,\&\, f_2(1) = \frac{1}{2}$, и, следовательно,

в) функция $f_1 - f_2$ не обладает свойством $(N)^*$.

При помощи леммы 3 можно доказать следующие утверждения.

Теорема 10. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\{\mathcal{G}^p\}_p$ последовательность S_σ-множеств, а $\{\varphi_p\}_p$ последовательность равномерно непрерывных функций, такие, что для всякого НЧ p мера $\mathcal{G}^p$ меньше чем $\frac{1}{2^p}$ и $\mathcal{G}^{p+1} \subseteq \mathcal{G}^p \,\&\, \forall x\,(x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg(\mathcal{F}(x) \in \mathcal{G}^p) \supset \neg\neg D(\varphi_p(x), \mathcal{F}, x))$. Тогда $\mathcal{F}$ обладает свойствами $(N)^*$ и $(T_1)^*$ (определение в [13]).

Следствие. Пусть $\mathcal{F}$ функция, обладающая свойством $(N)^*$, и пусть существует $\{G_n\}_n \in S$ такое, что для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно $\exists u\,(P(u, \{G_n\}_n, x) \,\&\, \neg\neg D(u, \mathcal{F}, x))$.

Тогда $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^*$.

Литература

[1] BARY N.: Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues, Math.Annalen 103(1930),185-248.

[2] SAKS S.: Theory of the Integral, New York,1937.

[3] ЦЕЙТИН Г.С.: Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах, Труды Мат.инст.им. В.А.Стеклова,т. LXVII (1962),295-361.

[4] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д.: Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, Труды Мат.инст.им.В.А.Стеклова, т.LXVII (1962), 385-457.

[5] КУЧЕРА А.: Достаточные условия нормируемости линейных операторов в конструктивной математике, Comment. Math.Univ.Carolinae 12(1971),377-399.

[6] ДЕМУТ О.: Пространства $L_{\varkappa}$ и S в конструктивной математике, Comment.Math.Univ.Carolinae 10(1969), 261-284.

[7] ДЕМУТ О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comment.Math.Univ.Carolinae 10(1969),463-492.

[8] ДЕМУТ О.: Об интегрируемости производных от конструктивных функций, Comment.Math.Univ.Carolinae 11(1970),667-691.

[9] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, Comment. Math.Univ.Caroline 11(1970),705-726.

[10] ДЕМУТ О.: Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации, Comment. Math.Univ.Carolinae12(1971),687-711.

[11] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие представимости конструктивных функций в виде суперпозиции абсолютно непрерывных функций, Comment.Math.Univ. Carolinae 13(1972),227-251.

[12] ДЕМУТ О.: О представимости равномерно непрерывных конструктувных функций, Comment.Math.Univ. Carolinae 14(1973),7-25.

[13] ДЕМУТ О., НЕМЕЧКОВА Л.: О конструктивном аналоге свойства (T_1) , Comment.Math.Univ.Carolinae 14(1973),421-439.

Matematicko-fyzikální fakulta

Karlova universita

Sokolovská 83, Praha 8

Československo

(Oblatum 25.6.1973)