Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth; L. Němečková

О конструктивном аналоге свойства (T_1)

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 14 (1973), No. 3, 421--439

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105500

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

14,3 (1973)

О КОНСТРУКТИВНОМ АНАЛОГЕ СВОЙСТВА (T_1).

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Л. НЕМЕЧКОВА, Прага

Содержание: В настоящей заметке вводится и исследуется конструктивный аналог свойства (T_1) введенного С. Банахом (см. [1], стр. 195).

Ключевые слова: Конструктивная функция, свойства (S) и (T_1), абсолютно непрерывная функция, функция ограниченной вариации, суперпозиция функций.

AMS: Primary 02E99 Ref. Ž. 2.644.2
Secondary 26A45, 26A72

В следующем мы пользуемся определениями, обозначениями и результатами из [4], [5] и [11].

В классической математике для функции f равномерно непрерывной на сегменте $0 \triangle 1$, $0 \leq f \leq 1$, верно следующее:

Если определить функцию $N(t)$ так, что для всякого действительного числа t, $0 \leq t \leq 1$, $N(t)$ равно числу корней на $0 \triangle 1$ уравнения $f(x) = t$, если это число конечно, а $N(t) = +\infty$ в другом случае, то f является функцией ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ тогда и только тогда, когда функция $N(t)$ интегрируема по Лебегу на $0 \triangle 1$ (см. [1], стр. 631).

В конструктивной математике аналогичное утверждение неверно.

Пример 1. Можно построить функции f, ψ и φ такие, что

а) $0 \le f \le 1 \& f(0) = 0 \& f(1) = 1 \& \forall x y (|f(y) - f(x)| \le 3 \cdot |y - x|)$,

б) для всякого КДЧ y, $0 < y < 1 \& (\exists a (y = a) \vee \neg \exists a (y = a))$, уравнение $f(x) = y$ имеет на $0 \Delta 1$ в точности три корня,

в) f не является функцией ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ и

г) ψ возрастает на $0 \Delta 1$, $\alpha(\psi)$ (см. [6]), φ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$, $0 \le \psi \le 1 \& 0 \le \varphi \le 1$ и верно $f = \psi * \varphi$.

Доказательство С. Банаха не сработало по той причине, что в конструктивной математике неверна теорема А. Лебега и, следовательно, и теорема Д.Ф. Егорова (см. определение 1 и замечание 2 из [11]). Из этого обстоятельства исходит определение свойства $(T_1)^*$, которое - как видно из полученных результатов - является пригодным аналогом свойства (T_1).

В большинстве утверждений мы ограничиваемся ради простоты рассмотрением равномерно непрерывных функций, значения которых содержатся в $0 \Delta 1$. Этим общность не теряется (см. замечание 4).

Определение 1. Пусть f и $\mathcal{F}$ функции, $0 \le f \le 1$.

1) Для $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ и $\{\mathfrak{N}_n\}_n \in M$ мы обозначим $\sigma(f, \{\mathfrak{M}_n\}_n, \{\mathfrak{N}_n\}_n)$ если выполнено $\forall x (x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \& \& 0 < f(x) < 1 \supset f(x) \in \{\mathfrak{N}_n\}_n)$ и для почти всех КДЧ y верно

$$y \in \{\mathfrak{N}_n\}_n \supset \exists x (x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \& f(x) = y).$$

2) Для НЧ k и ℓ мы обозначим $\mathcal{S}(f, k, \ell)$, если для всяких $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ и $\{\mathfrak{N}_n\}_n \in M$ выполнено

$\sigma(f, \{\mathfrak{M}_n\}_n, \{\mathfrak{N}_n\}_n) \ \& \ \mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) < \frac{1}{\ell} \supset$

$\supset \mu(\{\mathfrak{N}_n\}_n) < \frac{1}{k}$.

3) Скажем, что f обладает свойством (S), если

а) для всякого $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ существует $\{\mathfrak{N}_n\}_n \in M$ такое, что $\sigma(f, \{\mathfrak{M}_n\}_n, \{\mathfrak{N}_n\}_n)$ и

б) существует последовательность НЧ $\{\ell_k\}_k$, для которой верно $\forall k \ \mathcal{S}(f, k, \ell_k)$ (ср. [1], стр. 207).

4) Скажем, что $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^0$, если для почти всех КДЧ y не может не существовать ЦЧ j такое, что $0 \leq j$ и уравнение $\mathcal{F}(x) = y$ не имеет на сегменте $0 \vartriangle 1$ больше корней чем j .

<u>Замечание 1</u>. Пусть f функция, $0 \leq f \leq 1$.

а) Мы на основании леммы 1 из [9] знаем: если $\mathfrak{a}(f)$, то f обладает свойством (S) и верно $\forall k \ell (\mathfrak{a}(f, k+1, \ell) \supset$ $\supset \mathcal{S}(f, k, \ell))$.

б) Если функция f обладает свойством (S), то она равномерно непрерывна.

В классической математике всякая равномерно непрерывная функция обладающая свойством (S) имеет свойство (T_1) ([1], стр. 208). Следующие примеры показывают, что в конструктивной математике функции слабо ограниченной вариации, которые обладают свойством $\mathfrak{a}$ или даже удовлетворяют условию Липшица, могут не иметь свойство $(T_1)^0$.

Пример 2. Можно построить функцию f такую, что

$$0 \leq f \leq 1 \;\&\; f(0) = 0 \;\&\; f(1) = 1 \;\&\; \mathcal{A}(f)$$

и для всякого КДЧ y, $0 \leq y \leq 1$, существует последовательность КДЧ $\{x_k^y\}_k$ такая, что

$$(1)\quad \forall k\,(0 < x_k^y < 1 \;\&\; f(x_k^y) = y \;\&\; \forall \ell\,(\neg(k = \ell) \supset$$
$$\supset \neg(x_k^y = x_\ell^y)))\ .$$

Для функций удовлетворяющих условию Липшица такое случиться не может.

Лемма 1. Пусть f функция, $0 \leq f \leq 1$, а p и q НЧ, $\forall xy\,(|f(y) - f(x)| \leq p \cdot |y - x|)$.

Тогда не существует $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$, для которого было бы верно:

$\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) > \dfrac{1}{q}$ и для почти всех КДЧ y, $y \in \{\mathfrak{M}_n\}_n$, не может не существовать возрастающая система КДЧ $\{x_i^y\}_{i=1}^{p \cdot q}$ из $0 \Delta 1$, для которой выполнено $\forall i\,(1 \leq i \leq p \cdot q \supset f(x_i^y) = y)$.

С другой стороны имеет место следующее.

Пример 3. Можно построить функцию f такую, что $0 \leq f \leq$
$\leq 1 \;\&\; f(0) = 0 \;\&\; f(1) = 1 \;\&\; \forall xy\,(|f(y) - f(x)| \leq 3 \cdot |y - x|)$

и выполнено

а) для всякого $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$, $\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) < 1$, можно построить КДЧ y и последовательность КДЧ $\{x_k^y\}_k$ такие, что $0 < y < 1 \;\&\; \neg(y \in \{\mathfrak{M}_n\}_n)$ и верно (1);

б) ввиду а) и леммы 1 f не обладает свойством $(T_1)^0$ и множество тех КДЧ y, $0 \leq y \leq 1$, для которых уравнение

$z(x) = y$ имеет на $0 \Delta 1$ бесконечное число решений, не является измеримым по Лебегу, внешняя мера этого множества равна единице, а внутренняя нулю.

Легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 2</u>. Пусть f равномерно непрерывная функция. Тогда

а) можно построить последовательность КДЧ $\{x_k\}_k$ такую, что $\mathfrak{Z}(f, \{x_k\}_k$, где

$$\mathfrak{Z}(f, \{x_k\}_k) \rightleftharpoons (\forall a (a \in 0 \Delta 1 \supset \exists k (f(a) = x_k)) \,\&$$

$$\& \forall a b (0 \leq a < b \leq 1 \supset \exists k l (\langle I, f \rangle \llcorner a \Delta b \lrcorner = x_k \,\&$$

$$\& \langle S, f \rangle \llcorner a \Delta b \lrcorner = x_l)))$$

(см. замечание 1 из [9]);

б) для всякой последовательности КДЧ $\{x_k\}_k$ такой, что $\mathfrak{Z}(f, \{x_k\}_k)$, выполнено

$$\forall a b y (0 \leq a < b \leq 1 \,\&\, \neg \exists k (y = x_k) \supset$$

$$\supset (\exists x (x \in a \nabla b \,\&\, f(x) = y) \vee$$

$$\neg \exists x (x \in a \Delta b \,\&\, f(x) = y))) .$$

<u>Замечание 2</u>. Пусть f равномерно непрерывная функция, $0 \leq f \leq 1$. Тогда - очевидно - существует алгорифм $\langle M, f \rangle$ такой, что

а) $\langle M, f \rangle$ применим к всякому сегменту $v \Delta w$ и выдает по нему элемент пространства M ([5]), причем выполнено

$$\forall y (y \in \langle M, f \rangle \llcorner v \Delta w \lrcorner \equiv (0 < y < 1 \,\&\, y \in \langle \mathcal{O}, f \rangle \llcorner v \Delta w \lrcorner)) ;$$

б) для всяких РЧ a и b, $0 \le a < b \le 1$, иррационального КДЧ y из $0 \Delta 1$ и последовательности КДЧ $\{x_k\}_k$, $\mathfrak{X}(f, \{x_k\}_k)$, верно

$$\neg \exists k (y = x_k) \supset \exists i (P(i, \chi [\langle M, f \rangle_{\llcorner} a \Delta b_{\lrcorner}], y) \&$$

$$\& \; 0 \le i \le 1 \; \& \; (i = 1 \equiv \langle I, f \rangle_{\llcorner} a \Delta b_{\lrcorner} < y <$$

$$< \langle S, f \rangle_{\llcorner} a \Delta b_{\lrcorner} \equiv \exists x (x \in a \nabla b \; \& \; f(x) = y))) \; .$$

<u>Обозначения</u>. Пусть f равномерно непрерывная функция, $0 \le f \le 1$, $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ последовательность элементов пространства L_1, а $\{F_n\}_n \in S$. Тогда мы обозначим

а) $\mathcal{T}_1(f, \{\{F_n^m\}_n\}_m)$, если для всяких НЧ m, последовательности КДЧ $\{x_k\}_k$, $\mathfrak{X}(f, \{x_k\}_k)$, иррационального КДЧ y, $0 \le y \le 1 \; \& \; \neg \exists k (y = x_k)$, и КДЧ u выполнено

$$P(u, \{F_n^m\}_n, y) \equiv P(u, \sum_{i=1}^{2^m} \chi [\langle M, f \rangle_{\llcorner} \frac{i-1}{2^m} \Delta \frac{i}{2^m}{}_{\lrcorner}], y) \; ;$$

б) $\overline{\mathcal{T}_1}(f, \{F_n\}_m)$, если последовательность простых элементов L_1 - $\{\sum_{i=1}^{2^m} \chi [\langle M, f \rangle_{\llcorner} \frac{i-1}{2^m} \Delta \frac{i}{2^m}{}_{\lrcorner}]\}_m$ сходится в S к $\{F_n\}_n$.

<u>Определение 2</u>. Пусть f равномерно непрерывная функция, $0 \le f \le 1$. Скажем, что f обладает свойством $(T_1)^*$, если последовательность $\{\sum_{i=1}^{2^m} \chi [\langle M, f \rangle_{\llcorner} \frac{i-1}{2^m} \Delta \frac{i}{2^m}{}_{\lrcorner}]\}_m$ сходится в S.

<u>Замечание 3</u>. Пусть f равномерно непрерывная функция,

$0 \le f \le 1$, $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ последовательность элементов L_1, $\mathcal{T}_1(f, \{\{F_n^m\}_n\}_m)$, а $\{x_k\}_k$ последовательность КДЧ, $\not\approx(f, \{x_k\}_k)$. Тогда

1) а) для всякого иррационального КДЧ y, $0 \le y \le 1$ & & $\neg \exists k (y = x_k)$, существует неубывающая последовательность ЦЧ $\{j_m\}_m$ такая, что для всякого НЧ m верно $0 \le j_m$ & & $P(j_m, \{F_n^m\}_n, y)$, j_m является числом тех НЧ i, для которых выполнено

$$1 \le i \le 2^m \;\&\; \exists x\,(\frac{i-1}{2^m} < x < \frac{i}{2^m} \;\&\; f(x) = y), \quad \text{и}$$

$$j_m = 0 \equiv (y < \langle I, f\rangle_{\llcorner 0 \Delta 1 \lrcorner} \vee \langle S, f\rangle_{\llcorner 0 \Delta 1 \lrcorner} < y);$$

б) для всякого НЧ m верно $\int_0^1 \{F_n^m\}_n =$
$= \sum_{i=1}^{2^m} \langle \omega, f\rangle_{\llcorner \frac{i-1}{2^m} \Delta \frac{i}{2^m} \lrcorner}$ и ввиду а) $0 \le \{F_n^m\}_n \le \{F_n^{m+1}\}_n$;

в) f является функцией ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ тогда и только тогда, когда сходится последовательность КДЧ $\{\int_0^1 \{F_n^m\}_n\}_m$ (т.е. когда последовательность $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ сходится в L_1); выполнено

$$\forall x\,(Var(x, f, 0 \Delta 1) \equiv (\int_0^1 \{F_n^m\}_n \xrightarrow[m\to\infty]{} x)) \qquad \text{(см.[6])};$$

г) f является функцией слабо ограниченной вариации (на $0 \Delta 1$) тогда и только тогда, когда последовательность КДЧ $\{\int_0^1 \{F_n^m\}_n\}_m$ является ограниченной;

2) если f обладает свойством $(T_1)^*$, то сущест-

вует $\{F_n\}_n \in S$ такое, что $\overline{\mathcal{T}_1}(f, \{F_n\}_n)$ и $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ сходится почти равномерно к $\{F_n\}_n$;

3) если $\{F_n\}_n \in S$ такое, что $\overline{\mathcal{T}_1}(f, \{F_n\}_n)$, то для почти всех КДЧ y, $0 \leq y \leq 1$, существуют целое число j, НЧ m_0 и возрастающая система КДЧ $\{x_i\}_{i=1}^{j}$, для которых верно

$$0 \leq j \,\&\, P(j, \{F_n\}_n, y) \,\&\, \forall m\,(m_0 \leq m \supset P(j, \{F_n^m\}_n, y)) \,\&$$

$$\forall x\,((x \in 0 \triangle 1 \,\&\, f(x) = y) \equiv (0 < x < 1 \,\&\, \exists i\,(1 \leq i \leq j \,\&\, x = x_i))) .$$

<u>Определение 3</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, а g функция. Тогда

а) мы обозначим

$$\mathcal{N}_{\mathcal{F}} \rightleftharpoons \frac{1}{\sigma_0} \cdot (\mathcal{F} - \min(\langle I, \mathcal{F}\rangle_{\llcorner} 0 \triangle 1_{\lrcorner}, 0)) ,$$

$$g_{\mathcal{F}} \rightleftharpoons \frac{1}{\sigma_0} \cdot (g - \min(\langle I, \mathcal{F}\rangle_{\llcorner} 0 \triangle 1_{\lrcorner}, 0)) \quad \text{и}$$

$$^{\mathcal{F}}g \rightleftharpoons (\sigma_0 \cdot g + \min(\langle I, \mathcal{F}\rangle_{\llcorner} 0 \triangle 1_{\lrcorner}, 0)) , \text{ где}$$

$$\sigma_0 \rightleftharpoons \max(\langle S, \mathcal{F}\rangle_{\llcorner} 0 \triangle 1_{\lrcorner}, \langle \omega, \mathcal{F}\rangle_{\llcorner} 0 \triangle 1_{\lrcorner}, 1) ;$$

б) скажем, что $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^*$ (соотв. (S)), если $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ обладает этим свойством.

<u>Замечание 4</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, а g и φ функции. Тогда

а) функция $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ равномерно непрерывна, $0 \leq \mathcal{N}_{\mathcal{F}} \leq 1 \,\&$ $(0 \leq \mathcal{F} \leq 1 \supset \mathcal{N}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F})$;

б) что касается монотонности, абсолютной непрерывности, сингулярности функций, ограниченности вариации, свойств $\mathcal{A}$ и $\alpha - g$, ${}^{\mathcal{F}}g$ и $g_{\mathcal{F}}$ (соотв. $\mathcal{F}$ и $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$) функции одинакового типа;

в)
$$(\mathcal{N}_{\mathcal{F}} = g * \varphi) \equiv (\mathcal{F} = {}^{\mathcal{F}}g * \varphi) \ ,$$
$$(\mathcal{F} = g * \varphi) \equiv (\mathcal{N}_{\mathcal{F}} = g_{\mathcal{F}} * \varphi) \ .$$

Из сказанного ввиду следствия теоремы 2 из [11] и теоремы 6.10 из [2] мы сразу получаем следующие утверждения.

<u>Теорема 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, обладающая свойством $(T_1)^*$. Тогда для почти всех КДЧ y существуют ЦЧ $\dot{j}$, $0 \leq \dot{j}$, и возрастающая система КДЧ из $0 \triangledown 1$ – $\{x_i\}_{i=1}^{\dot{j}}$ такие, что

$$\forall x\, ((x \in 0 \vartriangle 1 \,\&\, \mathcal{F}(x) = y) \equiv \exists i\, (1 \leq i \leq \dot{j} \,\&\, x = x_i)) \ .$$

Следовательно, $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^0$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть f функция, $0 \leq f \leq 1$. Тогда

а) f является функцией ограниченной вариации на $0 \vartriangle 1$ тогда и только тогда, когда f равномерно непрерывна, обладает свойством $(T_1)^*$ и существует $\{F_n\}_n \in L_1$ такое, что $\overline{\mathcal{T}}_1(f, \{F_n\}_n)$;

б) если f равномерно непрерывна, а $\{F_n\}_n \in L_1$ такое, что $\overline{\mathcal{T}}_1(f, \{F_n\}_n)$, то $Var\,(\int_0^1 \{F_n\}_n, f, 0 \vartriangle 1)$.

Итак, функция f из примера 1 не обладает свойством $(T_1)^*$.

На основании замечания 3, теоремы 2, теоремы 1 из [11] и [5] мы сразу получаем следующие утверждения.

<u>Лемма 3</u>. Пусть $\{F_n\}_n \in S$. Тогда существует последовательность НЧ $\{q_m\}_m$ такая, что для всяких КДЧ y_1, y_2 и y_3, $y_1 < y_2 < y_3$ для которых для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено

$$\exists u \, (P(u, \{F_n\}_n, x) \,\&\, (u \leq y_1 \vee u = y_2 \vee u \geq y_3)),$$

имеет место

а) множества $\wedge \lambda (\lambda \in 0 \Delta 1 \,\&\, P(y_2, \{F_n\}_n, \lambda))$,

(2) $\wedge \lambda (\lambda \in 0 \Delta 1 \,\&\, \exists u \, (P(u, \{F_n\}_n, \lambda) \,\&\, u \geq y_3))$ и

(3) $\wedge \lambda (\lambda \in 0 \Delta 1 \,\&\, \exists u \, (P(u, \{F_n\}_n, \lambda) \,\&\, u \leq y_1))$

измеримы по Лебегу и

б) если КДЧ $x^{\geq, y_3}$ (соотв. $x^{\leq, y_1}$) является мерой множества (2) (соотв. (3)), то

$$\forall m \left(\left(q_m < y_3 \supset x^{\geq, y_3} < \frac{1}{2^m} \right) \& \left(y_1 < -q_m \supset x^{\leq, y_1} < \frac{1}{2^m} \right) \right).$$

<u>Следствие</u>. Пусть f равномерно непрерывная функция, $0 \leq f \leq 1$, удовлетворяющая условию $(T_1)^*$ и $\{F_n\}_n \in S$ такие, что $\overline{\mathcal{T}}_1 (f, \{F_n\}_n)$. Тогда

а) существует последовательность элементов пространства $\mathcal{M}$ - $\{\{\mathfrak{M}^i_n\}_n\}_{0 \leq i}$, для которой выполнено $\overline{\overline{\mathcal{T}}}_1 (f, \{\{\mathfrak{M}^i_n\}_n\}_{0 \leq i})$, где $\overline{\overline{\mathcal{T}}}_1 (f, \{\{\mathfrak{M}^i_n\}_n\}_{0 \leq i})$

значит: для всякого ЦЧ i, $0 \leq i$, и почти всех КДЧ y из $0 \Delta 1$ верно

$$y \in \{\mathfrak{M}_n^i\}_n \equiv P(i, \{F_n\}_n, y) ;$$

б) если $\{\{\mathfrak{M}_n^i\}_n\}_{0 \leq i}$ последовательность элементов $\mathcal{M}$ такая, что $\bar{\bar{\mathcal{F}}}_1(f, \{\{\mathfrak{M}_n^i\}_n\}_{0 \leq i})$, то

α) для всяких ЦЧ i и j, $0 \leq i < j$, верно $\{\mathfrak{M}_n^i\}_n \cap \{\mathfrak{M}_n^j\}_n = \{\Lambda\}_n$,

β) последовательность простых элементов пространства L_1 – $\{\sum_{j=0}^{k} j \cdot \chi[\{\mathfrak{M}_n^j\}_n]\}_k$ сходится почти равномерно (и тогда и в S) к $\{F_n\}_n$,

γ) верно $\sum_{j=0}^{k} \mu(\{\mathfrak{M}_n^j\}_n) \xrightarrow[k \to \infty]{} 1$ и, следовательно, последовательность $\{\bigcup_{j=0}^{k} \{\mathfrak{M}_n^j\}_n\}_k$ сходится в M к $\{0 \gamma 1\}_n$ (т.е. последовательность элементов L_1 – $\{\sum_{j=0}^{k} \chi[\{\mathfrak{M}_n^j\}_n]\}_k$ сходится в L_1 к $\{0 \gamma \delta 1\}_n$),

δ) f является функцией ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{\sum_{j=0}^{k} j \cdot \chi[\{\mathfrak{M}_n^j\}_n]\}_k$ сходится в L_1 (т.е. сходится ряд $\sum_{\ell} \ell \cdot \mu(\{\mathfrak{M}_n^\ell\}_n)$),

ε) если ряд $\sum_{\ell} \ell \cdot \mu(\{\mathfrak{M}_n^\ell\}_n)$ сходится к КДЧ x, то $Var(x, f, 0 \Delta 1)$.

Лемма 4. Пусть f и g равномерно непрерывные функции, $0 \le f \le 1 \;\&\; 0 \le g \le 1$, пусть f обладает свойством $(T_1)^*$ а g свойствами $(T_1)^*$ и (S). Тогда функция $g * f$ обладает свойством $(T_1)^*$.

Доказательство. Существуют последовательности элементов пространства L_1 — $\{\{F_n^m\}_n\}_m$, $\{\{G_n^k\}_n\}_k$ и $\{\{H_n^p\}_n\}_p$ и последовательности КДЧ $\{x_k^f\}_k$, $\{x_k^g\}_k$ и $\{x_k\}_k$ такие, что

$$\mathcal{T}_1(f, \{\{F_n^m\}_n\}_m) \;\&\; \mathcal{T}_1(g, \{\{G_n^k\}_n\}_k) \;\&$$
$$\&\; \mathcal{T}_1(g * f, \{\{H_n^p\}_n\}_p) \;\&\; \mathcal{Z}(f, \{x_k^f\}_k) \;\&$$
$$\&\; \mathcal{Z}(g, \{x_k^g\}_k) \;\&\; \mathcal{Z}(g * f, \{x_k\}_k) \;.$$

Пусть s НЧ. Тогда согласно замечанию 3 существуют НЧ k_s и S-множества $\mathcal{J}^1$ и $\mathcal{J}^2$ меры меньшей чем $\frac{1}{3s}$ такие, что

$$\mathcal{S}(g, 3s, 2^{k_s}) \;\&\; \forall k a\,(x_k^g \in \mathcal{J}^1 \;\&\; (a \in 0 \triangle 1 \supset a \in \mathcal{J}^1)) \;\&$$
$$\&\; \forall x\,(x \in 0 \triangle 1 \;\&\; \neg(x \in \mathcal{J}^1) \supset$$
$$\supset \forall k\,(k_s \le k \supset P(0, \{G_n^k\}_n - \{G_n^{k_s}\}_n, x))) \;\&$$
$$\&\; \forall i x\,(1 \le i \le 2^{k_s} \;\&\; x \in \frac{i-1}{2^{k_s}} \triangle \left(\frac{i-1}{2^{k_s}} + \frac{1}{2^{2k_s+1}}\right) \supset g(x) \in \mathcal{J}^2) \;.$$

Мы построим НЧ m_s и S-множества $\mathcal{G}^3$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{k_s}}$ и $\mathcal{J}^3$ меры меньшей чем $\frac{1}{3s}$, для которых выполнено

(4) $\forall xy\,(|x-y| \le \frac{1}{2^{m_b}} \supset |f(x)-f(y)| < \frac{1}{2^{2k_b+1}})$ и

$\forall y\,(y \in 0\Delta 1 \,\&\, \neg(y \in \mathcal{G}^3) \supset$

$\supset \forall m\,(m_b \le m \supset P(0, \{F_m^{m}\}_m - \{F_m^{m_b}\}_m, y)))\,\&$

$\&\,\forall k a\,(x_k^f \in \mathcal{G}^3 \,\&\, (a \in 0\Delta 1 \supset a \in \mathcal{G}^3))\,\&$

$\&\,\forall y\,(y \in \mathcal{G}^3 \supset g(y) \in \mathcal{S}^3)\,\&$

$\&\,\forall k a\,(x_k \in \mathcal{S}^3 \,\&\, (a \in 0\Delta 1 \supset a \in \mathcal{S}^3))$.

Можно построить S -множество $\mathcal{S}$ меры меньшей чем $\frac{1}{b}$ и $\{\mathfrak{M}_m\}_m \in M$ такие, что $\mathcal{S}^i \subseteq \mathcal{S}$ $(1 \le i \le 3)$ и для почти всех КДЧ x верно $x \in \mathcal{S} \equiv x \in \{\mathfrak{M}_m\}_m$ (см. лемму 3 из [5]).

Пусть m НЧ, $m_b < m$. Мы докажем

$$\forall x\,(x \in 0\Delta 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{S}) \supset P(0, \{H_m^{m}\}_m - \{H_m^{m_b}\}_m, x)) .$$

Тогда будет установлено $\wp_S(\{H_m^{m}\}_m \,\Box\, \{H_m^{m_b}\}_m) =$

$$\int_0^1 \{\omega_0(H_{m+1}^{m} \mp H_{m+1}^{m_b})\}_m \le \int_0^1 \chi[\{\mathfrak{M}_m\}_m] = \mu(\{\mathfrak{M}_m\}_m) < \frac{1}{b} .$$

Пусть x КДЧ, $x \in 0\Delta 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{S})$. Тогда выполнено или

(5) $x < \langle I, g * f \rangle_{\llcorner} 0\Delta 1_{\lrcorner} \vee \langle S, g * f \rangle_{\llcorner} 0\Delta 1_{\lrcorner} < x$ или

(6) $\langle I, g * f \rangle_{\llcorner} 0\Delta 1_{\lrcorner} < x < \langle S, g * f \rangle_{\llcorner} 0\Delta 1_{\lrcorner}$.

а) Если (5), то мы согласно замечанию 3 сразу получаем

(7) $$P(0, \{H_m^{m}\}_m - \{H_m^{m_b}\}_m, x) .$$

б) Пусть верно (6). Из $\neg(x \in \mathcal{Y})$ следует

$$\neg(x = g(\langle I, f\rangle_{\llcorner} 0\Delta 1_{\lrcorner})) \& \neg(x = g(\langle S, f\rangle_{\llcorner} 0\Delta 1_{\lrcorner})) \&$$

$$\& \neg \exists k (x = x_k^{\gamma}) \& \neg(x \in \mathcal{Y}^3) \& \forall a (a \in 0\Delta 1 \supset \neg(x = a))$$

и мы, таким образом, можем согласно лемме 2 и замечанию 3 построить возрастающую систему КДЧ $\{y_i\}_{i=1}^{\tau}$ такую, что

$$\forall y ((y \in \langle \sigma, f\rangle_{\llcorner} 0\Delta 1_{\lrcorner} \& g(y) = x) \equiv \exists i (1 \le i \le \tau \& y = y_i)) \&$$

$$\& \forall i (1 \le i \le \tau \supset \neg(y_i \in \mathcal{Y}^3)) .$$

Ввиду отмеченных нами свойств S-множеств $\mathcal{Y}^1$ и $\mathcal{Y}^2$ верно

$$(8) \qquad \forall i \left(1 \le i < \tau \supset \frac{1}{2^{2k_0+1}} < y_{i+1} - y_i\right) .$$

Пусть i НЧ, $1 \le i \le \tau$. Существуют возрастающие системы КДЧ $\{x_{i,j}\}_{j=1}^{\sigma_i}$ и НЧ $\{p_{i,j}\}_{j=1}^{\sigma_i}$ такие, что

$$\forall x ((x \in 0\Delta 1 \& f(x) = y_i) \equiv \exists j (1 \le j \le \sigma_i \& x = x_{i,j})) \&$$

$$\& \forall j \left(1 \le j \le \sigma_i \supset \frac{p_{i,j} - 1}{2^{m_0}} < x_{i,j} < \frac{p_{i,j}}{2^{m_0}}\right) .$$

Пусть i_1, i_2, j_1 и j_2 НЧ, $1 \le i_1 < i_2 \le \tau \,\&$ $\& 1 \le j_1 \le \sigma_{i_1} \& 1 \le j_2 \le \sigma_{i_2}$. Тогда ввиду (4) и (8) верно $\neg(p_{i_1,j_1} = p_{i_2,j_2})$.

Несомненно выполнено

$$\forall x ((x \in 0\Delta 1 \& g * f(x) = x) \equiv \exists i j (1 \le i \le \tau \& 1 \le j \le \sigma_i \& x = x_{i,j})) .$$

Итак, мы имеем $P(\sum_{i=1}^{\tau} \sigma_i, \{H_m^{m_0}\}_m, x) \& P(\sum_{i=1}^{\tau} \sigma_i, \{H_m^{m}\}_m, x)$ и следовательно, (7).

Теорема 3. Пусть f равномерно непрерывная функция, $0 \le f \le 1$. Тогда

а) если существуют абсолютно непрерывная функция ψ и функция φ ограниченной вариации на $0 \vartriangle 1$ такие, что $0 \le \le \varphi \le 1 \,\&\, f = \psi * \varphi$, то f обладает свойством $(T_1)^*$;

б) если f обладает свойством $(T_1)^*$, то можно построить возрастающие на $0 \vartriangle 1$ абсолютно непрерывные функции ψ_1 и ψ такие, что $\psi_1(0) = 0 \,\&\, \psi_1(1) = 1 \,\&\, \forall x\,(x \in 0 \vartriangle 1 \supset \supset \psi(\psi_1(x)) = x) \,\&\, \forall xy\,(|\psi_1(y) - \psi_1(x)| \le 2 \cdot |y - x|)$, $f = \psi * (\psi_1 * f)$ и функция $\psi_1 * f$ является функцией ограниченной вариации на $0 \vartriangle 1$.

Доказательство. Ввиду [6], замечания 1, теоремы 2 и леммы 4 достаточно ограничиться доказательством части б).

Пусть f обладает свойством $(T_1)^*$. Согласно замечанию 3 и следствию леммы 3 существуют последовательность элементов пространства M – $\{\{\mathfrak{M}^i_m\}_m\}_{0 \le i}$, НЧ k_0 и $\{H_m\}_m \in L_1$ такие, что

$$\overline{\overline{T}}_1(f, \{\{\mathfrak{M}^i_m\}_m\}_{0 \le i}),\ \sum_{j=0}^{k_0} \mu(\{\mathfrak{M}^j_m\}_m) > \frac{1}{2} \qquad \text{и}$$

$$\{H_m\}_m = \Big(1 - \sum_{i=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{i} \cdot \mu(\{\mathfrak{M}^i_m\}_m)\Big) \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{k_0} \mu(\{\mathfrak{M}^i_m\}_m)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{k_0} \chi[\{\mathfrak{M}^j_m\}_m] + \sum_{j=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{j} \cdot \chi[\{\mathfrak{M}^j_m\}_m].$$

Тогда $\{H_m\}_m \le \{0 \curlyvee 1 \curlywedge 2\}_m$ и $\int_0^1 \{H_m\}_m = 1$. Согласно [4] существует возрастающая на $0 \vartriangle 1$ абсолютно непрерывная функция ψ_1 такая, что $\forall x\,(0 \le x \le 1 \supset \psi_1(x) = \int_0^x \{H_m\}_m)$

и, следовательно.

$$\psi_1(0)=0\ \&\ \psi_1(1)=1\ \&\ \forall x y\,(|\psi_1(y)-\psi_1(x)|\leq 2\cdot|y-x|)$$

и ψ_1 обладает свойством (S). Ввиду сказанного можно построить возрастающую на $0\vartriangle 1$ функцию ψ, которая является на $0\vartriangle 1$ обратной к ψ_1. Согласно теореме 2 из [9] ψ является абсолютно непрерывной на $0\vartriangle 1$. Очевидно выполнено $f=\psi*(\psi_1*f)$.

Согласно лемме 4 функция $\psi_1 * f$ обладает свойством $(T_1)^*$. Пусть $\{\{\mathcal{H}^i_m\}_m\}_{0\leq i}$ последовательность элементов пространства M такая, что $\forall i\,(0\leq i\supset \sigma(\psi_1,\{\mathfrak{M}^i_m\}_m,\{\mathcal{H}^i_m\}_m))$. Тогда, очевидно, верно

$$\overline{\overline{\mathfrak{T}}}_1(\psi_1*f,\{\{\mathcal{H}^i_m\}_m\}_{0\leq i})\ \&\ \forall i\,(0\leq i\supset\mu(\{\mathcal{H}^i_m\}_m)=\int_{\{\mathfrak{M}^i_m\}_m}\{H_m\}_m)\ .$$

Следовательно, $\forall i\,((0\leq i\leq k_0\supset\mu(\{\mathcal{H}^i_m\}_m)\leq 2\cdot\mu(\{\mathfrak{M}^i_m\}_m))\ \&$

$$\&\ (k_0<i\supset\mu(\{\mathcal{H}^i_m\}_m)=\frac{1}{i}\cdot\mu(\{\mathfrak{M}^i_m\}_m)))\ .$$

Отсюда мы согласно следствию леммы 3 получаем, что ряд $\sum_{\ell}\ell\cdot\mu(\{\mathcal{H}^{\ell}_m\}_m)$ сходится и, следовательно, ψ_1*f – функция ограниченной вариации на $0\vartriangle 1$.

На основании этой теоремы и замечания 4 мы получаем:

<u>Следствие</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция. Тогда $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^*$ в том и только том случае, если существуют абсолютно непрерывная функция g и функция φ ограниченной вариации на $0\vartriangle 1$ такие, что $0\leq\varphi\leq 1\ \&\ \mathcal{F}=g*\varphi$.

В конструктивной математике играют важную роль функции, обладающие свойством α (см. [6] и [8]). Поэтому интересно, если можно всякую функцию, обладающую свойством $(T_1)^*$, представить в виде $\psi * \varphi$, где $\alpha(\varphi) \& 0 \leq \varphi \leq 1$ и ψ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$. Оказывается, что ответ на этот вопрос является отрицательным. В [3] построена возрастающая на $0 \Delta 1$ функция f такая, что $\forall x y (|f(y) - f(x)| \leq |y - x|)$ и f не является абсолютно непрерывной на $0 \Delta 1$ и, следовательно, верно $\neg \alpha(f)$ (см. [6]). С д другой стороны верно следующее утверждение.

<u>Лемма 5</u>. Пусть φ функция и $a \Delta b$ сегмент такие, что $\alpha(\varphi) \& \langle \sigma, \varphi \rangle \llcorner 0 \Delta 1 \lrcorner \subseteq a \Delta b$, а ψ абсолютно непрерывная на $a \Delta b$ конструктивная функция. Тогда выполнено $\alpha(\psi * \varphi)$ в том и только том случае, если $\psi * \varphi$ функция ограниченной вариации на $0 \Delta 1$.

Методами близкими к классическим можно доказать следующее утверждение (ср. [1], § 26). Заметим, что функция f является сингулярной тогда и только тогда, когда она является функцией ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ и выполнено Д$(f, \{0 \gamma 1 \sigma 0\}_n)$. Всякая сингулярная функция обладает свойством α (См. замечание 1 и теорему 1 из [8] .)

<u>Теорема 4</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция. Тогда можно построить возрастающие на $0 \Delta 1$ сингулярные функции φ и φ_1 такие, что $\varphi(0) = 0 \& \varphi(1) = 1 \& \forall x (x \in 0 \Delta 1 \supset \varphi_1(\varphi(x)) = x) \&$ Д$(\mathcal{F} * \varphi_1, \{0 \gamma 1 \sigma 0\}_n)$. Следовательно, верно $\mathcal{F} = (\mathcal{F} * \varphi_1) * \varphi$, где $\alpha(\varphi) \& \alpha(\varphi_1)$.

Если $\mathcal{F}$ является функцией ограниченной вариации на

$0 \Delta 1$, то $\mathcal{F} * \varphi_1$ сингулярная функция, в частности верно $\alpha(\mathcal{F} * \varphi_1)$.

Таким образом, всякую функцию ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ можно представить в виде суперпозиции двух сингулярных функций.

Согласно теореме 4, следствию теоремы 3, теореме и лемме 1 из [10] и лемме 1 из [7] верно следующее утверждение (ср. [1], стр. 652).

Теорема 5. Для всякой равномерно непрерывной функции $\mathcal{F}$ существуют неубывающие абсолютно непрерывные на $0 \Delta 1$ функции f_1 и f_2 и сингулярные функции g_1 и g_2 такие, что $0 \leq g_1 \leq 1$ & $0 \leq g_2 \leq 1$ и $\mathcal{F} = f_1 * g_1 + f_2 * g_2$. Функции $f_1 * g_1$ и $f_2 * g_2$ обладают свойством $(T_1)^*$.

Литература

[1] BARY N.: Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues, Math.Annalen 103(1930),185-248, 598-653.

[2] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д.: Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, Труды Мат.инст.им.В.А.Стеклова,т. LXVII(1962), 385-457.

[3] ДЕМУТ О.: О дифференцируемости конструктивных функций, Comment.Math.Univ.Carolinae 10(1969),167-175.

[4] ДЕМУТ О.: Пространства L_κ и S в конструктивной математике, Comment.Math.Univ.Carol.10(1969),261-284.

[5] ДЕМУТ О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comment.Math.Univ.Carolinae 10(1969),463-492.

[6] ДЕМУТ О.: **Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций,** Comment.Math.Univ.Carolinae 11(1970),705-726.

[7] ДЕМУТ О.: **О суперпозициях абсолютно непрерывных конструктивных функций,** Comment.Math.Univ.Carolinae 12(1971),423-451.

[8] ДЕМУТ О.: **Об одном условии дифференцируемости функций ограниченной вариации,** Comment.Math.Univ.Carolinae 12(1971),687-711.

[9] ДЕМУТ О.: **Необходимое и достаточное условие представимости конструктивных функций в виде суперпозиции абсолютно непрерывных функций,** Comment.Math.Univ.Carolinae 13(1972),227-251.

[10] ДЕМУТ О.: **Достаточное условие представимости конструктивной функции в виде суммы двух суперпозиций абсолютно непрерывных функций,** Comment.Math. Univ.Carolinae 13(1972),265-282.

[11] ДЕМУТ О.: **О конструктивном аналоге связи измеримости множеств и функций по Лебегу,** Comment.Math. Univ.Carolinae 14(1973),377-396.

Matematicko-fyzikální fakulta

Karlova universita

Praha 8, Sokolovská 83

Československo

(Oblatum 11.6. 1973)