Osvald Demuth

О конструктивном аналоге связи измеримости множеств и функций по Лебегу

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 14 (1973), No. 3, 377--396

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105498

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

14,3 (1973)

О КОНСТРУКТИВНОМ АНАЛОГЕ СВЯЗИ ИЗМЕРИМОСТИ МНОЖЕСТВ И ФУНКЦИЙ ПО ЛЕБЕГУ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Прага

Содержание: В заметке исследуется конструктивный аналог известной связи измеримости множеств и функций по Лебегу (см.[1] и [3]).

Ключевые слова: измеримость функций по Лебегу, измеримость множеств по Лебегу, сходимость по мере, почти равномерная сходимость.

AMS, Primary: 02E99 Ref. Ž. 2.644.2
Secondary: 28A05, 28A20

В следующем мы пользуемся обозначениями и результатами из [4] и [5], в частности понятием измеримости множеств по Лебегу ([5], стр. 485). Заметим, что элементы пространства S ([4]) являются конструктивными аналогами классических измеримых функций определенных и почти везде конечных на сегменте $0 \Delta 1$.

Мы напомним два определения.

1) Пусть $\{H_n\}_n$ последовательность ступенчатых остовов ([4], стр. 263), а x и μ КДЧ, $0 \leq x \leq 1$. Тогда

$P(\mu, \{H_m\}_m, x)$ значит: последовательность КДЧ $\{\vartheta(H_m x)\}_m$ определена и сходится к μ (говоря содержательно, μ является значением $\{H_m\}_m$ в точке x).

2) Если φ функция, а k и ℓ НЧ, то $\mathfrak{a}(\varphi, k, \ell)$ значит: для всякой системы $\{a_i \triangle b_i\}_{i=1}^{s}$ неперекрывающихся рациональных сегментов содержащихся в $0 \triangle 1$ выполнено

$$\left(\sum_{i=1}^{s} |a_i \triangle b_i| < \frac{1}{\ell} \supset \sum_{i=1}^{s} |\varphi(b_i) - \varphi(a_i)| < \frac{1}{k}\right) .$$

Теорема 1. Пусть $\{F_m\}_m \in S$. Тогда существуют последовательности КДЧ $\{\nu_k\}_k$ и НЧ $\{q_m\}_m$ такие, что для всякого КДЧ y, $\neg \exists k (y = \nu_k)$, множество

(1) $\wedge \lambda (\lambda \in 0 \triangle 1 \,\&\, \exists \mu (P(\mu, \{F_m\}_m, \lambda) \,\&\, \mu * y))$,

где $* \rightleftharpoons > \vee * \rightleftharpoons \geq \vee * \rightleftharpoons \leq \vee * \rightleftharpoons <$, является измеримым по Лебегу, а множество (1), где $* \rightleftharpoons =$, является множеством нулевой меры. Обозначив для $*$, $* \rightleftharpoons > \vee * \rightleftharpoons \geq \vee * \rightleftharpoons \leq \vee * \rightleftharpoons <$, посредством $x^{*, y}$ меру множества (1), мы получаем

$$x^{>, y} = x^{\geq, y} = 1 - x^{\leq, y} = 1 - x^{<, y} \,\&\, \forall m \left(\left(y > q_m \supset x^{>, y} < \frac{1}{2^m}\right) \,\&\, \left(y < -q_m \supset x^{>, y} > 1 - \frac{1}{2^m}\right)\right) .$$

Доказательство. Ввиду того, что согласно теореме 3 из [4] и замечанию 1 из [5] существуют последовательности S - множеств $\{\mathcal{G}^p\}_p$ и равномерно непрерывных функций $\{g^p\}_p$ такие, что для всякого НЧ p мера $\mathcal{G}^p$ меньше чем $\frac{1}{2^n}$, $\mathcal{G}^{n+1} \subseteq \mathcal{G}^n$ и

$$\forall x \, (x \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg (x \in \mathcal{G}^n) \supset P(g^n(x), \{F_m\}_m, x))$$

и ввиду свойств пространства $\mathcal{M}$ ([5]), для закончения доказательства достаточно установить верность следующей леммы.

Лемма 1. Пусть f равномерно непрерывная функция. Тогда существует последовательность КДЧ $\{\lambda_k\}_k$ такая, что для всякого КДЧ y, $\neg \exists k \, (y = \lambda_k)$, множество $\wedge \lambda (\lambda \in 0 \triangle 1 \,\&\, f(\lambda) * y)$, где $* \rightleftharpoons > \vee * \rightleftharpoons \geq \vee * \rightleftharpoons \leq \vee * \rightleftharpoons <$, измеримо по Лебегу, а $\wedge \lambda (\lambda \in 0 \triangle 1 \,\&\, f(\lambda) = y)$ множество нулевой меры.

Доказательство. Существует НЧ P такое, что $|f| < P - 1$. Мы определим $\varphi \rightleftharpoons \frac{1}{2P} \cdot (f + P)$. Тогда φ равномерно непрерывная функция, $\frac{1}{2P} < \varphi < 1 - \frac{1}{2P}$ и для всякого КДЧ y выполнено

$$(2) \quad \forall x \, ((f(x) > y \equiv \varphi(x) > \frac{y+P}{2P}) \,\&\, (f(x) \geq y \equiv \varphi(x) \geq \frac{y+P}{2P})) .$$

1) Пусть $\{m_n\}_n$ возрастающая последовательность НЧ, для которой выполнено

$$(3) \quad \forall n \, (2n + 4 + P \leq m_n \,\&\, \forall x y \, (|x - y| \leq \frac{2}{2^{m_n}} \supset |\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{1}{2^{2n+10+P}})) .$$

Для всякого НЧ n существует система НЧ $\{k_i^n\}_{i=1}^{2^{m_n}}$

такая, что для всякого НЧ i, $1 \le i \le 2^{m_n}$, верно

$$1 < k_i^n < 2^{2n+4+p} \;\&$$

$$\frac{k_i^n - 1}{2^{2n+4+p}} + \frac{1}{2^{2n+8+p}} < \varphi\left(\frac{i}{2^{m_n}}\right) < \frac{k_i^n}{2^{2n+4+p}} + \frac{1}{2^{2n+7+p}} - \frac{1}{2^{2n+10+p}}$$

и, следовательно,

$$\forall x \left(x \in \frac{i-1}{2^{m_n}} \Delta \frac{i}{2^{m_n}} \supset \frac{k_i^n - 1}{2^{2n+4+p}} + \frac{1}{2^{2n+9+p}} < \varphi(x) < \right.$$

$$\left. < \frac{k_i^n}{2^{2n+4+p}} + \frac{1}{2^{2n+7+p}} \right) .$$

а) Легко показать, что для всяких НЧ n, i и j, $1 \le i \le 2^{m_n} \;\&\; \dfrac{i-1}{2^{m_n}} < \dfrac{j}{2^{m_{n+1}}} \le \dfrac{i}{2^{m_n}}$, выполнено

$$\frac{k_i^n - 1}{2^{2n+4+p}} \le \frac{k_j^{n+1} - 1}{2^{2(n+1)+4+p}} \le \frac{k_i^n}{2^{2n+4+p}} .$$

б) Пусть n НЧ. Для всякого НЧ k, $1 < k \le 2^{2n+4+p}$, пусть $\{ i_j^{n,k} \}_{j=1}^{\tau_k^n}$ возрастающая система всех НЧ i, для которых верно $1 \le i \le 2^{m_n} \;\&\; k_i^n = k$. (Эта система может быть пустой. Тогда $\tau_k^n = 0$.)

Пусть $\{ t_q^n \}_{q=1}^{\sigma_n}$ возрастающая система всех НЧ k таких, что

$$1 \le k \le 2^{2n+4+p} \;\&\; \left(k \le 2 \vee \frac{\tau_k^n}{2^{m_n}} \ge \frac{1}{2^{n+1}} \vee 2^{2n+4+p} - 1 \le k \right) .$$

Тогда $\sigma_n \le 2^{n+1} + 4$ и, следовательно,

$$\sum_{q=1}^{\sigma_n} \left| \frac{t_q^n - 1}{2^{2n+4+p}} \Delta \frac{t_q^n}{2^{2n+4+p}} \right| \le \frac{2^{n+1}+4}{2^{2n+4+p}} < \frac{1}{2^{n+3}} .$$

в) Для всякого НЧ p мы построим S-множество $\mathcal{J}^{p}$ такое, что $\forall x\,(x \in \mathcal{J}^{p} \equiv \neg\neg \exists n q\,(p \le n \,\&\, 1 \le q \le \sigma_n \,\&$ $\&\, x \in \frac{t_q^n - 1}{2^{2n+4+p}} \vartriangle \frac{t_q^n}{2^{2n+4+p}}))$.

Тогда мера $\mathcal{J}^{p}$ меньше чем $\frac{1}{2^{p+2}}$.

Мы построим последовательность S-множеств $\{\mathcal{G}^{p}\}_{p}$ такую, что для всякого НЧ p мера $\mathcal{G}^{p}$ меньше чем $\frac{1}{2^{p}}$, $\mathcal{G}^{p+1} \subseteq \mathcal{G}^{p}$, $\mathcal{J}^{p} \subseteq \mathcal{G}^{p}$ и $\mathcal{G}^{p}$ содержит все РЧ из $0 \vartriangle 1$.

2) Пусть w КДЧ, а p НЧ такие, что $\neg(w \in \mathcal{G}^{p})$. Тогда или $w < 0 \vee 1 < w$ или w иррациональное число из интервала $\frac{2}{2^{2p+4+p}} \triangledown (1 - \frac{2}{2^{2p+4+p}})$.

а) Если $w < 0 \vee 1 < w$, мы для всякого НЧ n определим

$$(w < 0 \supset \mathfrak{M}_n^{>,w} \rightleftharpoons 0 \curlyvee 1) \,\&\, (1 < w \supset \mathfrak{M}_n^{>,w} \rightleftharpoons \Lambda) \ .$$

Тогда, очевидно, $\{\mathfrak{M}_n^{>,w}\}_n \in \mathcal{M}$ и выполнено

$$(4) \qquad \forall x\,(x \in 0 \triangledown 1 \supset (x \in \{\mathfrak{M}_n^{>,w}\}_n \equiv \varphi(x) > w)) \ .$$

б) Пусть $\frac{2}{2^{2p+4+p}} < w < 1 - \frac{2}{2^{2p+4+p}}$. Мы построим последовательность НЧ $\{l_n\}_n$ такую, что

$$(5) \quad \forall n\,((p \le n \supset 3 \le l_n < 2^{2n+4+p} - 1) \,\&\, \frac{l_n - 1}{2^{2n+4+p}} \le$$
$$\le \frac{l_{n+1} - 1}{2^{2(n+1)+4+p}} < w < \frac{l_{n+1}}{2^{2(n+1)+4+p}} \le \frac{l_n}{2^{2n+4+p}}) \ .$$

Для всякого НЧ s, $p \le s$, мы построим комплексы (см.[5], стр. 465) $\mathfrak{M}^{>,w}_{s-p+1}$ и $\mathfrak{M}^{\geq,w}_{s-p+1}$ так, чтобы для всякого иррационального числа x выполнялось

$$x \in \mathfrak{M}^{*,w}_{s-p+1} \equiv \exists i\,(1 \leq i \leq 2^{m_s} \,\&\, k^s_i * l_s \,\&\, \frac{i-1}{2^{m_s}} < x < \frac{i}{2^{m_s}}),$$

где $* \rightleftharpoons > \vee * \rightleftharpoons \geq$.

Тогда мы ввиду 1) а) для всякого НЧ s, $p \leq s$, получаем $\mathfrak{M}^{>,w}_{s-p+1} \subseteq \mathfrak{M}^{>,w}_{s+1-p+1} \subseteq \mathfrak{M}^{\geq,w}_{s-p+1}$, и, следовательно,

$$|\Delta(\mathfrak{M}^{>,w}_{s+1-p+1}, \mathfrak{M}^{>,w}_{s-p+1})| \leq |\mathfrak{M}^{\geq,w}_{s-p+1}| - |\mathfrak{M}^{>,w}_{s-p+1}| =$$

$$= \sum_{j=1}^{r^s_{l_s}} \left| \frac{i^{s,l_s}_j - 1}{2^{m_s}} \,\Delta\, \frac{i^{s,l_s}_j}{2^{m_s}} \right| = \frac{r^s_{l_s}}{2^{m_s}} < \frac{1}{2^{s+1}}, \text{ибо } \neg(w \in \mathcal{G}^p)$$

и, таким образом, $\neg(w \in \mathcal{G}^p) \,\&\, \neg\,\exists q\,(1 \leq q \leq \sigma_s \,\&\, l_s = t^s_q)$.

Заметим, что

(6) $$\forall s\,(p \leq s \supset |\mathfrak{M}^{>,w}_{s-p+1}| = \sum_{k=l_s+1}^{2^{2s+4+P}} \frac{r^s_k}{2^{m_s}}) .$$

Мы доказали $\{\mathfrak{M}^{>,w}_n\}_n \in M$ и ввиду леммы 4 из [5] знаем, что если $\exists s\,(p \leq s \,\&\, \neg(\mathfrak{M}^{>,w}_{s-p+1} \rightleftharpoons \Lambda))$, то $\wedge\lambda\,(\lambda \in \{\mathfrak{M}^{>,w}_n\}_n)$ является непустым открытым множеством.

α) Пусть x КДЧ, $x \in \{\mathfrak{M}^{>,w}_n\}_n$. Тогда существует НЧ s, $p \leq s \,\&\, x \in \mathfrak{M}^{>,w}_{s-p+1}$, и не может не существовать НЧ i такое, что $1 \leq i \leq 2^{m_s} \,\&\, k^s_i > l_s \,\&$ $\&\, x \in \frac{i-1}{2^{m_s}} \,\Delta\, \frac{i}{2^{m_s}}$ и, следовательно,

$\varphi(x) > \dfrac{k_i^s - 1}{2^{2s+4+P}} \geq \dfrac{l_s}{2^{2s+4+P}} > w$. Отсюда мы сразу получаем $\varphi(x) > w$.

β) Пусть x КДЧ, $x \in 0 \triangledown 1 \ \& \ \varphi(x) > w$. Тогда существуют НЧ s и i , для которых выполнено $p \leq s \ \& \ \varphi(x) > \dfrac{l_s + 1}{2^{2s+4+P}} \ \& \ 1 \leq i < 2^{m_s} \ \& \ \dfrac{i-1}{2^{m_s}} < x < \dfrac{i+1}{2^{m_s}}$ и, следовательно, ввиду (3)

$$\min\left(\varphi\left(\frac{i}{2^{m_s}}\right), \varphi\left(\frac{i+1}{2^{m_s}}\right)\right) > \frac{l_s}{2^{2s+4+P}} + \frac{1}{2^{2s+7+P}} .$$

Но тогда $k_i^s > l_s \ \& \ k_{i+1}^s > l_s$, $x \in \mathfrak{M}^{>,w}_{s-p+1}$ и тем более $\forall q\,(s \leq q \supset x \in \mathfrak{M}^{>,w}_{q-p+1})$. Отсюда - по определению - следует $x \in \{\mathfrak{M}^{>,w}_m\}_m$.

γ) Из α) и β) сразу следует (4).

3) а) Заметим, что для всяких НЧ p и КДЧ w_1 и w_2 , $w_1 \leq w_2 \ \& \ \neg(w_1 \in \mathcal{Y}^p) \ \& \ \neg(w_2 \in \mathcal{Y}^p)$, имеет место $\forall x\,(x \in \{\mathfrak{M}^{>,w_2}_m\}_m \supset x \in \{\mathfrak{M}^{>,w_1}_m\}_m)$ и, следовательно, $\mu(\{\mathfrak{M}^{>,w_2}_m\}_m) \leq \mu(\{\mathfrak{M}^{>,w_1}_m\}_m)$.

б) Для всякого НЧ m мы определим

$$G_m \rightleftharpoons 0 \,\gamma\, \frac{1}{2^{2m+4+P}} \,\gamma\, \frac{2}{2^{2m+4+P}} \dots \gamma\, 1 - \frac{1}{2^{2m+4+P}} \,\gamma\, 1\, \sigma \sum_{k=2}^{2^{2m+4+P}} \frac{\tau_k^m}{2^{m_m}} \,\gamma \sum_{k=3}^{2^{2m+4+P}} \frac{\tau_k^m}{2^{m_m}} \dots \gamma \sum_{k=2^{2m+4+P}}^{2^{2m+4+P}} \frac{\tau_k^m}{2^{m_m}} \,\gamma\, 0 .$$

Пусть w КДЧ, а p НЧ такие, что $w \in 0 \triangle 1 \ \& \ \neg(w \in \mathcal{Y}^p)$. Тогда w иррациональное число,

$\frac{2}{2^{2p+4+P}} < w < 1 - \frac{2}{2^{2p+4+P}}$, и, следовательно, существует последовательность НЧ $\{\ell_m\}_m$ такая, что (5). Но тогда ввиду (6) для всякого НЧ m верно

$$!\vartheta(G_m w) \,\&\, \left(p \le m \supset \vartheta(G_m w) = \sum_{k=\ell_m+1}^{2^{2m+4+P}} \frac{\tau_k^m}{2^{m_m}} = |\mathfrak{M}_{m-p+1}^{>,w}|\right) .$$

Отсюда ввиду $|\mathfrak{M}_m^{>,w}| \xrightarrow[m\to\infty]{} \mu(\{\mathfrak{M}_m^{>,w}\}_m)$ сразу следует $P(\mu(\{\mathfrak{M}_m^{>,w}\}_m), \{G_m\}_m, w)$.

в) Мы используем [6]. На основании а) и б) знаем, что верно $A_{\ge}(\{G_m\}_m, \{\mathcal{G}^p\}_p)$. Согласно теореме 2 из [6] можно построить последовательности ступенчатых остовов $\{H_\ell\}_\ell$ и КДЧ $\{x_k\}_k$ такие, что для всякого КДЧ u, $0 < u < 1 \,\&\, \neg \exists k\,(u = x_k)$, существует КДЧ η , которое является супремом множества

$\wedge\lambda(\exists p w(0 < u < w < 1 \,\&\, \neg(w \in \mathcal{G}^p) \,\&\, P(\lambda, \{G_m\}_m, w)))$,

т.е. множества $\wedge\lambda(\exists p w(0 < u < w < 1 \,\&\, \neg(w \in \mathcal{G}^p) \,\&\, \mu(\{\mathfrak{M}_m^{>,w}\}_m) = \lambda))$, и инфимумом множества

$\wedge\lambda(\exists p w(0 < w < u < 1 \,\&\, \neg(w \in \mathcal{G}^p) \,\&\, \mu(\{\mathfrak{M}_m^{>,w}\}_m) = \lambda))$,

причем $P(\eta, \{H_\ell\}_\ell, u)$.

г) Пусть u КДЧ, $0 < u < 1 \,\&\, \neg \exists k\,(u = x_k)$. Тогда согласно в) можно построить КДЧ η и последовательности КДЧ $\{w_m^1\}_m$, $\{w_m^2\}_m$ и НЧ $\{p_m^1\}_m$ и $\{p_m^2\}_m$ такие, что для всякого НЧ m верно

$0 < w_m^2 < w_{m+1}^2 < u < w_{m+1}^1 < w_m^1 < 1 \,\&\, \forall i\,(1 \le i \le 2 \supset |u - w_m^i| <$

$< \frac{1}{2^m} \,\&\, \neg (w_m^i \in \mathcal{G}^{n_m^i})) \,\&\, \eta - \frac{1}{2^m} < \mu(\{\mathfrak{M}_m^{>, w_m^1}\}_m) \le$

$\le \eta \le \mu(\{\mathfrak{M}^{>, w_m^2}\}_m) < \eta + \frac{1}{2^m}$.

Но тогда согласно следствию теоремы 3 из [5] существуют $\{\mathfrak{N}_m^{1,u}\}_m \in M$ и $\{\mathfrak{N}_m^{2,u}\}_m \in M$ такие, что $\mu(\{\mathfrak{N}_m^{1,u}\}_m) = \mu(\{\mathfrak{N}_m^{2,u}\}_m) = \eta$ и для почти всех КДЧ x из $0 \vartriangle 1$ верно

$$x \in \{\mathfrak{N}_m^{1,u}\}_m \equiv \exists m\,(x \in \{\mathfrak{M}_m^{>, w_m^1}\}_m) \quad ,$$

$$x \in \{\mathfrak{N}_m^{2,u}\}_m \equiv \forall m\,(x \in \{\mathfrak{M}_m^{>, w_m^2}\}_m)$$

и, следовательно,

$$x \in \{\mathfrak{N}_m^{1,u}\}_m \equiv \exists m\,(\varphi(x) > w_m^1) \equiv \varphi(x) > u \quad ,$$

$$x \in \{\mathfrak{N}_m^{2,u}\}_m \equiv \forall m\,(\varphi(x) > w_m^2) \equiv \varphi(x) \ge u \quad .$$

По определению, множества $\wedge\lambda\,(\lambda \in 0 \vartriangle 1 \,\&\, \varphi(\lambda) > u)$ и $\wedge\lambda\,(\lambda \in 0 \vartriangle 1 \,\&\, \varphi(\lambda) \ge u)$ измеримы по Лебегу и их мера совпадает.

4) Мы определим $\lambda_1 \rightleftharpoons -P$, $\lambda_2 \rightleftharpoons P$ и

$\forall k\,(\lambda_{k+2} = 2P \cdot x_k - P)$.

Пусть y КДЧ, для которого верно $\neg \exists k\,(y = \lambda_k)$. Мы определим $u = \frac{y + P}{2P}$. Тогда $\neg(u = 0) \,\&\, \neg(u = 1) \,\&$ $\& \neg \exists k\,(u = x_k)$ и, следовательно, $u < 0 \vee 1 < u \vee 0 <$ $< 1 \,\&\, \neg \exists k\,(u = x_k)$.

Согласно 2) а) и 3) г) в каждом из этих случаев множества $\wedge\lambda(\lambda \in 0 \triangle 1 \;\&\; \varphi(\lambda) > u)$ и $\wedge\lambda(\lambda \in 0 \triangle 1 \;\&\; \varphi(\lambda) \geq u)$ являются измеримыми по Лебегу и их мера совпадает. Ввиду этого и (2) множества $\wedge\lambda(\lambda \in 0 \triangle 1 \;\&\; f(\lambda) > y)$ и $\wedge\lambda(\lambda \in 0 \triangle 1 \;\&\; f(\lambda) \geq y)$ измеримы по Лебегу и их мера совпадает. Но тогда, очевидно, множества $\wedge\lambda(\lambda \in 0 \triangle 1 \;\&\; f(\lambda) \leq y)$ и $\wedge\lambda(\lambda \in 0 \triangle 1 \;\&\; f(\lambda) < y)$ являются тоже множествами измеримыми по Лебегу, а $\wedge\lambda(\lambda \in 0 \triangle 1 \;\&\; f(\lambda) = y)$ измеримое множество нулевой меры.

Следующий пример показывает. что результат нельзя усилить.

<u>Пример 1</u>. Существует равномерно непрерывная функция g такая, что для всяких НЧ n и символа $*$, $* \mathbf{I} > \vee * \mathbf{I} \geq \vee * \mathbf{I} \leq \vee * \mathbf{I} < \vee * \mathbf{I} =$, множество $\wedge\lambda(\lambda \in 0 \triangle 1 \;\&\; g(\lambda) * \frac{1}{2^n})$ не является измеримым по Лебегу.

<u>Доказательство</u>. Мы используем равномерно непрерывную функцию f из примера 2 из [5]. Выполнено $0 \leq f \leq 1 \;\&$ $\&\; f(0) = 0 \;\&\; f(1) = 0$ и множество $\wedge\lambda(0 < f(\lambda))$ не является измеримым по Лебегу. Следовательно, тем же свойством обладает и множество $\wedge\lambda(\lambda \in 0 \triangle 1 \;\&\; f(\lambda) = 0)$.

Мы построим равномерно непрерывную функцию f_1 такую, что $\forall x\,(f_1(x) = f(4x) - \frac{1}{4} \cdot f(4(x - \frac{1}{4})) +$ $+ 4 \cdot (max(min(x,1),\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}))$. Тогда $-\frac{1}{4} \leq f_1 \leq 2 \;\&\; f_1(0) =$ $= 0 \;\&\; f_1(1) = 2$ и для $*$, $* \mathbf{I} > \vee * \mathbf{I} \geq \vee * \mathbf{I} \leq$ $\leq \vee * \mathbf{I} < \vee * \mathbf{I} =$, множество $\wedge\lambda(\lambda \in 0 \triangle 1 \;\&\; f_1(\lambda) * 0)$

не является измеримым по Лебегу.

Легко построить функцию g такую, что для всякого КДЧ x верно $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} \cdot £_1(2^m \cdot (x - \frac{1}{2^m}))$. Построенная функция очевидно обладает обещанными свойствами.

<u>Определение 1</u>. Пусть $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ последовательность элементов пространства S, $\{F_n\}_n \in S$, пусть для всяких НЧ m и ℓ и КДЧ y

$$M^{y,m} \rightleftharpoons \wedge\lambda(\lambda \in 0 \Delta 1 \,\&\, \exists u (P(u, |\{F_n^m\}_n - \{F_n\}_n|, \lambda) \,\&\, u > y)),$$

$$M^{y,m,\ell} \rightleftharpoons \wedge\lambda(\lambda \in 0 \Delta 1 \,\&\, \exists u (P(u, |\{F_n^m\}_n - \{F_n^{m+\ell}\}_n|, \lambda) \,\&\, u > y)).$$

1) Скажем, что последовательность $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ является фундаментальной по мере (соотв. сходится по мере к $\{F_n\}_n$), если существует убывающая последовательность КДЧ $\{y_k\}_k$ такая, что $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ и для всякого НЧ k

а) для любых НЧ m и ℓ множество $M^{y_k,m,\ell}$ (соотв. $M^{y_k,m}$) является измеримым по Легегу и

б) для всякого НЧ s существует НЧ t такое, что для всяких НЧ m и ℓ, $t \le m$, мера множества $M^{y_k,m,\ell}$ (соотв. $M^{y_k,m}$) меньше чем $\frac{1}{s}$ (ср. [1], стр. 91).

2) Скажем, что последовательность $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ является почти равномерно фундаментальмой (соотв. почти равномерно сходится к $\{F_n\}_n$), если существует последовательность S-множеств $\{\mathcal{G}^p\}_p$ такая, что для всякого НЧ p мера $\mathcal{G}^p$

меньше чем $\frac{1}{2^{p}}$, $\mathcal{G}^{p+1} \subseteq \mathcal{G}^{p}$ и существует последовательность НЧ $\{t^{p}_{s}\}_{s}$ обладающая следующим свойством: для любых НЧ s, m и ℓ , $t^{p}_{s} \leq m$, и КДЧ x , $x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{G}^{p})$,существуют КДЧ u и v , для которых выполнено $P(u, \{F^{m}_{n}\}_{n}, x)$, $P(v, \{F^{m+\ell}_{n}\}_{n}, x)$ (соотв. $P(v, \{F_{n}\}_{n}, x)$) и $|u - v| \leq \frac{1}{s}$ (ср. [1], стр.89).

Заметим, что из почти равномерной фундаментальности (соотв. сходимости) очевидно следует фундаментальность (соотв. сходимость) по мере.

Замечание 1. Пусть $\{F_{n}\}_{n}$ и $\{G_{n}\}_{n}$ элементы пространства S , а y КДЧ такое, что $0 < y$ и множество

$$(7) \quad \wedge\lambda(\lambda \in 0 \Delta 1 \,\&\, \exists u\, (P(u, |\{F_{n}\}_{n} - \{G_{n}\}_{n}|, \lambda) \,\&\, u > y))$$

является измеримым по Лебегу. Тогда - по определению - существует $\{\mathcal{M}_{n}\}_{n} \in \mathcal{M}$ такое, что для почти всех КДЧ x верно $x \in \{\mathcal{M}_{n}\}_{n}$ тогда и только тогда, когда x элемент множества (7). Мы получаем $\{\omega_{0}(F_{n+1} \mp G_{n+1})\}_{n} \in L_{1}$,

$$\{\omega_{0}(F_{n+1} \mp G_{n+1})\}_{n} \leq |\{F_{n}\}_{n} - \{G_{n}\}_{n}|, \ \rho_{S}(\{F_{n}\}_{n} \,\square\, \{G_{n}\}_{n}) =$$

$$= \int_{0}^{1} \{\omega_{0}(F_{n+1} \mp G_{n+1})\}_{n}$$ и для почти всех КДЧ x ,

$$x \in \{\mathcal{M}_{n}\}_{n} \equiv (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \exists u\, (P(u, \{\omega_{0}(F_{n+1} \mp G_{n+1})\}_{n}, x) \,\&\, 1 > u > \frac{y}{1+y}))\,.$$

Следовательно,

$$\frac{y}{1+y}\cdot\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n)\le\rho_S(\{F_n\}_n\,\Box\,\{G_n\}_n)\le\frac{y}{1+y}+\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n)$$

и

$$(\{F_n\}_n\in L_1)\,\&\,(\{G_n\}_n\in L_1)\supset\rho_S(\{F_n\}_n\,\Box\,\{G_n\}_n)\le\int_0^1|\{F_n\}_n-\{G_n\}_n|\ .$$

Отсюда на основании теоремы 1 сразу следует: для любых $\{F_n\}_n\in S$ и последовательности элементов S – $\{\{F_n^m\}_n\}_m$

а) $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ является фундаментальной в S тогда и только тогда, когда она фундаментальна по мере;

б) $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ сходится в S к $\{F_n\}_n$ тогда и только тогда, когда она сходится по мере к $\{F_n\}_n$;

в) если $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ сходится в S к $\{F_n\}_n$, то существует возрастающая последовательность НЧ $\{m_k\}_k$ такая, что $\{\{F_n^{m_k}\}_n\}_k$ сходится почти равномерно к $\{F_n\}_n$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ последовательность элементов пространства L_1 . Тогда существует последовательность абсолютно непрерывных функций $\{\varphi_m\}_m$ такая, что

$$\forall m x\,(0\le x\le 1\supset\varphi_m(x)=\int_0^x\{F_n^m\}_n)\ . \tag{8}$$

Последовательность $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ является фундаментальной в L_1 тогда и только тогда, когда она фундаментальна в S (т.е. по мере) и существует последовательность НЧ $\{k_\ell\}_\ell$ такая, что $\forall m\ell\,(\mathfrak{a}(\varphi_m,\ell,k_\ell))$.

Доказательство. Согласно теореме 1 из [4] существует последовательность абсолютно непрерывных функций $\{\varphi_m\}_m$ такая, что (8).

1) Пусть последовательность $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ фундаментальна в L_1. Тогда согласно леммам 1 и 2 из [4] и замечанию 1 она фундаментальна в S (т.е. по мере) и существуют $\{F_n\}_n \in L_1$ и абсолютно непрерывная функция φ такие, что

$$(\int_0^1 |\{F_n^m\}_n - \{F_n\}_n| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0) \,\&\, \forall x (0 \le x \le 1 \supset \varphi(x) = \int_0^x \{F_n\}_n) .$$

Можно построить последовательность последовательностей НЧ $\{\{p_\ell^m\}_\ell\}_m$ и последовательности НЧ $\{p_\ell\}_\ell$ и $\{m_\ell\}_\ell$ такие, что $\forall m\ell (a(\varphi_m, \ell, p_\ell^m) \,\&\, a(\varphi, \ell, p_\ell) \,\&$ $\& (m_\ell \le m \supset \int_0^1 |\{F_n^m\}_n - \{F_n\}_n| < \frac{1}{2^\ell}))$ (см. [7]).

Для НЧ ℓ мы определим $k_\ell \rightleftharpoons (\max_{1\le i\le m_\ell} p_{2\ell}^i) + p_{2\ell}$. Тогда, как легко доказать, верно $\forall m (a(\varphi_m, \ell, k_\ell))$.

2) Пусть последовательность $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ фундаментальна в S (т.е. по мере) и пусть существует последовательность НЧ $\{k_\ell\}_\ell$ такая, что $\forall m\ell (a(\varphi_m, \ell, k_\ell))$.

Пусть p НЧ. Согласно предположению существуют КДЧ y_p, $0 < y_p < \frac{1}{2^p}$, НЧ m_p и для всяких НЧ m и t, $m_p \le m$, $\{\mathfrak{M}_n^{m,t}\}_n \in M$ такое, что $\mu(\{\mathfrak{M}_n^{m,t}\}_n) < \frac{1}{k_{4p+1}}$ и для почти всех КДЧ x, $x \in 0 \Delta 1$, верно

$x \in \{\mathfrak{M}_n^{m,t}\}_n \equiv \exists u\,(P(u, |\{F_n^m\}_n - \{F_n^{m+t}\}_n|, x) \& u > y_p)$.

Следовательно, согласно лемме 1 из [8] верно

$$\int_{\{\mathfrak{M}_n^{m,t}\}_n} |\{F_n^m\}_n - \{F_n^{m+t}\}_n| \le \int_{\{\mathfrak{M}_n^{m,t}\}_n} |\{F_n^m\}_n| + \int_{\{\mathfrak{M}_n^{m,t}\}_n} |\{F_n^{m+t}\}_n| < \frac{1}{2p} .$$

Пусть m и t НЧ, $m_p \le m$. Тогда

$$\int_0^1 |\{F_n^m\}_n - \{F_n^{m+t}\}_n| = \int_{\{\mathfrak{M}_n^{m,t}\}_n} |\{F_n^m\}_n - \{F_n^{m+t}\}_n| + \int_{\setminus\{\mathfrak{M}_n^{m,t}\}_n} |\{F_n^m\}_n -$$

$$\{F_n^{m+t}\}_n| < \frac{1}{2p} + \int_0^1 |\{F_n^m\}_n - \{F_n^{m+t}\}_n| \cdot \chi[\setminus\{\mathfrak{M}_n^{m,t}\}_n] \le$$

$$\frac{1}{2p} + \int_0^1 \frac{1}{2p} \cdot \chi[\setminus\{\mathfrak{M}_n^{m,t}\}_n] = \frac{1}{2p}(1 + \mu(\setminus\{\mathfrak{M}_n^{m,t}\}_n)) \le \frac{1}{p} .$$

На основании этой теоремы и леммы 3 из [4] сразу получаем:

<u>Следствие</u>. Пусть $\{\{G_n^m\}_n\}_m$ последовательность элементов S , которая фундаментальна в S , а $\{H_n\}_n \in L_1$ такие, что $\forall m\,(|\{G_n^m\}_n| \le \{H_n\}_n)$. Тогда существуют последовательность элементов $L_1 - \{\{F_n^m\}_n\}_m$, а $\{F_n\}_n \in L_1$ такие, что

$\forall m\,(\{F_n^m\}_n = \{G_n^m\}_n) \;\&\; (\int_0^1 |\{F_n^m\}_n - \{F_n\}_n| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0)$.

<u>Замечание 2</u>. Ввиду этого следствия и замечания 1 пример 1 из [4] показывает, что в конструктивной математике из сходимости почти всюду не следует сходимость по мере (т.е. в S). Таким образом, не имеет место теорема Лебега ([3], стр. 106).

Теорема 3. Пусть $\{H_m\}_m$ последовательность ступенчатых остовов, а $*$ один из знаков $>$, $\geq$, $\leq$ и $<$, такие, что

1) для почти всех КДЧ x, $x \in 0 \Delta 1$, верно $\exists u (P(u, \{H_m\}_m, x))$,

2) существуют последовательности КДЧ $\{y_k\}_k$ и $\{\mu^*_k\}_k$, для которых верно а) $\forall y \ell \exists k (|y - y_k| < \frac{1}{2^\ell})$, для всякого НЧ k множество $\wedge \lambda (\lambda \in 0 \Delta 1 \ \& \ \exists u (P(u, \{H_m\}_m, \lambda) \ \& \ u * y_k))$ измеримо по Лебегу и μ^*_k мера этого множества и

б) существуют последовательности НЧ $\{k^1_\ell\}_\ell$ и $\{k^2_\ell\}_\ell$ и КДЧ $x^{1,*}$ и $x^{2,*}$ такие, что $(y_{k^1_\ell} \nearrow_{\ell \to \infty} + \infty) \ \&$ $\& \ (y_{k^2_\ell} \searrow_{\ell \to \infty} - \infty)$, последовательности $\{\mu^*_{k^1_\ell}\}_\ell$ и $\{\mu^*_{k^2_\ell}\}_\ell$ сходятся соответственно к $x^{1,*}$ и $x^{2,*}$ и выполнено $((* \text{ Ӿ } > \vee * \text{ Ӿ } \geq) \supset x^{1,*} = 0 \ \& \ x^{2,*} = 1) \ \&$ $\& \ ((* \text{ Ӿ } \leq \vee * \text{ Ӿ } <) \supset x^{1,*} = 1 \ \& \ x^{2,*} = 0)$.

Тогда существует $\{G_m\}_m \in S$ такое, что $\{G_m\}_m = \{H_m\}_m$.

Определение 2. $\{F_m\}_m \in L_1$ мы назовем простым элементом L_1 (ср. [1], стр. 84), если существуют возрастающая система КДЧ $\{x_i\}_{i=1}^n$ и система элементов пространства $M - \{\{\mathfrak{M}^i_m\}_m\}_{i=1}^n$ такие, что

$\forall i j (1 \leq i < j \leq s \supset \{\mathfrak{M}_n^i\}_n \cap \{\mathfrak{M}_n^j\}_n = \{\Lambda\}_n) \& (\bigcup_{i=1}^{s} \{\mathfrak{M}_n^i\}_n = \{0 \gamma 1\}_n)$

и $\{F_n\}_n = \sum_{i=1}^{s} z_i \cdot \chi [\{\mathfrak{M}_n^i\}_n]$.

<u>Доказательство теоремы 3</u>. Мы ограничимся случаем, когда ж ж > . Существуют последовательности систем НЧ $\{\{\ell_i^m\}_{i=0}^{\tau_m}\}_m$ и элементов пространства $M - \{\{\{\mathfrak{M}_n^{m,i}\}_n\}_{i=0}^{\tau_m}\}_m$ такие, что для всякого НЧ m верно $y_{\ell_0^m} < -m \,\&\, \mu^{>}_{\ell_0^m} > 1 - \frac{1}{2^{m+2}} \,\&\, y_{\ell^m_{\tau_m}} > m \,\&\, \mu^{>}_{\ell^m_{\tau_m}} < \frac{1}{2^{m+2}} \,\&$

$\& \forall i ((1 \leq i \leq \tau_m \supset \neg (y_{\ell_i^m} = 0) \,\&\, y_{\ell_{i-1}^m} < y_{\ell_i^m} < y_{\ell_{i-1}^m} + \frac{1}{2^{m+2}}) \,\&\, (0 \leq i \leq \tau_m \supset$

$\supset \exists j (0 \leq j \leq \tau_{m+1} \,\&\, \ell_j^{m+1} = \ell_i^m)))$ и для любого ЦЧ i, $0 \leq i \leq \tau_m$, для почти всех КДЧ x выполнено

$x \in \{\mathfrak{M}_n^{m,i}\}_n \equiv (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \exists u (P(u, \{H_n\}_n, x) \,\&\, u > y_{\ell_i^m}))$.

Для всякого НЧ m мы определим

$$\{F_n^m\}_n \rightleftharpoons (y_{\ell_0^m} \cdot \chi [\setminus \{\mathfrak{M}_n^{m,0}\}_n] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\tau_m} y_{\ell_{i-1}^m} \cdot \chi [\{\mathfrak{M}_n^{m,i-1}\}_n \setminus \{\mathfrak{M}_n^{m,i}\}_n] +$$

$$+ y_{\ell^m_{\tau_m}} \cdot \chi [\{\mathfrak{M}_n^{m,\tau_m}\}_n]) .$$

Ясно, что $\{F_n^m\}_n$ простой элемент L_1 и

$$-(\{H_n\}_n^- + \{0 \gamma 1 \delta \frac{1}{2^m}\}_n) \leq \{F_n^m\}_n \leq \{H_n\}_n^+ \quad .$$

Для всякого НЧ m верно

$$\varphi_S(\{F_n^m\}_n \,\square\, \{F_n^{m+1}\}_n) < \mu(\setminus \{\mathfrak{M}_n^{m,0}\}_n) +$$

$$+\frac{\frac{1}{2^{m+2}}}{1+\frac{1}{2^{m+2}}}+\mu(\{\mathfrak{M}_n^{m,r_m}\}_n)=1-\mu^{>}_{\ell_0^m}+\frac{1}{2^{m+2}+1}+\mu^{>}_{\ell^m_{r_m}}<\frac{1}{2^m}\ .$$

Итак, последовательность $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ является фундаментальной в S и согласно лемме 2 из [4] существует элемент пространства S – $\{G_n\}_n$, который является пределом этой последовательности в S.

Легко доказать, что $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ почти равномерно сходится к $\{H_n\}_n$.

На основании этого и замечания 1 сразу получаем $\{G_n\}_n = \{H_n\}_n$.

Заметим, что для всякого НЧ m верно

$0 \le \{F_n^m\}_n^+ \le \{F_n^{m+1}\}^+ \le \{H_n\}_n^+ = \{G_n\}_n^+$, $\{F_n^m\}_n^+$ простой элемент L_1 и что последовательность $\{\{F_n^m\}_n^+\}_m$ сходится почти равномерно (и тогда и в S) к $\{H_n\}_n^+$.

На основании этого доказательства, теоремы 1 и следствия теоремы 2 сразу получаем следующее утверждение.

<u>Теорема 4</u>. Пусть $\{H_n\}_n \in S$. Тогда существует последовательность простых элементов пространства L_1 – $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ такая, что а) $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ сходится почти равномерно (и тогда и в S) к $\{H_n\}_n$,

$\forall m\,(-(\{H_n\}_n^- + \{0 \vee 1\sigma \frac{1}{2^m}\}_n) \le \{F_n^m\}_n \le \{H_n\}_n^+)$;

б) $\{\{F_n^m\}_n\}_m$ является фундаментальной в L_1

тогда и только тогда, когда существует $\{F_n\}_m \in L_1$ такое, что $\{F_n\}_m = \{H_n\}_m$; если $\{F_n\}_m \in L_1$ такое, что $\{F_n\}_m = \{H_n\}_m$, то $\int_0^1 |\{F_n^m\}_m - \{F_n\}_m| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$;

в) если $0 \leq \{H_n\}_m$, можно достигнуть того, чтобы дополнительно выполнялось

$$\forall m\ (0 \leq \{F_n^m\}_m \leq \{F_n^{m+1}\}_m \leq \{H_n\}_m)\ .$$

(Ср. [1] и [2] .)

Л и т е р а т у р а

[1] HALMOS P.R.: Measure Theory, London,1966.

[2] SAKS S.: Theory of the Integral, New York,1937.

[3] НАТАНСОН И.П.: Теория функций вещественной переменной, Москва,1957.

[4] ДЕМУТ О.: Пространства L_K и S в конструктивной математике, Comment.Math.Univ. Carolinae 10(1969),261-284.

[5] ДЕМУТ О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comment.Math.Univ.Carolinae 10(1969),463-492.

[6] ДЕМУТ О.: О представимости конструктивных функций слабо ограниченной вариации, Comment.Math.Univ. Carolinae 11(1970),421-434.

[7] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, Comment.Math.Univ.Carolinae 11(1970),705-726.

[8] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие представимости конструктивных функций в виде суперпозиции абсолютно непрерывных функций, Comment.Math.Univ.Carolinae 13(1972),227-251.

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova universita
Sokolovská 83, Praha 8
Československo

(Oblatum 30.5.1973)