Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

О представимости равномерно непрерывных конструктивных функций

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 14 (1973), No. 1, 7--25

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105466

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

14,1 (1973)

О ПРЕДСТАВИМОСТИ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Прага

В статье доказано, что всякая конструктивная функция, равномерно непрерывная на сегменте, представима на этом сегменте в виде суммы трех суперпозиций абсолютно непрерывных функций.

Ключевые слова: конструктивная функция, равномерно непрерывная функция, абсолютно непрерывная функция, суперпозиция функций

Н.К. Вари доказала, что в классической математике всякая функция равномерно непрерывная на сегменте $0 \Delta 1$ представима на этом сегменте в виде суммы трех суперпозиций абсолютно непрерывных функций ([1], стр. 611). В настоящей работе показано, что аналогичное утверждение верно и в конструктивной математике. При этом используются основная идея доказательства Н.К. Бари и результаты из [5] - [6].

В дальнейшем мы пользуемся определениями и обозначениями из [3] - [6].

<u>Теорема</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция. Тогда существуют абсолютно непрерывные функции ψ_1, ψ_2, ψ_3,

---

AMS, Primary: 02E99 Ref. Ž. 2.644.2
Secondary: 26A72

φ_1, φ_2 и φ_3 такие, что $\mathcal{F} = \psi_1 * \varphi_1 + \psi_2 * \varphi_2 + \psi_3 * \varphi_3$ и $\forall i\,(1 \le i \le 3 \supset 0 \le \varphi_i \le 1)$.

<u>Обозначения</u>. Пусть f и $\bar{f}$ равномерно непрерывные функции, h абсолютно непрерывная функция, $\xi \Delta \eta$ сегмент, $\xi \Delta \eta \subseteq 0 \Delta 1$, $\{L_k\}_k$ S_σ-множество, $\{\{L_{k,l}\}_l\}_k$, $\{\{^j H_n\}_n\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{^q \mathcal{G}\}_q$ последовательности S_σ-множеств, $\{f_k\}_k$ последовательность равномерно непрерывных функций, $\{^q \bar{g}\}_q$ последовательность абсолютно непрерывных функций, $\{k_m\}_m$ последовательность НЧ, $\{\{k_{k,m}\}_m\}_k$ последовательность последовательностей НЧ, $\{\{^q u_i\}_{i=1}^{k_q-1}\}_q$ и $\{\{\{^q v_{k,j}\}_{j=1}^{k_{k,q}-1}\}_{k=1}^{k_q}\}_q$ последовательность систем НЧ, $\{\{\{L_{k,l,m}\}_m\}_l\}_k$ последовательность последовательностей S_σ-множеств, x КДЧ, а s НЧ. Тогда

1) $[\{L_k\}_k, x]$ — S_σ-множество $\{(\partial\ell(L_k) + x) \Delta (\partial m(L_k) + x)\}_k$;

2) $\mathcal{C}(\{L_k\}_k, \xi \Delta \eta)$ обозначает: $\{L_k\}_k$ последовательность дизъюнктных сегментов, содержащихся в $\xi \Delta \eta$, мера $\{L_k\}_k$ меньше чем $|\xi \Delta \eta|$ и $\xi = \partial\ell(L_1) \,\&\, \eta = \partial m(L_2) \,\&\, \forall a\,(\xi < a < \eta \supset \exists k\,(\partial\ell(L_k) < a < \partial m(L_k)))$;

3) если $\mathcal{C}(\{L_k\}_k, \xi \Delta \eta)$, k_0 НЧ, $2 \le k_0$, а $\{P_i\}_{i=1}^{k_0-1}$ системы сегментов, то $\Xi(\{L_k\}_k, \{P_i\}_{i=1}^{k_0-1}, k_0)$ значит:

$$\partial m(L_1) = \partial\ell(P_1) < \partial m(P_1) < \partial\ell(P_2) < \ldots < \partial m(P_{k_0-2}) <$$
$$< \partial\ell(P_{k_0-1}) < \partial m(P_{k_0-1}) = \partial\ell(L_2),$$

сегменты систем $\{L_k\}_{k=1}^{k_0}$ и $\{P_i\}_{i=1}^{k_0-1}$ не перекрываются и вместе покрывают сегмент $\exists\lambda(L_1)\Delta\exists m(L_2)$ (т.е. $\xi\Delta\eta$);

4) $B_1(f,\{L_k\}_k,\{k_m\}_m,s,\xi\Delta\eta)$ обозначает: выполнено $\mathscr{C}(\{L_k\}_k,\xi\Delta\eta)$ и для всякого НЧ m верно $2<k_m<k_{m+1}$ и существует S_σ-множество $\mathscr{G}^n$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{s+m+1}}$ такое, что для системы сегментов $\{P_i^n\}_{i=1}^{k_m-1}$, для которой $\Xi(\{L_k\}_k,\{P_i^n\}_{i=1}^{k_m-1},k_m)$, имеет место $\forall i(1\le i\le k_m-1\supset\forall x(x\in P_i^n\supset$

$\supset f(x)\in\mathscr{G}^m)\ \&\ \exists k(k_m<k\le k_{m+1}\ \&\ L_k\equiv P_i^n))$;

5) $\overline{B}_1(f,\{L_k\}_k,\{k_m\}_m,s,\xi\Delta\eta)\rightleftharpoons$

$\rightleftharpoons(B_1(f,\{L_k\}_k,\{k_m\}_m,s,\xi\Delta\eta)\ \&$

$\&\ \forall x((x\le\xi\vee\eta\le x)\supset f(x)=0)\ \&\ |f|<\frac{1}{2^s})$;

6)

$$B_2(f,\overline{f},\{f_k\}_k,\{L_k\}_k,\{\{L_{k,l}\}_l\}_k,$$

(1) $$\{\{\{L_{k,l,m}\}_m\}_l\}_k,\{k_n\}_n,\{\{k_{k,n}\}_n\}_k,\{\{{}^q u_i\}_{i=1}^{k_q-1}\}_q,$$

$$\{\{\{{}^q v_{k,j}\}_{j=1}^{k_{k,q}-1}\}_{k=1}^{k_q}\}_q,\{{}^q\overline{g}\}_q,\{\{{}^j H_n\}_n\}_{j=0}^{\infty},\{{}^q\mathscr{G}\}_q,h,s,\xi\Delta\eta)$$

значит: а) $\overline{B}_1(\overline{f},\{L_k\}_k,\{k_n\}_n,s,\xi\Delta\eta)\ \&$

$\&\ \forall k(B_1(\overline{f},\{L_{k,l}\}_l,\{k_{k,m}\}_m,s+k+1,L_k)\ \&\ \overline{B}_1(f_k,\{L_{k,l}\}_l,$

$\{k_{k,m}\}_m,s+k+1,L_k))\ \&\ f=\overline{f}+\sum_{k=1}^{\infty}f_k\ \&$

$\&\ \forall x(\neg\exists k(\exists\lambda(L_k)<x<\exists m(L_k))\supset\overline{f}(x)=f(x))$,

для всяких НЧ k и l – $\langle \sigma, \bar{f} \rangle \llcorner L_k \lrcorner \subseteq \langle \sigma, f \rangle \llcorner L_k \lrcorner$, $\bar{f}$ абсолютно непрерывна на $L_{k,l}$ и постоянна на всяком сегменте последовательности $\{ L_{k,l,m} \}_m$, верно
$\mathfrak{C}(\{ L_{k,l,m} \}_m , L_{k,l})$,

б) для всякого НЧ q мера ${}^{q}\mathcal{Y}$ меньше чем $\dfrac{1}{2^{q+s-1}}$,существуют системы сегментов $\{ P_i \}_{i=1}^{k_q-1}$ и $\{ P_j^k \}_{j=1}^{k_{k,q}-1}$ $(1 \le k \le k_q)$ такие, что $\Xi(\{L_k\}_k ,$

$$\{P_i\}_{i=1}^{k_q-1}, k_q) \,\&\, \forall k (1 \le k \le k_q \supset \Xi(\{L_{k,l}\}_l, \{P_j^k\}_{j=1}^{k_{k,q}-1}, k_{k,q})) \,\&$$

$$\&\, \forall i (1 \le i \le k_q - 1 \supset k_q < {}^{q}\mu_i \le k_{q+1} \,\&\, L_{{}^{q}\mu_i} \subseteq P_i \,\&$$

$$\&\, \forall k (k < {}^{q}\mu_i \supset \neg (L_k \subseteq P_i))) \,\&\, \forall k j (1 \le k \le k_q \,\&\, 1 \le j \le k_{k,q} -$$

$$- 1 \supset k_{k,q} < {}^{q}v_{k,j} \le k_{k,q+1} \,\&\, L_{k,{}^{q}v_{k,j}} \subseteq P_j^k \,\&\, \forall l (l < {}^{q}v_{k,j} \supset \neg (L_{k,l} \subseteq P_j^k))),$$

α) последовательность $\{ {}^{q}H_n \}_n$ образованы сегментами P_i $(1 \le i \le k_q - 1)$, P_j^k $(1 \le k \le k_q \,\&\, 1 \le j \le k_{k,q} - 1)$, $L_{k,l,m}$ $(1 \le k \le k_q \,\&\, 1 \le l \le k_{k,q} \,\&\, q < m)$,

$$β)\ \forall x (\neg \exists i (1 \le i \le k_q - 1 \,\&\, Эл(P_i) < x < Эп(P_i)) \,\&$$

$$\&\, \neg \exists k j (1 \le k \le k_q \,\&\, 1 \le j \le k_{k,q} - 1 \,\&\, Эл(P_j^k) < x < Эп(P_j^k)) \supset {}^{q}\bar{g}(x) = \bar{f}(x)),$$

${}^{q}\bar{g}$ постоянна на сегментах систем
$\{ Эл(P_i) \triangle Эл(L_{{}^{q}\mu_i,1,1}) \}_{i=1}^{k_q-1}$, $\{ Эп(L_{{}^{q}\mu_i,1,1}) \triangle Эп(P_i) \}_{i=1}^{k_q-1}$,
$\{ Эл(P_j^k) \triangle Эл(L_{k,{}^{q}v_{k,j},1}) \}_{j=1}^{k_{k,q}-1}$ $(1 \le k \le k_q)$ и
$\{ Эп(L_{k,{}^{q}v_{k,j},1}) \triangle Эп(P_j^k) \}_{j=1}^{k_{k,q}-1}$ $(1 \le k \le k_q)$, ${}^{q}\bar{g}$
линейна на сегментах систем $\{ L_{{}^{q}\mu_i,1,1} \}_{i=1}^{k_q-1}$ и
$\{ L_{k,{}^{q}v_{k,j},1} \}_{j=1}^{k_{k,q}-1}$ $(1 \le k \le q)$,

γ) выполнено $\forall x\,(x \in \{{}^{q}H_n\}_n \supset \bar{f}(x) \in {}^{q}\mathcal{Y} \,\&\, {}^{q}\bar{g}(x) \in {}^{q}\mathcal{Y}) \,\&$

$\& \forall k l m\,((1 \le k \le k_q \,\&\, 1 \le l \le k_{k,q} \,\&\, q < m \vee 1 \le k \le k_q \,\&\, k_{k,q} < l \vee k_q < k) \supset$

$\supset (\bar{f}(\mathrm{Эл}(L_{k,l,m})) - \frac{1}{2^{s+2+k+l+m}}) \Delta (\bar{f}(\mathrm{Эл}(L_{k,l,m})) + \frac{1}{2^{s+2+k+l+m}}) \subseteq {}^{q}\mathcal{Y})$.

в) последовательность $\{{}^{0}H_n\}_n$ образована сегментами ${}^{1}H_n$ $(1 \le n)$ и $L_{k,l,1}$ $(1 \le k \le k_1 \,\&\, 1 \le l \le k_{k,1})$,

г) существуют неубывающая абсолютно непрерывная функция $\bar{h}$ и $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ такие, что для почти всех КДЧ x верно $x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \equiv (x \in \xi \Delta \eta \,\&\, \neg(x \in \{{}^{0}H_n\}_n))$ и что

$$\forall x\,(0 \le x \le 1 \supset \bar{h}(x) = \frac{\int_0^x \chi_{\llcorner \{\mathfrak{M}_n\}_n \lrcorner}}{\int_0^1 \chi_{\llcorner \{\mathfrak{M}_n\}_n \lrcorner}} \,\&\, h(x) = \bar{h}(x) - \frac{\min(\max(x,\xi),\eta) - \xi}{|\xi \Delta \eta|})$$

и, следовательно, $\forall x\,((x \le \xi \supset \bar{h}(x) = h(x) = 0) \,\&$

$\& (\eta \le x \supset \bar{h}(x) = 1 \,\&\, h(x) = 0)) \,\&$

$\& \sum_{n=1}^{\infty} V[\bar{h}]_{\llcorner {}^{0}H_n \lrcorner} = 0 \,\&\, \forall k l m\,(V[\bar{h}]_{\llcorner L_{k,l,m} \lrcorner} = 0)$.

<u>Замечание 1</u>. а) Из свойств функций и последовательностей, отмеченных в 6а), следует существование функции h и остальных последоватекьностей таких, что (1).

б) Если (1), то $\forall q\,(\{{}^{q+1}H_n\}_n \subseteq \{{}^{q}H_n\}_n \subseteq \{{}^{0}H_n\}_n \subseteq$

$\subseteq \xi \Delta \eta \,\&\, \forall x\,(\neg \exists n\,(\mathrm{Эл}({}^{q}H_n) < x < \mathrm{Эп}({}^{q}H_n)) \supset \bar{f}(x) =$

$= {}^{q}\bar{g}(x)) \,\&\, \forall t\,(q < t \supset \sum_{n=1}^{\infty} V[{}^{q}\bar{g}]_{\llcorner {}^{t}H_n \lrcorner} = 0) \,\&$

$\& \forall k l m\,(1 \le k \le k_q \,\&\, 1 \le l \le k_{k,q} \supset V[{}^{q}\bar{g}]_{\llcorner L_{k,l,m} \lrcorner} = 0))$.

Замечание 2. Для всяких сегмента $\xi \triangle \eta$, $\xi \triangle \eta \subseteq 0 \triangle 1$, КДЧ x и последовательности сегментов $\{H_n\}_n$ таких, что ряд $\sum_n |H_n|$ сходится к КДЧ меньшему чем $x < |\xi \triangle \eta|$, можно построить S_σ-множество $\{L_k\}_k$ меры меньшей чем x такое, что $\mathscr{C}(\{L_k\}_k, \xi \triangle \eta)$ &

$$\& \forall x (x \in \xi \triangledown \eta \,\&\, \neg\neg \exists n (x \in H_n) \supset \exists k (\exists \lambda (L_k) < x < \exists n (L_k))) .$$

На основании замечания 2, [3] и [4] легко доказать следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $\xi \triangle \eta$ сегмент, $\xi \triangle \eta \subseteq 0 \triangle 1$, f равномерно непрерывная функция, и q НЧ. Тогда можно построить равномерно непрерывную функцию g и S_σ-множество $\{L_k\}_k$ такие, что $\forall x ((x \le \xi \vee \eta \le x) \supset g(x) =$

$= f(x)) \,\&\, \langle \sigma, g \rangle_{\llcorner} \xi \triangle \eta_{\lrcorner} \le \langle \sigma, f \rangle_{\llcorner} \xi \triangle \eta_{\lrcorner}$ &

$\& \mathscr{C}(\{L_k\}_k, \xi \triangle \eta) \,\&\, |f - g| < \dfrac{1}{2^q}$,

g абсолютно непрерывна на $\xi \triangle \eta$ и постоянна на всяком сегменте последовательности $\{L_k\}_k$.

Лемма 2. Пусть f равномерно непрерывная функция, $\xi \triangle \eta$ сегмент, $\{L_k\}_k$ S_σ-множество, и s НЧ такие, что $\xi \triangle \eta \subseteq 0 \triangle 1 \,\&\, \mathscr{C}(\{L_k\}_k, \xi \triangle \eta)$. Тогда существуют равномерно непрерывные функции φ и ψ, последовательность S_σ-множеств $\{\{L_{k,l}\}_l\}_k$ и последовательность НЧ $\{k_n\}_n$, для которых верно $f = \varphi + \psi$,

$\overline{B}_1(\varphi, \{L_k\}_k, \{k_n\}_n, s, \xi \triangle \eta)$ &

$\& B_1(\psi, \{L_k\}_k, \{k_n\}_n, s, \xi \triangle \eta)$ &

$\& \langle \sigma, \psi \rangle_{\llcorner} \xi \triangle \eta_{\lrcorner} \le \langle \sigma, f \rangle_{\llcorner} \xi \triangle \eta_{\lrcorner}$

и для всякого НЧ k выполнено $\mathcal{C}(\{L_{k,l}\}_l, L_k)$, ψ абсолютно непрерывна на L_k и постоянна на всяком сегменте последовательности $\{L_{k,l}\}_l$.

<u>Доказательство</u>. 1)а) Мы определим $k_0 \rightleftharpoons 2$, $P_1^0 \rightleftharpoons \text{Эл}(L_1) \Delta \text{Эл}(L_2)$ и построим равномерно непрерывные функции $\overline{\varphi}_0$ и $\overline{\psi}_0$ такие, что $\overline{\varphi}_0 = 0 \,\&\, \overline{\psi}_0 = f - \overline{\varphi}_0$. Тогда функция $\overline{\varphi}_0$ постоянна на P_1^0 и выполнено

$\langle \sigma, \overline{\psi}_0 \rangle_L \,\xi \Delta \eta_\lrcorner \leq \langle \sigma, f \rangle_L \,\xi \Delta \eta_\lrcorner$.

б) Пусть n НЧ, пусть уже построены НЧ k_{n-1}, системы сегментов $\{P_i^{n-1}\}_{i=1}^{k_{n-1}-1}$ и равномерно непрерывные функции $\overline{\varphi}_{n-1}$ и $\overline{\psi}_{n-1}$ такие, что $\Xi(\{L_k\}_k$, $\{P_i^{n-1}\}_{i=1}^{k_{n-1}-1}$, $k_{n-1})$, $\overline{\varphi}_{n-1}$ постоянна на всяком сегменте системы $\{P_i^{n-1}\}_{i=1}^{k_{n-1}-1}$, $\overline{\psi}_{n-1} = f - \overline{\varphi}_{n-1} \,\&$

$\& \langle \sigma, \overline{\psi}_{n-1} \rangle_L \,\xi \Delta \eta_\lrcorner \leq \langle \sigma, f \rangle_L \,\xi \Delta \eta_\lrcorner$.

Мы обозначим $\forall i\, (1 \leq i \leq k_{n-1} - 1 \supset (\mu_{n-1,i} \rightleftharpoons \langle I, f \rangle_L P_i^{n-1}{}_\lrcorner) \,\&$
$\& (\sigma_{n-1,i} \rightleftharpoons \langle S, f \rangle_L P_i^{n-1}{}_\lrcorner))$. Согласно теореме 1.3 из [2] существует система слов $\{R_i^{n-1}\}_{i=1}^{k_{n-1}-1}$ такая, что

$\forall i\, (1 \leq i \leq k_{n-1} - 1 \supset (R_i^{n-1} \,\text{I}\, \Lambda \supset \sigma_{n-1,i} - \mu_{n-1,i} <$
$< \dfrac{1}{k_{n-1} \cdot 2^{s+n+1}}) \,\&\, (\neg (R_i^{n-1} \,\text{I}\, \Lambda) \supset 0 < \sigma_{n-1,i} - \mu_{n-1,i}))$.

α) Если $\forall i\, (1 \leq i \leq k_{n-1} - 1 \supset R_i^{n-1} \,\text{I}\, \Lambda)$, то мы определим $\overline{\varphi}_n \rightleftharpoons \overline{\varphi}_{n-1}$, $\overline{\psi}_n \rightleftharpoons \overline{\psi}_{n-1}$ и построим НЧ k_n и систему сегментов $\{P_j^n\}_{j=1}^{k_n-1}$ такие, что

$$\forall i\,(1 \le i \le k_{m-1} - 1 \supset \exists k\,(k_{m-1} < k \le k_m \,\&\, L_k \subseteq \tag{2}$$
$$\subseteq P_i^{m-1}))\,\&\, \boxminus(\{L_k\}_k,\ \{P_j^m\}_{j=1}^{k_m-1},\ k_m)\,.$$

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{k_{m-1}-1} \langle \omega, \bar{\psi}_m \rangle \llcorner P_i^{m-1} \lrcorner = \sum_{i=1}^{k_{m-1}-1} (\sigma_{m-1,i} - \mu_{m-1,i}) < \frac{1}{2^{s+m+1}}\,.$$

β) Пусть $\{i_\ell\}_{\ell=1}^{t}$ непустая возрастающая система всех НЧ i такая, что $1 \le i \le k_{m-1} - 1 \,\&\, \neg(R_i^{m-1} \mathrel{\underline{\underline{\times}}} \Lambda)$. Существуют НЧ q_m, s_m и k_m и системы сегментов $\{P_j^m\}_{j=1}^{k_m-1}$ такие, что

$$q_m > 5\,.\,(1 + 2^{s+m+1}\,.\,k_{m-1}\,.\,\max_{1 \le \ell \le t}(\sigma_{m-1,i_\ell} - \mu_{m-1,i_\ell}))\,\&$$
$$\&\, \forall x y\,(|x-y| \le \frac{1}{s_m} \supset |f(x) - f(y)| < \frac{1}{4q_m^2+1}\,.$$
$$.\min_{1 \le \ell \le t}(\sigma_{m-1,i_\ell} - \mu_{m-1,i_\ell}))\,\&\, \forall j\,(1 \le j \le k_m - 1 \supset |P_j^m| < \frac{1}{2s_m})$$

и (2).

Пусть ℓ НЧ, $1 \le \ell \le t$. Можно построить НЧ $j_{\ell,1}$ и $j_{\ell,2}$, системы НЧ $\{p_j^1\}_{j=j_{\ell,1}}^{j_{\ell,2}}$ и $\{p_j^2\}_{j=j_{\ell,1}}^{j_{\ell,2}}$ и системы целых чисел $\{u_j\}_{j=j_{\ell,1}}^{j_{\ell,2}}$, для которых выполнено $\text{Эл}(P_{i_\ell}^{m-1}) = \text{Эл}(P_{j_{\ell,1}}^m) \,\&\, \text{Эп}(P_{j_{\ell,2}}^m) = \text{Эп}(P_{i_\ell}^{m-1})$ и для любого НЧ j, $j_{\ell,1} \le j \le j_{\ell,2}$,

$$\text{Эп}(L_{p_j^1}) = \text{Эл}(P_j^m)\,\&\,\text{Эп}(P_j^m) = \text{Эл}(L_{p_j^2})\,\&\, 0 \le u_j \le q_m\,\&$$
$$\&\, \mu_{m-1,i_\ell} + (u_j - \frac{1}{2})\,.\,\frac{\sigma_{m-1,i_\ell} - \mu_{m-1,i_\ell}}{q_m} < f(\text{Эл}(P_j^m)) <$$

$$< \mu_{n-1,i_\ell} + \left(u_j + \frac{1}{2} + \frac{1}{4q_n}\right) \cdot \frac{\sigma_{n-1,i_\ell} - \mu_{n-1,i_\ell}}{q_n} .$$

Пусть j НЧ, $j_{\ell,1} \le j \le j_{\ell,2}$. Если верно

$$(j = j_{\ell,1} \vee j = j_{\ell,2} \vee (j_{\ell,1} < j < j_{\ell,2} \,\&\, (u_j \le 1 \vee q_n - 1 \le u_j))),$$

то пусть g^ℓ_j нулевая функция. Если $j_{\ell,1} < j < j_{\ell,2}\,\&$ $\&\, 2 \le u_j \le q_n - 2$, то мы построим функцию g^ℓ_j такую, что

$$\forall x (((x \le (\text{Эm}(L_{p^1_j}) - \frac{1}{3s_n} \cdot |L_{p^1_j}|) \vee (\text{Эл}(L_{p^2_j}) +$$
$$+ \frac{1}{3s_n} \cdot |L_{p^2_j}|) \le x) \supset g^\ell_j(x) = 0) \,\&\, (x \in P^n_j \supset g^\ell_j(x) =$$
$$= \mu_{n-1,i_\ell} + u_j \cdot \frac{\sigma_{n-1,i_\ell} - \mu_{n-1,i_\ell}}{q_n} - f(\text{Эл}(P^n_j))))$$

и что g^ℓ_j линейна на сегментах

$$(\text{Эm}(L_{p^1_j}) - \frac{1}{3s_n} \cdot |L_{p^1_j}|) \,\Delta\, \text{Эm}(L_{p^1_j}) \quad \text{и}$$

$$\text{Эл}(L_{p^2_j}) \,\Delta\, (\text{Эл}(L_{p^2_j}) + \frac{1}{3s_n} \cdot |L_{p^2_j}|) .$$

Мы определим $g^\ell \rightleftharpoons \sum_{j=j_{\ell,1}}^{j_{\ell,2}} g^\ell_j$. Тогда

$$|g^\ell| < \frac{\sigma_{n-1,i_\ell} - \mu_{n-1,i_\ell}}{q_n} < \frac{1}{k_{n-1} \cdot 2^{s+n+3}} \,\&$$

$$\&\, \forall x ((x \le \text{Эл}(P^{n-1}_{i_\ell}) \vee \text{Эm}(P^{n-1}_{i_\ell}) \le x) \supset g^\ell(x) = 0) \,\&$$

$$\&\, \langle \sigma, \overline{\psi}_{n-1} + g^\ell \rangle_{\llcorner P^{n-1}_{i_\ell} \lrcorner} \equiv \langle \sigma, \overline{\psi}_{n-1} \rangle_{\llcorner P^{n-1}_{i_\ell} \lrcorner}$$

и существует S_σ-множество $\mathcal{Y}^{n,i_\ell}$ меры меньшей чем

$\frac{1}{k_{m-1}\cdot 2^{s+m+1}}$ такое, что $\forall j x (j_{\ell,1} \leq j \leq j_{\ell,2}$ &

& $x \in P_j^m \supset (\overline{\psi}_{m-1}(x) + g^{\ell}(x)) \in \mathcal{G}^{n,i_\ell})$.

Мы определим $g \rightleftharpoons \sum_{\ell=1}^{t} g^{\ell}$, $\overline{\varphi}_m \rightleftharpoons \overline{\varphi}_{m-1} - g$ и $\overline{\psi}_m \rightleftharpoons \overline{\psi}_{m-1} + g$. Заметим, что $\forall i \, (1 \leq i \leq k_{m-1} - 1$ & $\& \, R_i^{m-1} \, \mathbb{E} \Lambda \supset \langle \omega, \overline{\psi}_m \rangle_{\llcorner} P_i^{m-1} \lrcorner = \sigma_{m-1,i} - \mu_{m-1,i} < \frac{1}{k_{m-1}\cdot 2^{s+m+1}})$.

Итак, в случаях α) и β) существует S_σ -множество $\mathcal{G}^m$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{s+m+1}}$ такое, что $\forall j x (1 \leq j \leq k_m - 1 \,\&\, x \in P_j^m \supset \overline{\psi}_m(x) \in \mathcal{G}^n)$, верно

$$\overline{\psi}_m = f - \overline{\varphi}_m \,\&\, |\overline{\varphi}_m - \overline{\varphi}_{m-1}| < \frac{1}{k_{m-1}\cdot 2^{s+m+3}} \,\&$$

$$\& \forall k x (1 \leq k \leq k_{m-1} \,\&\, x \in L_k \supset \overline{\varphi}_m(x) = \overline{\varphi}_{m-1}(x) \,\&\, \overline{\psi}_m(x) = \overline{\psi}_{m-1}(x)) \,\&$$

$$\& \forall i \, (1 \leq i \leq k_{m-1} - 1 \supset \langle \sigma, \overline{\psi}_m \rangle_{\llcorner} P_i^{m-1} \lrcorner \leq \langle \sigma, \overline{\psi}_{m-1} \rangle_{\llcorner} P_i^{m-1} \lrcorner)$$

и, следовательно, $\langle \sigma, \overline{\psi}_m \rangle_{\llcorner} \xi \Delta \eta \lrcorner \leq \langle \sigma, \overline{\psi}_{m-1} \rangle_{\llcorner} \xi \Delta \eta \lrcorner \leq \leq \langle \sigma, f \rangle_{\llcorner} \xi \Delta \eta \lrcorner$. Функция $\overline{\varphi}_m$ постоянна на всяком сегменте системы $\{P_j^m\}_{j=1}^{k_m - 1}$.

в) Посредством $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ мы обозначим равномерно непрерывные функции, являющиеся пределами последовательностей $\{\overline{\varphi}_m\}_m$ и $\{\overline{\psi}_m\}_m$. Тогда $f = \overline{\varphi} + \overline{\psi}$,

$$\langle \sigma, \overline{\psi} \rangle_{\llcorner} \xi \Delta \eta \lrcorner \leq \langle \sigma, f \rangle_{\llcorner} \xi \Delta \eta \lrcorner \,\&$$

$$\& \, B_1(\overline{\psi}, \{L_k\}_k, \{k_m\}_m, s, \xi \Delta \eta) \,\&\, |\overline{\varphi}| < \frac{1}{2^{s+3}} \,\&$$

$$\& \forall x ((x \leq \xi \vee \eta \leq x) \supset \overline{\varphi}(x) = 0) \,\&\, \forall m j x (1 \leq j \leq k_m - 1 \,\&$$

$\& x \in P_j^n \supset |\bar{\varphi}(x) - \bar{\varphi}(\text{Эл}(P_j^n))| < \frac{1}{k_n \cdot 2^{s+n+3}})$.

2) Для всякого НЧ k мы построим согласно лемме 1 S_σ -множество $\{L_{k,l}\}_l$ и равномерно непрерывную функцию $\varkappa_k$ такие, что $\mathcal{C}(\{L_{k,l}\}_l, L_k)$ &

$$\& \forall x ((x \leq \text{Эл}(L_k) \vee \text{Эп}(L_k) \leq x) \supset \varkappa_k(x) = \bar{\psi}(x)) \&$$

$$\& \langle \sigma, \varkappa_k \rangle_{\llcorner} L_{k \lrcorner} \leq \langle \sigma, \bar{\psi} \rangle_{\llcorner} L_{k \lrcorner} \& |\bar{\psi} - \varkappa_k| < \frac{1}{2^{s+2k}},$$

$\varkappa_k$ абсолютно непрерывна на сегменте L_k и постоянна на всяком сегменте последовательности $\{L_{k,l}\}_l$.

Мы определим $\psi \rightleftharpoons \bar{\psi} + \sum_{k=1}^{\infty} (\varkappa_k - \bar{\psi})$ и $\varphi \rightleftharpoons \bar{\varphi} - \sum_{k=1}^{\infty} (\varkappa_k - \bar{\psi})$. Тогда φ и ψ равномерно непрерывные функции, удовлетворяющие ввиду сказанного и того, что $\forall n j x (1 \leq j \leq k_n - 1 \& x \in P_j^n \supset |\varphi(x) - \varphi(\text{Эл}(P_j^n))| <$

$$< |\bar{\varphi}(x) - \bar{\varphi}(\text{Эл}(P_j^n))| + \frac{1}{2^{s+2k_n+2}} < \frac{3}{k_n \cdot 2^{s+n+4}} < \frac{1}{k_n \cdot 2^{s+n+2}}),$$

всем условиям леммы.

На основании леммы 2 и замечания 1 легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 3</u>. Пусть f равномерно непрерывная функция, $\xi \triangle \eta$ сегмент, $\xi \triangle \eta \subseteq 0 \triangle 1$, $\{L_k\}_k$ S_σ -множество, $\{\{L_{k,l}\}_l\}_k$ последовательность S_σ -множеств, $\{k_n\}_n$ последовательность НЧ, а s НЧ такие, что

$$\bar{B}_1(f, \{L_k\}_k, \{k_n\}_n, s, \xi \triangle \eta) \& \forall k\, \mathcal{C}(\{L_{k,l}\}_l, L_k) .$$

Тогда существуют равномерно непрерывная функция $\bar{f}$, абсолютно непрерывная функция h , последовательности равномерно непрерывных функций $\{f_k\}_k$ и абсолютно непрерывных функций $\{{}^{q}\bar{g}\}_q$, последовательности S_σ -множеств $\{\{{}^{j}H_n\}_n\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{{}^{q}\mathcal{G}\}_q$, последовательности последовательностей S_σ -множеств $\{\{\{L_{k,\ell,m}\}_m\}_\ell\}_k$ и НЧ $\{\{k_{k,m}\}_m\}_k$ и последовательности систем НЧ $\{\{{}^{q}u_i\}_{i=1}^{k_q-1}\}_q$ и $\{\{\{{}^{q}v_{k,j}\}_{j=1}^{k_{k,q}-1}\}_{k=1}^{k_q}\}_q$ такие, что (1).

<u>Доказательство теоремы.</u> I) Мы обозначим ${}^{0}K \rightleftharpoons 0 \Delta 1$.

а) Согласно лемме 1 можно построить абсолютно непрерывную функцию ${}^{-2}\varkappa$, равномерно непрерывную функцию ${}^{-1}f$ и S_σ -множество $\{{}^{1}K_\ell\}_\ell$ такие, что ${}^{-2}\varkappa$ постоянна на всяком сегменте последовательности $\{{}^{1}K_\ell\}_\ell$,

$$\mathcal{F} = {}^{-2}\varkappa + {}^{-1}f \;\&\; \forall x\,((x \leq \text{Эл}({}^{0}K) \vee \text{Эп}({}^{0}K) \leq x) \supset$$
$$\supset {}^{-1}f(x) = 0) \;\&\; \mathcal{C}(\{{}^{1}K_\ell\}_\ell, {}^{0}K) \;\&\; |{}^{-1}f| < \frac{1}{2^5} .$$

Для всяких НЧ q и m мы обозначим ${}^{q}g^{-2} \rightleftharpoons {}^{-2}\varkappa$ и ${}^{q}H_m^{-2} \rightleftharpoons {}^{1}K_{q+m}$ и построим S_σ -множество ${}^{q}\mathcal{G}^{-2}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{q+2}}$ такое, что

$$\forall m\,(({}^{-2}\varkappa(\text{Эл}({}^{1}K_{q+m})) - \frac{1}{2^{q+m+5}})\Delta({}^{-2}\varkappa(\text{Эл}({}^{1}K_{q+m})) +$$
$$+ \frac{1}{2^{q+m+5}}) \subseteq {}^{q}\mathcal{G}^{-2}) .$$

б) Согласно лемме 2 можно построить равномерно непрерывные функции ${}^{-1}\varkappa$ и ${}^{0}f$, последовательность НЧ $\{{}^{1}k_n\}_m$ и последовательность S_σ -множеств $\{\{{}^{2}K_{k,\ell}\}_\ell\}_k$ такие, что

(3) ${}^{-1}f = {}^{-1}\varkappa + {}^{0}f \;\&\; \bar{B}_1({}^{-1}\varkappa, \{{}^{1}K_k\}_k, \{{}^{1}k_m\}_m, 5, {}^{0}K)$ &

$\& \overline{\mathrm{B}}_1({}^0f, \{{}^1K_k\}_k, \{{}^1k_m\}_m, 5, {}^0K) \& \forall k\, \mathcal{C}(\{{}^2K_{k,l}\}_l, {}^1K_k)$,

для всякого НЧ k функция ${}^{-1}æ$ абсолютно непрерывна на ${}^1K_k$ и постоянна на всяком сегменте последовательности $\{{}^2K_{k,l}\}_l$.

Пусть q НЧ. Существуют системы сегментов $\{P_i\}_{i=1}^{{}^1k_q-1}$ и системы НЧ $\{{}^q u_i^{-1}\}_{i=1}^{{}^1k_q-1}$ такие, что

$\boxminus(\{{}^1K_k\}_k, \{P_i\}_{i=1}^{{}^1k_q-1}, {}^1k_q) \& \forall i\,(1 \le i \le {}^1k_q - 1 \supset {}^1k_q <$
$< {}^q u_i^{-1} \le {}^1k_{q+1} \& {}^1K_{{}^q u_i^{-1}} \subseteq P_i)$.

Пусть $\{{}^q H_m^{-1}\}_m$ $S_б$ -множество, образованное сегментами P_i $(1 \le i \le {}^1k_q - 1)$ и ${}^2K_{k,l}$ $(1 \le k \le {}^1k_q \& q < l)$. Мы построим абсолютно непрерывную функцию ${}^q\overline{g}^{-1}$ такую, что

$\forall x(\neg\exists i\,(1 \le i \le {}^1k_q - 1 \& Эл(P_i) < x < Эп(P_i)) \supset {}^q\overline{g}^{-1}(x) = {}^{-1}æ(x))$

и что для любого НЧ i, $1 \le i \le {}^1k_q - 1$, ${}^q\overline{g}^{-1}$ постоянна на сегментах $Эл(P_i) \vartriangle Эл({}^2K_{{}^q u_i^{-1},1})$ и $Эп({}^2K_{{}^q u_i^{-1},1}) \vartriangle Эп(P_i)$ и линейна на сегменте ${}^2K_{{}^q u_i^{-1},1}$.

Ввиду (3) существует $S_б$ -множество ${}^q\mathcal{Y}^{-1}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{q+3}}$, для которого верно

$\forall x\,(x \in \{{}^q H_m^{-1}\}_m \supset {}^{-1}æ(x) \in {}^q\mathcal{Y}^{-1}) \&$

$\& \forall k\, l\,((1 \le k \le {}^1k_q \& q < l \vee {}^1k_q < k) \supset ({}^{-1}æ(Эл({}^2K_{k,l})) -$
$- \frac{1}{2^{6+k+l}}) \vartriangle ({}^{-1}æ(Эл({}^2K_{k,l})) + \frac{1}{2^{6+k+l}}) \subseteq {}^q\mathcal{Y}^{-1})$.

в) Пусть n и $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ НЧ, пусть уже построены сегмент ${}^{n-1}K_{p_1,p_2,\ldots,p_{n-1}}$, равномерно непрерывная функция ${}^{n-1}f^{p_1,\ldots,p_{n-1}}$, S_σ -множество $\{{}^nK_{p_1,\ldots,p_{n-1},k}\}_k$ и последовательности S_σ -множеств $\{\{{}^{n+1}K_{p_1,\ldots,p_{n-1},k,l}\}_l\}_k$ и НЧ $\{{}^n\varkappa_{p_1,\ldots,p_{n-1},m}\}_m$ такие, что

$\overline{B}_1({}^{n-1}f^{p_1,\ldots,p_{n-1}}, \{{}^nK_{p_1,\ldots,p_{n-1},k}\}_k, \{{}^n\varkappa_{p_1,\ldots,p_{n-1},m}\}_m, n+4+p_1+\ldots+p_{n-1}, {}^{n-1}K_{p_1,\ldots,p_{n-1}}) \,\&\, \forall k\, \mathcal{C}(\{{}^{n+1}K_{p_1,\ldots,p_{n-1},k,l}\}_l, {}^nK_{p_1,\ldots,p_{n-1},k})$.

Тогда согласно лемме 3 существуют равномерно непрерывные функции ${}^{n-1}\text{æ}^{p_1,\ldots,p_{n-1}}$, ${}^nf^{p_1,\ldots,p_{n-1},k}$ $(1 \le k)$, абсолютно непрерывные функции ${}^{n-1}h^{p_1,\ldots,p_{n-1}}$, ${}^q\overline{g}^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}}$ $(1 \le q)$, последовательности S_σ -множеств $\{\{{}^jH_m^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}}\}_m\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{{}^q\varphi^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}}\}_q$, последовательности последовательностей S_σ -множеств $\{\{\{{}^{n+2}K_{p_1,\ldots,p_{n-1},k,l,m}\}_m\}_l\}_k$ и НЧ $\{\{{}^{n+1}\varkappa_{p_1,\ldots,p_{n-1},k,m}\}_m\}_k$ и последовательности систем НЧ $\{\{{}^q\mu_i^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}}\}_{i=1}^{{}^n\varkappa_{p_1,\ldots,p_{n-1},q}-1}\}_q$ и $\{\{\{{}^qv_{k,j}^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}}\}_{j=1}^{{}^{n+1}\varkappa_{p_1,\ldots,p_{n-1},k,q}-1}\}_{k=1}^{{}^n\varkappa_{p_1,\ldots,p_{n-1},q}}\}_q$ такие, что

$B_2({}^{n-1}f^{p_1,\ldots,p_{n-1}}, {}^{n-1}\text{æ}^{p_1,\ldots,p_{n-1}}, \{{}^nf^{p_1,\ldots,p_{n-1},k}\}_k, \{{}^nK_{p_1,\ldots,p_{n-1},k}\}_k,$
$\{\{{}^{n+1}K_{p_1,\ldots,p_{n-1},k,l}\}_l\}_k, \{\{\{{}^{n+2}K_{p_1,\ldots,p_{n-1},k,l,m}\}_m\}_l\}_k,$
$\{{}^n\varkappa_{p_1,\ldots,p_{n-1},m}\}_m, \{\{{}^{n+1}\varkappa_{p_1,\ldots,p_{n-1},k,m}\}_m\}_k,$
$\{\{{}^q\mu^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}}\}_{i=1}^{{}^n\varkappa_{p_1,\ldots,p_{n-1},q}-1}\}_q,$
$\{\{\{{}^qv_{k,j}^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}}\}_{j=1}^{{}^{n+1}\varkappa_{p_1,\ldots,p_{n-1},k,q}-1}\}_{k=1}^{{}^n\varkappa_{p_1,\ldots,p_{n-1},q}}\}_q,$

$\{{}^{q}\bar{g}^{n-1;p_1,\dots,p_{n-1}}\}_q, \{\{{}^{j}H_m^{n-1;p_1,\dots,p_{n-1}}\}_m\}_{j=0}^{\infty}, \{{}^{q}\mathcal{G}^{n-1;p_1,\dots,p_{n-1}}\}_q,$

${}^{n-1}h^{p_1,\dots,p_{n-1}}, n+4+p_1+\dots+p_{n-1}, {}^{n-1}K_{p_1,\dots,p_{n-1}})$.

В частности, $|{}^{n-1}\varkappa^{p_1,\dots,p_{n-1}}| < \dfrac{1}{2^{n+4+p_1+\dots+p_{n-1}}}$ &

$\& \forall k(\bar{B}_1({}^{n}f^{p_1,\dots,p_{n-1},k}, \{{}^{n+1}K_{p_1,\dots,p_{n-1},k,l}\}_l,$

$\{{}^{n+1}\varkappa_{p_1,\dots,p_{n-1},k,m}\}_m, n+5+p_1+\dots+p_{n-1}+k, {}^{n}K_{p_1,\dots,p_{n-1},k}) \&$

$\& \forall l\, \mathcal{C}(\{{}^{n+2}K_{p_1,\dots,p_{n-1},k,l,m}\}_m, {}^{n+1}K_{p_1,\dots,p_{n-1},k,l}))$

и для всякого НЧ q меры ${}^{q}\mathcal{G}^{n-1;p_1,\dots,p_{n-1}}$ меньше чем

$\dfrac{1}{2^{q+n+3+p_1+\dots+p_{n-1}}}$, $\{{}^{q+1}H_m^{n-1;p_1,\dots,p_{n-1}}\}_m \subseteq \{{}^{q}H_m^{n-1;p_1,\dots,p_{n-1}}\}_m \subseteq$

$\subseteq \{{}^{0}H_m^{n-1;p_1,\dots,p_{n-1}}\}_m \subseteq {}^{n-1}K_{p_1,\dots,p_{n-1}}$ &

$\& \forall x((\neg \exists m(\text{Эл}({}^{q}H_m^{n-1;p_1,\dots,p_{n-1}}) < x < \text{Э}m({}^{q}H_m^{n-1;p_1,\dots,p_{n-1}})) \supset$

$\supset {}^{q}\bar{g}^{n-1;p_1,\dots,p_{n-1}}(x) = {}^{n-1}\varkappa^{p_1,\dots,p_{n-1}}(x)) \&$

$\& (x \in \{{}^{q}H_m^{n-1;p_1,\dots,p_{n-1}}\}_m \supset {}^{n-1}\varkappa^{p_1,\dots,p_{n-1}}(x) \in {}^{q}\mathcal{G}^{n-1;p_1,\dots,p_{n-1}}$ &

$\& {}^{q}\bar{g}^{n-1;p_1,\dots,p_{n-1}}(x) \in {}^{q}\mathcal{G}^{n-1;p_1,\dots,p_{n-1}})) \&$

$\& \forall t(q < t \supset$

$\supset \sum_{m=1}^{\infty} V[{}^{q}\bar{g}^{n-1;p_1,\dots,p_{n-1}}]_{\llcorner}{}^{t}H_m^{n-1;p_1,\dots,p_{n-1}}{}_{\lrcorner} = 0) \&$

$\& \forall k l m(1 \leq k \leq {}^{n}\varkappa_{p_1,\dots,p_{n-1},q} \& 1 \leq l \leq {}^{n+1}\varkappa_{p_1,\dots,p_{n-1},k,q} \supset$

$\supset V[{}^{q}\bar{g}^{n-1;p_1,\dots,p_{n-1}}]_{\llcorner}{}^{n+2}K_{p_1,\dots,p_{n-1},k,l,m}{}_{\lrcorner} = 0)$.

г) Пусть $q, n, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ НЧ. Мы определим ${}^{q}g^{-1} \rightleftharpoons {}^{q}\bar{g}^{-1} + \sum_{i=1}^{{}^1m_q^{-1}} ({}^{q}\bar{g}^{-1}(\text{Эт}({}^{2}K_{q_{w_i^{-1}},1})) - {}^{q}\bar{g}^{-1}(\text{Эл}({}^{2}K_{q_{w_i^{-1}},1}))) \cdot$

$\cdot {}^{2}h^{q_{w_i^{-1}},1}$, ${}^{q}g^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}} \rightleftharpoons {}^{q}\bar{g}^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}} + \sum_{i=1}^{n_{m}p_1,\ldots,p_{n-1},q^{-1}} ($

${}^{q}\bar{g}^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}}(\text{Эт}({}^{n+2}K_{p_1,\ldots,p_{n-1},q_{w_i}^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}},1,1})) -$

$-{}^{q}\bar{g}^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}}(\text{Эл}({}^{n+2}K_{p_1,\ldots,p_{n-1},q_{w_i}^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}},1,1}))) \cdot$

$\cdot {}^{n+2}h^{p_1,\ldots,p_{n-1},q_{w_i}^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}},1,1} + \sum_{\varkappa=1}^{n_{m}p_1,\ldots,p_{n-1},q} \sum_{j=1}^{n+1_{m}p_1,\ldots,p_{n-1},\varkappa,q^{-1}} ($

${}^{q}\bar{g}^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}}(\text{Эт}({}^{n+2}K_{p_1,\ldots,p_{n-1},\varkappa,q_{v_{\varkappa,j}}^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}},1})) -$

$-{}^{q}\bar{g}^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}}(\text{Эл}({}^{n+2}K_{p_1,\ldots,p_{n-1},\varkappa,q_{v_{\varkappa,j}}^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}},1}))) \cdot$

$\cdot {}^{n+2}h^{p_1,\ldots,p_{n-1},\varkappa,q_{v_{\varkappa,j}}^{n-1;p_1,\ldots,p_{n-1}},1}$.

II) Пусть i НЧ, $1 \leq i \leq 3$. Мы построим равномерно непрерывную функцию $\mathcal{F}_i$ такую, что $\mathcal{F}_i = {}^{i-3}\text{æ} +$

$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p_1=1}^{\infty} \sum_{p_2=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_{i+3\cdot(j-1)}=1}^{\infty} {}^{i+3\cdot(j-1)}\text{æ}^{p_1,\ldots,p_{i+3\cdot(j-1)}}$.

Заметим, что ввиду I) для всяких НЧ $j, p_1, p_2, \ldots, p_{i+3\cdot(j-1)}$

$\mathcal{F}_i(\text{Эл}({}^{i+3\cdot(j-1)}K_{p_1,\ldots,p_{i+3\cdot(j-1)}})) =$

$= \mathcal{F}_i(\text{Эт}({}^{i+3\cdot(j-1)}K_{p_1,\ldots,p_{i+3\cdot(j-1)}}))$ &

& $\forall x(x \in {}^{i+3\cdot(j-1)}K_{p_1,\ldots,p_{i+3\cdot(j-1)}} \supset$

$\supset |\mathcal{F}_i(x) - \mathcal{F}_i(\text{Эл}({}^{i+3\cdot(j-1)}K_{p_1,\ldots,p_{i+3\cdot(j-1)}}))| <$

$< \dfrac{1}{2^{i+3\cdot(j-1)+4+p_1+\ldots+p_{i+3\cdot(j-1)}}}$) &

& $\forall q\, x\,(x \in \{{}^{q}H^{i+3\cdot(j-1);p_1,\ldots,p_{i+3\cdot(j-1)}}\}_m \supset$

$\supset \mathcal{F}_i(x) \in [{}^q\mathcal{G}^{i+3.(j-1);p_1,\dots,p_{i+3.(j-1)}}$,

$\mathcal{F}_i(\exists\lambda({}^{i+3.(j-1)}K_{p_1,\dots,p_{i+3.(j-1)}}))])$.

Очевидно выполнено $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3$. Согласно лемме 1 из [6] для завершения доказательства достаточно доказать $\forall i\ (1 \le i \le 3 \supset \mathcal{Y}_0(\mathcal{F}_i))$.

Пусть i НЧ, $1 \le i \le 3$.

Пусть q НЧ. Мы для всякого НЧ j определим

$Q_{i,q,j}(p_1,p_2,\dots,p_{i+3.(j-1)}) \rightleftharpoons \forall t\ (1 \le t \le i+3.(j-1) \supset$

$\supset (\exists m\, m\ (1 \le m \le 2\ \&\ t = i+3.(m-2)+m) \supset$

$\supset 1 \le p_t \le {}^t k_{p_1,\dots,p_{t-1},q})\ \&$

$\&\ (\exists m\ (t = i+3.(m-1)) \supset 1 \le p_t \le q))$.

Существует абсолютно непрерывная функция $\mathcal{F}_i^q$ такая, что

$$\mathcal{F}_i^q = {}^q g^{i-3} + \sum_{j=1}^{q} \sum_{Q_{i,q,j}(p_1,\dots,p_{i+3.(j-1)})} {}^q g^{i+3.(j-1);p_1,\dots,p_{i+3.(j-1)}} .$$

Пусть $\{{}^qL_m^i\}_m$ S_σ-множество, образованное сегментами ${}^qH_m^{i-3}$ $(1 \le m)$, ${}^qH_m^{i+3.(j-1);p_1,\dots,p_{i+3.(j-1)}}$, где $1 \le j \le q\ \&\ 1 \le m\ \&\ Q_{i,q,j}(p_1,\dots,p_{i+3.(j-1)})$,

и ${}^{i+3.q}K_{p_1,\dots,p_{i+3.q}}$, где

$Q_{i,q,q+1}(p_1,p_2,\dots,p_{i+3q})$.

Тогда ввиду I)

$\forall x(\neg\exists m(\exists\lambda({}^qL_m^i) < x < \exists m({}^qL_m^i)) \supset \mathcal{F}_i(x) =$

$= \mathcal{F}_i^q(x))$.

Пусть ${}^q\bar{\mathcal{L}}^i$ S_σ -множество меры меньшей чем $\frac{1}{2^{q+1}}$, образованное рациональными сегментами, которое содержит S_σ -множества ${}^q\mathcal{Y}^{i-3}$,

$[{}^q\mathcal{Y}^{i+3\cdot(j-1);p_1,\ldots,p_{i+3\cdot(j-1)}}, \mathcal{F}_i(\text{Эл}({}^{i+3\cdot(j-1)}K_{p_1,\ldots,p_{i+3\cdot(j-1)}}))]$,

где $1 \le j \le q$ & $Q_{i,q,j}(p_1, p_2, \ldots, p_{i+3\cdot(j-1)})$ и сегменты

$(\mathcal{F}_i(\text{Эл}({}^{i+3q}K_{p_1,\ldots,p_{i+3q}})) - \frac{1}{2^{i+3q+4+p_1+\ldots+p_{i+3q}}}) \Delta$

$(\mathcal{F}_i(\text{Эл}({}^{i+3q}K_{p_1,\ldots,p_{i+3q}})) + \frac{1}{2^{i+3q+4+p_1+\ldots+p_{i+3q}}})$,

где $Q_{i,q,q+1}(p_1, p_2, \ldots, p_{i+3q})$. Тогда

$\forall x(x \in \{{}^qL^i_m\}_m \supset \mathcal{F}_i(x) \in {}^q\bar{\mathcal{L}}^i \;\&\; \mathcal{F}_i^q(x) \in {}^q\bar{\mathcal{L}}^i)$.

Заметим, что $\forall q t(\{{}^{q+1}L^i_m\}_m \subseteq \{{}^qL^i_m\}_m \subseteq 0 \Delta 1 \;\&$

$\& (q < t \supset \sum_{m=1}^{\infty} V[\mathcal{F}_i^q]_{\llcorner}{}^tL^i_{m\lrcorner} = 0))$.

Для всякого НЧ q можно согласно замечанию 1 из [4] построить S_σ -множество ${}^q\mathcal{L}^i$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^q}$, которое является последовательностью рациональных сегментов и удовлетворяет условию

$\forall x(x \in {}^q\mathcal{L}^i \equiv \neg\neg\exists t(q \le t \;\&\; x \in {}^t\bar{\mathcal{L}}^i))$.

Тогда, как следует из сказанного выше, выполнено

$\mathcal{Y}_0(\mathcal{F}_i, \{\mathcal{F}_i^q\}_q, \{\{{}^qL^i_m\}_m, \{{}^q\mathcal{L}^i\}_q)$.

<u>Замечание 3</u>. Можно построить функцию f такую, что

1) $\forall x y(|f(x) - f(y)| \le |x - y|)$, f всюду дифференцируема, возрастает на $0 \Delta 1$ и

2) не существуют абсолютно непрерывные функции ψ_1, ψ_2, ψ, φ_1 и φ_2 такие, что $f = \psi_1 * \varphi_1 + \psi_2 * \varphi_2 + \psi$.

Литература

[1] BARY N.: Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues, Math.Annalen 103(1930),185-248, 598-653.

[2] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д.: Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, Труды Мат.инст.им.В.А.Стеклова,т. LXVII (1962),385-457.

[3] ДЕМУТ О.: Пространства L_n и S в конструктивной математике, Comment.Math.Univ. Carolinae 10(1969), 261-284.

[4] ДЕМУТ О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10(1969),463-492.

[5] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие представимости конструктивных функций в виде суперпозиции абсолютно непрерывных функций, Comment.Math. Univ. Carolinae 13(1972),227-251.

[6] ДЕМУТ О.: Достаточное условие представимости конструктивной функций в виде суммы двух суперпозиций абсолютно непрерывных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 13(1972),265-282.

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova universita
Sokolovská 83, Praha 8
Československo

(Oblatum 7.2.1972)