Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

I. A. Černjavskaja

Об аналоге одной оценочной теоремы Н. В. Ефшова для поверхностей эллиптического пространства

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 13 (1972), No. 4, 727--743

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105456`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

13, 4 (1972)

ОБ АНАЛОГЕ ОДНОЙ ОЦЕНОЧНОЙ ТЕОРЕМЫ Н.В. ЕФИМОВА ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

И.А. ЧЕРНЯВСКАЯ, Ростов-на-Дону

Известна следующая, принадлежащая Н.В. Ефимову [1,2], оценочная теорема в евклидовом пространстве E_3, относящаяся к поверхностям отрицательной кривизны K, которые имеют однозначную проекцию на плоскость α:

существует постоянная C, $C = const$, такая, что, если на регулярной поверхности $\mathcal{F}$

$$K \leq -a^2 < 0, \qquad (a = const > 0),$$

то
$$\rho \leq \frac{C}{a},$$

где ρ - радиус круга, целиком лежащего в области $\mathcal{D}$.

Л.А. Сидоров [3] построил аналог этой теоремы для поверхностей в гиперболическом пространстве кривизны $k = -1$. Теорема Л.А. Сидорова утверждает, что

существует постоянная C, $(C = const > 0)$, такая, что для любой однозначно ортогонально проектирующейся на плоскость α регулярной поверхности $\mathcal{F}$ при условии

AMS, Primary: 53A35 Ref. Ž. 3.931.213

$$K_e \leq -a^2 < 0 , \qquad (a = const > 0) ,$$

справедлива оценка

$$th\, \rho \leq \frac{c}{a} ,$$

где $K_e = K - \varkappa$ - внешняя кривизна поверхности $\mathcal{F}$; ρ - радиус круга, целиком лежащего внутри проекции поверхности $\mathcal{F}$ на плоскость α.

Цель настоящей работы - изложить аналог теоремы Н.В. Ефимова для поверхностей эллиптического пространства.

п.1. Трехмерное эллиптическое пространство кривизны $\varkappa = \frac{1}{r^2}$ будем интерпретировать в виде гиперсферы S_3 радиуса r с отождествленными диаметрально противоположными точками в четырехмерном евклидовом пространстве E_4. Введем в E_4 ортогональный базис $\{\bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$:

$$(\bar{e}_i \bar{e}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j , \\ r^2, & i = j . \end{cases}$$

Введем в эллиптическом пространстве вейерштрассовы координаты, сопоставляя с каждой точкой его декартовы координаты $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ соответствующей точки гиперсферы S_3. Для однозначности изометрического отображения эллиптического пространства на гиперсферу потребуем дополнительно

(1) $$x^0 > 0$$

Рассмотрим в эллиптическом пространстве S_3 две регулярные изометричные поверхности $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$:

$$\bar{x} = \bar{x}(u,v), \quad \bar{x}^2 = r^2 ,$$
$$\bar{x}' = \bar{x}'(u,v), \quad \bar{x}'^2 = r^2 .$$

Погореловское отображение [4]:

$$(2) \quad \bar{y} = T\bar{x}\,\frac{r^2\bar{x} - \bar{e}_0(\bar{e}_0\bar{x})}{\bar{e}_0(\bar{x}+\bar{x}')} \qquad \bar{y}' = T'\bar{x}' = \frac{r^2\bar{x}' - \bar{e}_0(\bar{e}_0\bar{x}')}{\bar{e}_0(\bar{x}+\bar{x}')}$$

переводит $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ в пару регулярных изометричных поверхностей Φ, Φ' евклидова пространства $E_0(x^0 = 0)$ [4].

Обозначим K - гауссову кривизну поверхности $\mathcal{F}$. Поставим задачу:

найти связь между внешней кривизной $K_e = K - \frac{1}{r^2}$ поверхности $\mathcal{F}$ и гауссовой кривизной $\tilde{K}$ поверхности Φ в соответсвенных при этом отображении точках $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \Phi$.

Обозначим E - конец вектора $\bar{e}_0$. Некоторым движением A эллиптического пространства переведем поверхность $\mathcal{F}$ в конгруэнтную ей поверхность $A\mathcal{F}$ так, чтобы точка $M \in \mathcal{F}$ перешла в точку $E \in A\mathcal{F}$.

Отображение

$$(3) \qquad \tilde{y} = \tilde{T}(A\tilde{x}) = \frac{r^2A\bar{x} - \bar{e}_0(\bar{e}_0, A\bar{x})}{\bar{e}_0(\bar{x} + A\bar{x})}$$

переведет поверхность $A\mathcal{F}$ в поверхность $\tilde{\Phi}$ евклидова пространства E_0 $(x^0 = 0)$. Отображение B поверхности Φ на поверхность $\tilde{\Phi} = B\Phi$, при котором точке $\bar{y} = T\bar{x}$ сопоставляется точка $\tilde{y} = \tilde{T}(A\bar{x})$, является движением, и, следовательно, поверхности Φ и $B\Phi$ конгруэнтны [4].

Как следуют из (3), отображение $\widetilde{T}$ переводит точку E пространства S_3 в начало координат 0 пространства E_0. Поэтому движение B переводит точку $\mathcal{N} \in \Phi$ в точку $0 \in B\Phi$.

Очевидно

$$(4) \qquad Ke\big|_{\mathcal{M}\in\mathcal{F}} = Ke\big|_{E\in A\mathcal{F}}, \quad \widetilde{K}\big|_{\mathcal{N}\in\Phi} = \widetilde{K}\big|_{0\in B\Phi}.$$

Найдем сначала связь между $Ke\big|_E$ и $\widetilde{K}\big|_0$. Обозначим $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$; L, M, N и e, f, g; ℓ, m, n - коэффициенты первой и второй основных форм соответственно поверхностей $A\mathcal{F}$ и $B\Phi$. Как известно [4]

$$(5) \quad \mathcal{E} = (A\bar{x})_u^2, \quad \mathcal{F} = (A\bar{x})_u \cdot (A\bar{x})_v, \quad \mathcal{G} = (A\bar{x})_v^2,$$

$$(6) \quad L = \frac{(A\bar{x}, (A\bar{x})_u, (A\bar{x})_v, (A\bar{x})_{uu})}{|[A\bar{x}, (A\bar{x})_u, (A\bar{x})_v]|},$$

$$(7) \quad M = \frac{(A\bar{x}, (A\bar{x})_u, (A\bar{x})_v, (A\bar{x})_{uv})}{|[A\bar{x}, (A\bar{x})_u, (A\bar{x})_v]|},$$

$$(8) \quad N = \frac{(A\bar{x}, (A\bar{x})_u, (A\bar{x})_v, (A\bar{x})_{vv})}{|[A\bar{x}, (A\bar{x})_u, (A\bar{x})_v]|},$$

$$(9) \quad K_e = \frac{LN - M^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2},$$

и аналогичные формулы имеют место для e, f, g, ℓ, m, n.

Вычислим коэффиценты e, f, g; ℓ, m, n поверхности

$B\Phi = \tilde{\Phi}$ в точке 0. Для этого, дифференцируя (3) по u, v получаем:

$$(10)\quad \tilde{y}_u = \frac{r^2(A\bar{x})_u - \bar{e}_0(\bar{e}_0(A\bar{x})_u)}{\bar{e}_0(\bar{x} + A\bar{x})} -$$

$$- \frac{r^2 A\bar{x} - \bar{e}_0(\bar{e}_0, A\bar{x})}{(\bar{e}_0 x + \bar{e}_0 A\bar{x})^2} (\bar{e}_0 \bar{x}_u + \bar{e}_0(A\bar{x})_u),$$

$$(11)\quad \tilde{y}_v = \frac{r^2(A\bar{x})_v - \bar{e}_0(\bar{e}_0, (A\bar{x})_v)}{\bar{e}_0(\bar{x} + A\bar{x})} -$$

$$- \frac{r^2 A\bar{x} - \bar{e}_0(\bar{e}_0, A\bar{x})}{(\bar{e}_0\bar{x} + \bar{e}_0 A\bar{x})^2} (\bar{e}_0 \bar{x}_v + \bar{e}_0(A\bar{x})_v),$$

$$\tilde{y}_{uu} = \frac{r^2(A\bar{x})_{uu} - \bar{e}_0(\bar{e}_0, (A\bar{x})_{uu})}{\bar{e}_0(\bar{x} + A\bar{x})} -$$

$$-2\frac{r^2(A\bar{x})_u - \bar{e}_0(\bar{e}_0, (A\bar{x})_u)}{(\bar{e}_0\bar{x} + \bar{e}_0 A\bar{x})^2}(\bar{e}_0\bar{x}_u + \bar{e}_0(A\bar{x})_u) -$$

$$- \frac{r^2 A\bar{x} - \bar{e}_0(\bar{e}_0, A\bar{x})}{(\bar{e}_0 x + \bar{e}_0 A\bar{x})^2}(\bar{e}_0\bar{x}_{uu} + \bar{e}_0(A\bar{x})_{uu}) +$$

$$(12)\quad + 2\frac{r^2 A\bar{x} - \bar{e}_0(\bar{e}_0, A\bar{x})}{(\bar{e}_0\bar{x} + \bar{e}_0 A\bar{x})^3}(\bar{e}_0\bar{x}_u + \bar{e}_0(A\bar{x})_u)^2,$$

и соответствующие выражения для $\tilde{y}_{uv}$, $\tilde{y}_{vv}$. В точке $E \in A\mathcal{F}$ $A\bar{x} = \bar{e}_0$, поэтому

$$(13)\quad (\bar{e}_0 A\bar{x})|_E = r^2,$$

$$(14)\quad (\bar{e}_0(A\bar{x})_u)|_E = (\bar{e}_0, (A\bar{x})_v)|_E = 0.$$

Учитывая (5) и равенства (10),(11),(13),(14), получаем:

$$(15)\quad e|_0 = \tilde{y}_u^2|_0 = \frac{r^4 (A\bar{x})_u^2}{(\bar{e}_0\bar{x} + \bar{e}_0 A\bar{x})^2}\Big|_E = \frac{\mathcal{E}|_E}{(1 + x^0|_u)^2},$$

и аналогично находим

$$(16)\qquad f|_0 = \frac{\mathcal{F}|_E}{(1+x^0|_M)^2}, \quad g|_0 = \frac{\mathcal{G}|_E}{(1+x^0|_M)^2}.$$

Подсчитаем теперь коэффициенты l, m, n второй основной формы поверхности $\widetilde{\Phi} = B\Phi$ в точке 0.

$$(17)\qquad l|_0 = \frac{(\tilde{y}_u \tilde{y}_v \tilde{y}_{uu})}{|[\tilde{y}_u \tilde{y}_v]|}\Big|_0 = \frac{(\bar{e}_0 \tilde{y}_u \tilde{y}_v \tilde{y}_{uu})}{|[\bar{e}_0 \tilde{y}_u \tilde{y}_v]|}\Big|_0$$

(здесь $(\tilde{y}_u \tilde{y}_v \tilde{y}_{uu})$ - смешанное произведение векторов $\tilde{y}_u$, $\tilde{y}_v$, $\tilde{y}_{uu}$, как векторов евклидова пространства $E_0\ (x^0 = 0)$; $(\bar{e}_0 \tilde{y}_u \tilde{y}_v \tilde{y}_{uu})$ - смешанное произведение тех же векторов как векторов пространства E_4, [4].

Подставляя в (17) вместо $\tilde{y}_u, \tilde{y}_v, \tilde{y}_{uu}$ их выражения из (10 - 12) и учитывая (13),(14) получим:

$$l|_0 = \frac{(\bar{e}_0, (A\bar{x})_u, (A\bar{x})_v, (A\bar{x})_{uu}) \cdot \dfrac{r^6}{(\bar{e}_0\bar{x} + \bar{e}_0 A\bar{x})^3}}{|[\bar{e}_0, (A\bar{x})_u, (A\bar{x})_v]| \cdot \dfrac{r^4}{(\bar{e}_0\bar{x} + \bar{e}_0 A\bar{x})^2}}\Bigg|_E,$$

или учитывая (6),

$$(18)\qquad l|_0 = \frac{L|_E}{(1+x^0|_M)}.$$

Аналогично находим

$$(19)\qquad m|_0 = \frac{M|_E}{(1+x^0|_M)}, \quad n|_0 = \frac{N|_E}{(1+x^0|_M)}.$$

В силу равенств (15),(16),(18),(19) можем записать:

$$\widetilde{K}|_0 = \frac{ln - m^2}{eg - f^2}\Big|_0 = \frac{LN - M^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}\Big|_E \cdot \frac{(1+x^0|_M)^4}{(1+x^0|_M)^2},$$

или, в силу (9)

$$\widetilde{K}|_0 = K_e|_E (1 + x^0|_M)^2 \quad . \tag{20}$$

Из (20), согласно (4), получаем:

$$\widetilde{K}|_{N \in \Phi} = K_e|_{M \in \mathcal{F}} \cdot (1 + x^0|_M)^2 \quad .$$

Так как точка M была взята на поверхности $\mathcal{F}$ произвольно, то можно окончательно записать:

$$\widetilde{K} = K_e \left[\frac{r^2 + (\bar{e}_0 \bar{x})}{r^2}\right]^2 \quad . \tag{21}$$

Это аналог известной формулы Л.А. Сидорова [3].

В силу (1) из (21) следует, что

$$|\widetilde{K}| > |K_e| \quad . \tag{22}$$

п.2. Пусть в эллиптическом пространстве S_3 задана прямая p, проходящая через точку E - конец вектора e_0:

$$\bar{x} = \varphi(\bar{e}_0 + \bar{a}t), \quad \bar{x}^2 = r^2 \tag{23}$$

где $\bar{a}$ - направляющий вектор длины r прямой p, приложенный к точке E, т.е.

$$(\bar{a}\bar{e}_0) = 0, \quad (\bar{a}\bar{a}) = r^2 ; \tag{24}$$

φ - нормирующий множитель:

$$\varphi = \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{(\bar{e}_0 + \bar{a}t)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \quad . \tag{25}$$

Отложим на прямой p отрезок EC. Пусть точке C отвечает значение параметра $t = t_0$. Обозначим S - длину отрезка EC.

Рассмотрим специальное погореловское отображение

$$\bar{y} = \frac{\kappa^2 \bar{x} - \bar{e}_0(\bar{e}_0 \bar{x})}{\bar{e}_0(\bar{x} + A\bar{x})} \tag{26}$$

где A - тождественное преобразование пространства S_3. Тогда (26) можно записать в виде:

$$\bar{y} = \frac{\kappa^2 \bar{x} - \bar{e}_0(\bar{e}_0 \bar{x})}{2(\bar{e}_0 \bar{x})} \tag{27}$$

Отображение (27) переводит отрезок EC в отрезок $\tilde{E}\tilde{C}$, лежащий на прямой $\tilde{p}$ - образе прямой p при отображении (27) в пространстве E_0 $(x^0 = 0)$.

Как следует из (27), точка $\tilde{E}$, соответствующая при этом отображении точке E, совпадает с началом координат O. Точке $\tilde{C}$, как и точке C отвечает значение параметра $t = t_0$. Обозначим длину отрезка $\tilde{E}\tilde{C}$ через $\tilde{\varphi}$. Имеет место

<u>Теорема 1</u>.

Если один из концов отрезка прямой в эллиптическом пространстве совпадает с концом вектора $\bar{e}_0$, то его длина φ и длина $\tilde{\varphi}$ его образа при специальном погореловском отображении (27) связана соотношением

$$\tilde{\varphi} = \frac{\kappa}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{\kappa} \tag{28}$$

Доказательство. Длина ρ отрезка EC прямой p в пространстве S_3 может быть найдена по формуле [4]:

$$(29)\qquad \rho = \int_0^{t_0} \sqrt{\bar{x}_t'^{\,2}}\, dt \quad .$$

Из (23) получаем

$$(30)\qquad \bar{x}_t' = \varphi_t' (\bar{e}_0 + \bar{a}t) + \varphi\bar{a} \quad .$$

Дифференцируя (25) по t и подставляя в (30), находим:

$$(\bar{x}_t')^2 = \left(\frac{\kappa}{1+t^2}\right)^2 \quad ,$$

Теперь из (29) получаем:

$$(31)\qquad \rho = \kappa \operatorname{arctg}(t_0) \quad .$$

Уравнение прямой $\tilde{p}$ как образа прямой p :

$$(32)\qquad \tilde{y} = \frac{\kappa^2\varphi(\bar{e}_0 + \bar{a}t) - \bar{e}_0(\varphi(\bar{e}_0+\bar{a}t), \bar{e}_0)}{2\varphi(\bar{e}_0^2 + (\bar{e}_0\bar{a})t)} = \frac{t\bar{a}}{2} \quad .$$

Так как концам отрезка $\tilde{E}\tilde{C}$ прямой $\tilde{p}$ отвечают значения параметра $t = 0,\ t = t_0$ соответственно, то длина его $\tilde{\rho}$ равна:

$$\tilde{\rho} = \frac{\kappa t_0}{2} \quad .$$

Из (31) и (32) следует (28).

п. 3. Пусть p - прямая в пространстве S_3, проходящая через точку E и q - произвольная прямая эллиптического пространства, пересекающая p в точке D под прямым углом. Прямые p, q зададим соотвестственно уравнениями:

$$\bar{x} = \rho_1(\bar{e}_0 + \bar{a}t), \quad \bar{x}^2 = \varkappa^2, \tag{33}$$

$$\bar{X} = \varphi_2(\bar{x}(t_0) + \bar{b}v), \quad \bar{X}^2 = \varkappa^2, \tag{34}$$

где $\bar{x}(t_0)$ - точка $\mathcal{D}$ встречи прямых p и q, т.е.

$$\bar{x}(t_0) = \bar{X}(0), \tag{35}$$

$\bar{a}$ - направляющий вектор длины $\varkappa$ прямой p в точке $\mathcal{D}$;
$\bar{b}$ - направляющий вектор длины $\varkappa$ прямой q в той же точке $\mathcal{D}$, т.е.

$$\bar{a}\bar{x}(t_0) = 0, \quad \bar{a}\bar{a} = \varkappa^2, \tag{36}$$

$$\bar{b}\bar{X}(0) = 0, \quad \bar{b}\bar{b} = \varkappa^2. \tag{37}$$

Так как прямые p, q пересекаются в точке $\mathcal{D}$ под прямым углом, то

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{x}'_t(t_0)\bar{X}'_v(0) = 0. \tag{38}$$

Погореловское отображение (27) переводит прямые p, q соответственно в прямые $\tilde{p}, \tilde{q}$ евклидова пространства $E_0(x^0 = 0)$ [4]. Имеет место следующая

<u>Лемма 1.</u>

Образы $\bar{p}, \bar{q}$ при отображении (27) двух ортогональных прямых p, q пространства S_3 в том случае, когда одна из них проходит через точку E, тоже ортогональны.

<u>Доказательство.</u> Уравнение прямых $\tilde{p}, \tilde{q}$ как образов прямых p, q, согласно (27), имеют соответственно вид:

$$\bar{y} = \frac{\varkappa^2\bar{x} - \bar{e}_0(\bar{x}\bar{e}_0)}{2(\bar{e}_0\bar{x})}, \tag{39}$$

$$(40) \qquad \bar{Y} = \frac{\kappa^2 \bar{X} - \bar{e}_0 (\bar{X}\bar{e}_0)}{2(\bar{e}_0 \bar{X})} \ ,$$

где вместо $\bar{x}$, $\bar{X}$ следует подставить правые части равенств (33),(34) соответственно. Покажем, что

$$\bar{y}'_t \bar{Y}'_v \Big|_{\substack{t=t_0 \\ v=0}} = 0 \ .$$

Дифференцируя (39) по t, (40) по v, получим:

$$\bar{y}'_t = \frac{\kappa^2 \bar{x}'_t - \bar{e}_0(\bar{x}'_t, \bar{e}_0)}{2(\bar{e}_0 \bar{x})} - \frac{\kappa^2 \bar{x} - \bar{e}_0(\bar{x}\bar{e}_0)}{2(\bar{e}_0 \bar{x})^2}(\bar{e}_0 \bar{x}'_t) \ ,$$

$$\bar{Y}'_v = \frac{\kappa^2 \bar{X}'_v - \bar{e}_0(\bar{X}'_v e_0)}{2(\bar{e}_0 \bar{X})} - \frac{\kappa^2 \bar{X} - \bar{e}_0(\bar{X} e_0)}{2(\bar{e}_0 \bar{X})^2}(\bar{e}_0 \bar{X}'_v) \ .$$

Перемножая почленно эти равенства и используя (35) - (38), находим:

$$(41) \qquad \bar{y}'_t \bar{Y}'_v \Big|_{\substack{t=t_0 \\ v=0}} = \frac{\kappa^4 (\bar{e}_0 \bar{x}'_t)(\bar{e}_0 \bar{X}'_v)(\bar{x}\bar{X})}{4(\bar{e}_0 \bar{x})^2 (\bar{e}_0 \bar{X})^2} \Bigg|_{\substack{t=t_0 \\ v=0}} \ .$$

Покажем, что

$$(\bar{e}_0 \bar{X}'_v)\big|_{v=0} = 0 \ .$$

Действительно, в силу (38), (34), (35), следует:

$$(42) \qquad (\bar{a}\bar{X}'_v)\big|_{v=0} = \bar{a}\bar{b} = 0 \ ,$$

$$(43) \qquad \bar{x}(t_0)\bar{X}'_v(0) = \bar{X}(0)\bar{X}'_v(0) = 0 \ .$$

При $t = t_0$ из (33) получаем:

$$\bar{x}(t_0) = \varphi(\bar{e}_0 + \bar{a} t_0) \ ,$$

или

(44)
$$\bar{e}_0 = \frac{\bar{x}(t_0)}{\varphi} - \bar{a}\, t_0 \ .$$

Умножая (44) скалярно на вектор $\bar{X}'_v(0)$ и учитывая (42), (43), находим:

(45)
$$\bar{e}_0 \bar{X}'_v(0) = 0 \ ,$$

а теперь из (41) следует
$$(\bar{\psi}'_t \, \bar{Y}'_v)\Big|_{\substack{t=t_0 \\ v=0}} = 0 \ ,$$

т.е. прямые $\tilde{p}, \tilde{q}$ ортогональны.

Лемма 2.

Погореловское отображение (27) переводит всякую плоскость α, проходящую через точку E, и всякую прямую p, ортогональную плоскости α в пространстве S_3, в ортогональные плоскость $\tilde{\alpha}$ и прямую $\tilde{p}$ евклидова пространства $E_0\ (x^0 = 0)$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве S_3 произвольную прямую m, ортогональную той же плоскости α. Пусть прямые p, m заданы соответственно уравнениями

(46)
$$\bar{x}_1 = \varphi_1(\bar{a} + \bar{b} t) \ , \quad \bar{x}_1^2 = r^2 \ ,$$

(47)
$$\bar{x}_2 = \varphi_2(\bar{c} + \bar{d}/v) \ , \quad \bar{x}_2^2 = r^2 \ ,$$

где $\bar{a}, \bar{c}$ - радиусы-векторы точек A, C встречи прямых p, m с плоскостью α; $\bar{b}, \bar{d}$ - направляющие векторы прямых p, m в точках A, C соответственно.

Так как плоскость α проходит через точку E , то ее можно задать уравнением

$$\bar{X} = \rho(\bar{e}_0 + \bar{k}u + \bar{\ell}v), \quad \bar{X}^2 = \varkappa^2 .$$

Можно найти вектор нормали $\bar{N} = [\bar{X}, \bar{X}_u, \bar{X}_v]$ [4], плоскости α . Он равен:

$$(48) \qquad \bar{N} = \rho^3 [\bar{e}_0 \bar{k} \bar{\ell}] = \rho^3 \bar{m} ,$$

где

$$\bar{m} = [\bar{e}_0 \bar{k} \bar{\ell}] = \overline{const} .$$

Прямые p, m являются нормалями плоскости α в точках A и C соответственно. Поэтому их направляющие векторы $\bar{b}, \bar{d}$ в точках A, C коллинеарны вектору нормали $\bar{N}$ плоскости α :

$$(49) \qquad \bar{b} = \lambda \bar{m} , \quad \bar{d} = \mu \bar{m} .$$

Построим в плоскости α прямые p', m' проходящие через точку E и точки A, C соответственно. Очевидно прямая p ортогональна прямой p' , а прямая m ортогональна прямой m' . Согласно лемме 1 отображение (27) переводит прямые p, p' в ортогональные прямые $\tilde{p}, \tilde{p}'$, а прямые m, m' в ортогональные прямые $\tilde{m}, \tilde{m}'$ евклидова пространства E_0 $(x^0 = 0)$.

Покажем, что прямые $\tilde{p}, \tilde{m}$ коллинеарны. Уравнения прямых $\tilde{p}, \tilde{m}$ как образов прямых p, m имеют соответственно вид:

$$(50) \qquad \tilde{y}_1 = \frac{\varkappa^2(\bar{a} + \bar{b}t) - \bar{e}_0(\bar{a} + \bar{b}t, \bar{e}_0)}{2(\bar{e}_0, \bar{a} + \bar{b}t)} ,$$

(51) $$\tilde{y}_2 = \frac{\kappa^2(\bar{c}+\bar{d}v) - \bar{e}_0(\bar{c}+\bar{d}v, \bar{e}_0)}{2(\bar{e}_0, \bar{c}+\bar{d}v)} .$$

Как было показано при доказательстве леммы 1 (см. (45)), имеют место равенства:

$$(\bar{e}_0 \bar{b}) = (\bar{e}_0 \bar{d}) = 0 .$$

Следовательно, уравнения (50), (51) принимают вид:

(52) $$\tilde{y}_1 = \frac{\kappa^2\bar{a} - \bar{e}_0(\bar{a}\bar{e}_0)}{2(\bar{e}_0\bar{a})} + \frac{\kappa^2\bar{b}}{2(\bar{e}_0\bar{a})} t ,$$

(53) $$\tilde{y}_2 = \frac{\kappa^2\bar{c} - \bar{e}_0(\bar{c}\bar{e}_0)}{2(\bar{c}\bar{e}_0)} + \frac{\kappa^2\bar{d}}{2(\bar{e}_0\bar{c})} v .$$

Дифференцируя (52) по t, а (53) по v, получим направляющие векторы $\tilde{y}'_{1_t}$, $\tilde{y}'_{2_v}$ прямых $\tilde{p}$, $\tilde{m}$, соответственно:

(54) $$\tilde{y}'_{1_t} = \frac{\kappa^2}{2(\bar{e}_0\bar{a})} \bar{b} ,$$

(55) $$\tilde{y}'_{2_v} = \frac{\kappa^2}{2(\bar{e}_0\bar{c})} \bar{d} .$$

Из равенств (49), (54), (55) следует коллинеарность прямых $\tilde{p}$, $\tilde{m}$. Но прямая $\tilde{m}$ ортогональна прямой $\tilde{m}'$, лежащей в плоскоти $\tilde{\alpha}$. Следовательно, прямая $\tilde{p}$, как прямая, ортогональная двум неколлинеарным прямым $\tilde{p}'$, $\tilde{m}'$, лежащим в плоскости $\tilde{\alpha}$, ортогональна плоскости $\tilde{\alpha}$.

п. 4. Пусть $\mathfrak{F}$ - регулярная поверхность эллиптического пространства, имеющая отрицательную внешнюю кривизну K_e, $K_e = K - \frac{1}{R^2} < 0$, и однозначно ортогонально проектирующаяся на плоскость α в виде некоторй области $\mathfrak{D}$. Пусть область $\mathfrak{D}$ содержит некоторый круг Γ радиуса ρ. Имеет место:

<u>Теорема 2.</u>

Существует постоянная $\tilde{C}$ такая, что для любой регулярной поверхности $\mathfrak{F}$ эллиптического пространства при условии

$$K_e \leq - a^2 < 0, \quad (a = const > 0),$$

справедлива оценка

$$\operatorname{tg} \frac{\rho}{R} < \frac{\tilde{C}}{aR} \quad . \tag{56}$$

<u>Доказательство</u>. Не органичивая общность будем считать, что плоскость α проходит через конец вектора $\bar{e}_0$ - точку E пространства S_3, и центр круга Γ совпадает с точкой E. Погореловское отображение (27) переводит поверхность $\mathfrak{F}$ в поверхность Φ евклидова пространства E_0 $(x^0 = 0)$. Если обозначить $\tilde{K}$ гауссову кривизну поверхности Φ, то в силу (21), (22) можем записать:

$$\tilde{K} < K_e \leq - a^2 < 0 \quad . \tag{57}$$

Отображение (27) переводит плоскость α в плоскость $\tilde{\alpha}$ пространства E_0, проходящую через начало координат O.

Всякую прямую, проходящую через произвольную точку M поверхности $\mathfrak{F}$ ортогонально плоскости α, отображение (27) переводит в проходящую через соответствующую точке M точку

$\mathcal{M}$ поверхности $\tilde{\Phi}$ прямую, которая в силу леммы 2 ортогональна плоскости $\tilde{\alpha}$.

Следоватекльно, поверхность Φ , как обраэ однозначно ортогонально проектирующейся поверхности $\mathcal{F}$, сама однозначно ортогонально проектируется на плоскость $\tilde{\alpha}$, причем, так как проекция $\mathcal{D}$ поверхности $\mathcal{F}$ содержит круг Γ радиуса ρ с центром в точке E , то проекция $\tilde{\mathcal{D}}$ поверхности $\tilde{\Phi}$ содержит круг $\tilde{\Gamma}$ с центром в начале координат O , радиуса $\tilde{\rho}$, связанного с радиусом ρ , в силу теоремы 1, п. 2, соотношением:

$$\tilde{\rho} = \frac{r}{2} \operatorname{tg} \frac{\rho}{r} \quad . \tag{58}$$

Применяя к поверхности Φ оценочную теорему Н.В. Ефимова, получим, что существует такая постоянная C , что

$$\tilde{\rho} < \frac{C}{a}$$

и тогда, в силу (58) и обозначая $2C$ через $\tilde{C}$ получим утверждения теоремы 2.

Литература

[1] Н.В. ЕФИМОВ: Исследование полной поверхности отрицательной кривизны, Докл.АН СССР 93(1953), 393-395.

[2] Н.В. ЕФИМОВ: Исследование однозначной проекции поверхности отрицательной кривизны, Докл.АН СССР 93(1953),609-611.

[3] Л.А. СИДОРОВ: Некоторые свойства поверхностей отрицательной внешней кривизны в пространстве Лобачевского, Мат. заметки 4(1968),165-169.

[4] А.В. ПОГОРЕЛОВ: Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, "Наука",Москва,1969.

Гос.университет

Ростов-на-Дону
СССР

(Oblatum 16.8.1972)